Сборник задач по физике.

Савченко О.Я., Балдин Е.М.

9 ноября 2003 г.

Предисловие

В этом сборнике собраны задачи которые по разным причинам не вошли в сборник задач под редакцией О. Я. Савченко [1]. По своей структуре этот сборник отличается от упомянутого [1] тем, что кроме самих задач каждому разделу предшествует кратко изложенный материал освоение которого достаточно для решения задач раздела[1].

Данный документ распространяется под лицензией GNU FDL[2]. Вкратце: Вы можете распространять этот документ в любом виде при условии предоставления исходников; Вы можете распечатывать этот документ для себя; Вы можете его модифицировать (или копировать часть информации) при условии сохранения на результат текущей лицензии; При печати больших тиражей[3], а так же для изменения текущей лицензии вам следует получить разрешение авторов.

Запрещается модифицировать существующий текст и все его производные добавляя решения к уже существующим задачам. Это не «Решебник» — это «Задачник» и он *должен* таковым и остаться.

Для получения более подробной информации об этом типе лицензии следует обратиться к первоисточнику по адресу www.gnu.org. Существует русский перевод лицензии выполненный и прокомментированный Еленой Тяпкиной.

[1] Естественно, что в более поздних разделах материал даётся в предположении, что предыдущие темы уже изучены.

[2] GNU Free Documentation License.

[3] Больше 100 экземпляров.

Оглавление

Глава 1

Кинематика

Основной задачей кинематика является описание движения твёрдого тела. В этом разделе для описания используются уравнения классической механики, которая при скоростях близких к скорости свет расширяется с помощью релятивистской механики, а при перемещении малых частиц с помощью квантовой механики. Используемые «классические» уравнения не являются истиной в последней инстанции, так как все уравнения являются только моделью реального мира. Для повседневного же использования точности этих уравнений достаточно.

1.1 Движение с постоянной скоростью

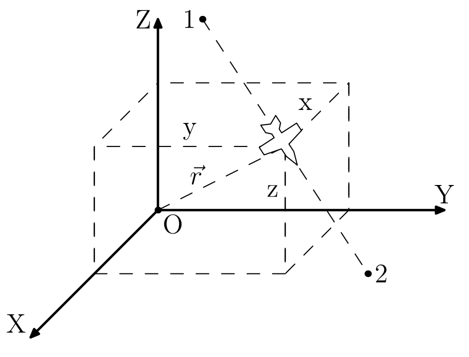

Рис. 1.1.1.

Поезд движется от железнодорожной станции в одном направлении и расстояние между станцией и поездом за любой промежуток времени t увеличивается на Vt, где V — постоянная величина. Рассмотренный пример — движение тела с постоянной скоростью V по прямой линии. На рис. 1.1.1 изображено движение самолёта C по прямой, проходящей через точки 1 и 2. Как и в первом примере расстояние между точкой 1 и самолётом за время t

изменяется на величину Vt, когда самолёт движется по этой прямой с постоянной скоростью V. На расстоянии r между самолётом C и аэродромом O[1] уже не пропорционально t, если аэродром не находится на пути самолёта. Однако расстояния самолёта до выделенных плоскостей линейно зависят от времени:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + V_x t, \\ y &= y_0 + V_y t, \\ z &= z_0 + V_z t, \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

x_0, y_0, z_0 — расстояние до плоскостей в нулевой момент времени, V_x, V_y, V_z — составляющие вектора скорости $\vec{V}$ по осям X, Y, Z, которые связаны с величиной скорости V формулой:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \tag{1.1.2}$$

где $V_x = V\cos\alpha$, $V_y = V\cos\beta$, $V_z = V\cos\gamma$. α, β и γ — углы между вектором скорости $\vec{V}$ и осями координат X, Y и Z (см. рис. 1.1.2).

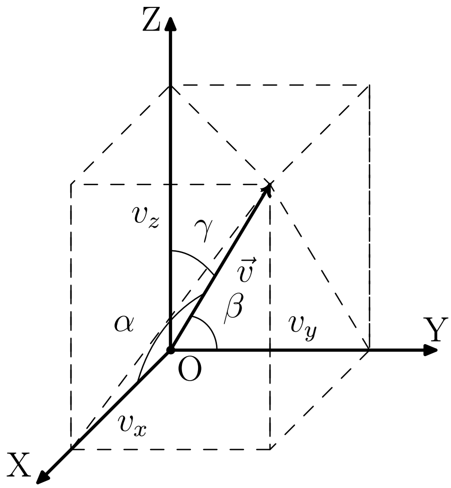

Рис. 1.1.2.

Пример 1.1.1 Звуковая волна удаляется от источника звука с постоянной скоростью. В воздухе скорость звука равна 330 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Докажите, что гром, который длится более четырёх секунд рождён молнией длина которой больше километра.

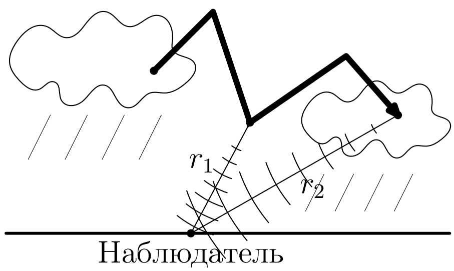

Рис. 1.1.3.

Доказательство: Длительность грома, умноженная на скорость звука, равна $r_2 - r_1$ (рис. 1.1.3) — разности расстояний от наблюдателя H до самого удалённого и самого близкого участка молнии. Длина молнии больше километра, так как она заведомо больше $r_2 - r_1$, которая больше $330\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 4\,\text{с} \simeq 1.32\,\text{км}$.

[1]Точка O расположена на пересечении трёх взаимноперпендикулярных плоскостей ZOY, ZOX и XOY

Задачи к § 1.1

1.1.1 Путь длиною 120 км автобус проходит за 2.5 часа. На пути тридцать одинаковых остановок. Между остановками автобус движется со скоростью 60 $\frac{\text{км}}{\text{час}}$. Определите продолжительность каждой остановки.

1.1.2 Из двух населённых пунктов, расположенных на расстоянии l друг от друга, одновременно вышли навстречу друг другу два путника,— один со скоростью v, другой — u. Через какое время они встретятся?

1.1.3 Через какое время автомобиль догонит велосипедиста, если велосипедист движется со скоростью 20 $\frac{\text{км}}{\text{час}}$, а автомобиль со скоростью 100 $\frac{\text{км}}{\text{час}}$, а расстояние между автомобилем и велосипедистом 40 км?

1.1.4 Число автолюбителей, перегоняющих пешехода, в 1.2 раза меньше числа встречных автомобилей, хотя автомобили двигаются по трассе одинаково в обеих направлениях со скоростью 65 $\frac{\text{км}}{\text{час}}$. С какой скоростью движется пешеход?

1.1.5 Колонна машин двигается после поворота со скоростью в K раз меньшей, чем до поворота. Во сколько раз изменилась длина колонны после поворота.

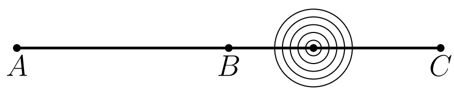

Рис. 1.1.4. К задаче №1.1.6

◇ 1.1.6 Три микрофона, расположенных на одной прямой в точках A, B, C. Расстояние между соседними микрофонами L. Микрофоны в точках A и B зарегистрировали в момент времени t_A, t_B и t_C звук от взрыва, который произошёл на этой прямой между точками B и C. Определите скорость взрывной волны, место и момент времени взрыва.

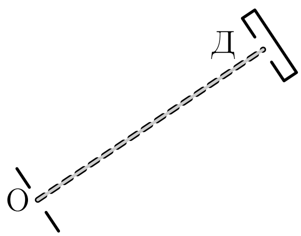

Рис. 1.1.5. К №1.1.7

◇ 1.1.7 Два сорта частиц A и B проходят через отверстие O в один и тот же момент времени. В детектор D частицы сорта A попадают на $\delta t = 10^{-6}$ с позднее чем частицы сорта B. Скорость частиц сорта A равна $v_A = 5 \cdot 10^6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Чему равна скорость частиц сорта B, если расстояние между отверстием O и детектором D равно $S = 10$ м.

1.1.8 Счётчики A и B, регистрирующие проход γ-кванта, расположены на расстоянии 5 м друг от друга. Между счётчиками произошёл распад π^0-мезона на два γ-кванта. Найдите положение мезона, если счётчик A зарегистрировал γ-квант на 10^{-8} с позднее, чем счётчик B. Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ с.

Рис. 1.1.6. К №1.1.9

◇ 1.1.9 Стрелок пытается попасть в диск радиуса R, который движется между стенками с постоянной по величине скоростью так, что стрелок не в состоянии за ним уследить. Расстояние между стенками L. Выстрелы производятся на уровне центра диска перпендикулярно его плоскости. Диск движется так, как показано на рис. 1.1.6. В какой точке прицеливания вероятность попадания наибольшая? Чему она равна?

1.1.10 Короткие звуковые импульсы наземного локатора, испускаемые через время τ, возвращаются после отражения от самолёта, который удаляется от локатора, следуя друг за другом через время $k\tau$, где $k > 1$. Во сколько раз скорость самолёта меньше скорости звука?

1.1.11 Частота следования коротких звуковых импульсов, испускаемых локатором самолёта, в k раз меньше частоты следования импульсов, которые фиксируют датчики самолёта у звуковых импульсов, отражённых от неподвижного тела, находящегося на пути самолёта. Во сколько раз скорость самолёта меньше скорости звука?

1.1.12 а) Два звуковых датчика расположены на пути движения автомобиля, один — впереди, другой — позади. Первый датчик регистрировал звуковой сигнал автомобиля в течении 0.9 с, второй — в течении 1.1 с. Скорость звука 330 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. С какой скоростью двигался автомобиль?

б) Звуковой сигнал наземного локатора, отражённый от самолёта, движущегося от локатора, в четыре раза длиннее посланного сигнала. Определите скорость самолёта.

1.1.13 Два человека стоят на расстоянии h_1 и h_2 от стенки и l — друг от друга. Один из них сказал слово, другой услышал конец слова, совпавшее с началом эха этого же слова. Скорость звука c. Определите длительность звучания слова.

1.1.14 Самолёт летит горизонтально на высоте 4 км от поверхности земли. Звук дошёл до наблюдателя через 10 с после того, как над ним пролетел самолёт. Во сколько раз скорость самолёта превышает скорость звука. Скорость звука 300 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

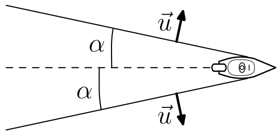

Рис. 1.1.7. К №1.1.15

$\diamondsuit$ 1.1.15 Фронт волны от моторной лодки образует угол α с направлением её движения. Угол не меняется при движении лодки. Скорость волны u. Определите скорость лодки.

$\diamondsuit$ 1.1.16 Навстречу друг другу по плоскости со скоростью v движутся две длинные палки, расположенные так, как изображено на рис. 1.1.8. С какой скоростью движется точка их пересечения?

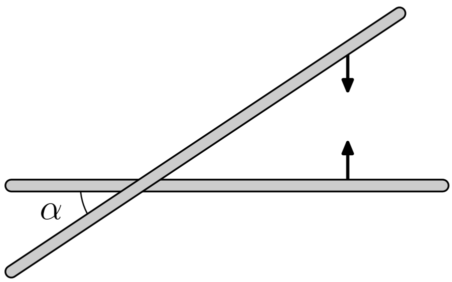

Рис. 1.1.8. К задаче №1.1.16

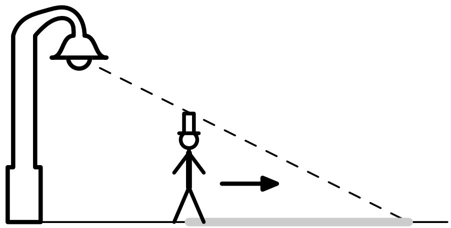

Рис. 1.1.9. К задаче №1.1.17

$\diamondsuit$ 1.1.17 Человек высоты h идёт от фонаря, подвешенного на высоте H, со скоростью u. С какой скоростью движется конец тени человека?

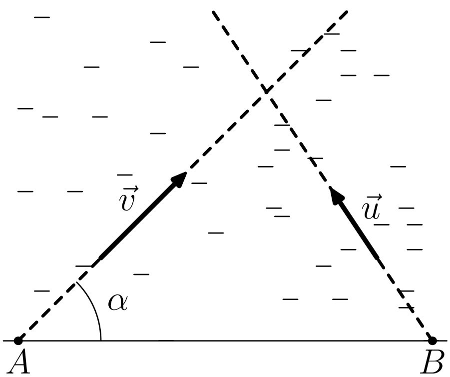

Рис. 1.1.10. К задаче №1.1.18

$\diamondsuit$ 1.1.18 Два портовых города A и B находятся на расстоянии L друг от друга. Пароход отчалили от города A и движется со скоростью v под углом α к линии, соединяющей эти города. Через какое время должен отчалить катер из города B, чтобы, двигаясь со скоростью u курсом, перпендикулярным курсу парохода, встретиться с ним.

1.1.19 Оператор радиолокационной станции обнаружил на расстоянии 20 км от станции самолёт, летящий с постоянной скорость. Через

20 мин после оператор повернул луч локатора на 90° и обнаружил этот же самолёт на том же расстоянии, что и в первый раз. Определить скорость самолёта.

1.1.20 Первый луч локатора обнаружил объект, движущийся с постоянной скорость. на расстоянии r_1, а через время τ — на расстоянии r_2. Угол, который образовывал луч с осями X и Y, был соответственно равен α_1 и β_1, а во второй раз — α_2 и $beta_2$. С какой вероятность. двигался объект?

1.1.21 Две стенки образуют угол α. Под каким углом к одной из стенок должен влететь шарик, чтобы вылететь по траектории влёта после трёх ударов о стенки? после пяти ударов? после $2n + 1$ ударов? Движение шарика происходит в плоскости, перпендикулярной стенкам. При упругом ударе угол падения шара равен углу отражения.

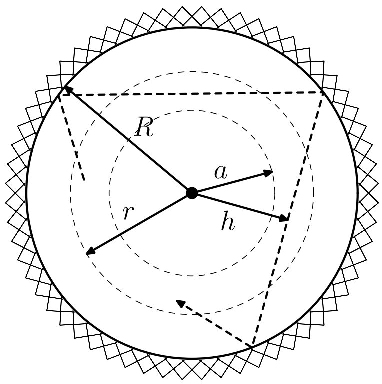

Рис. 1.1.11. К задаче №1.1.22

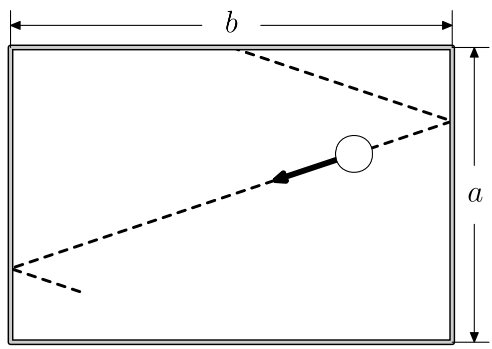

Рис. 1.1.12. К задаче №1.1.23

◇ 1.1.22 а) Внутри сферической полости радиуса R летает маленький шарик, упруго отражаясь от поверхности полости. Минимальное расстояние шарика от центра полости h. Чему равна вероятность обнаружить шарик на расстоянии, меньшем, чем r, от центра полости? большем чем r?

б) Чему равна вероятность, что шарик из задачи а) находится на расстоянии, большем чем a, но меньшем, чем r от центра полости?

◇ 1.1.23 По биллиардному столу с бортами длины a и b пустили шар от середины борта длины a и он, упруго отражаясь от бортов, вернулся в то же место, из которого он начал своё движение. Первый удар шар совершил о борт длины a. Расстояние от места первого удара до ближайшего угла a/n, ult n — целое положительное число. Сколько всего ударов о борты длины a совершил шар?

◇ 1.1.24 Траектория атома, упруго отражённого от стенок куба, размеры которого $a \times a \times a$, — квадрат. Скорость атома v.

а) С какой средней скоростью станет перемещаться по каждой стенке место удара, если сместить одну стенку на Δ.

б) Через какое время в задаче а) атом вернётся из которого он летел, если $\Delta = \frac{a}{n}$, где n — положительное целое число, а атом летел в сторону смещённой стенки сразу же после его отражения от стенки? Чему равно расстояние между ближайшими параллельными участками траектории?

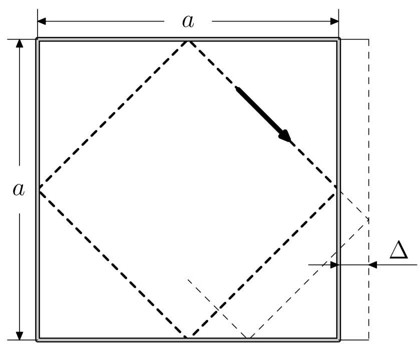

Рис. 1.1.13. К задаче №1.1.24

в) Решите задачу б), если $\Delta = a\frac{m}{n}$, где m и n целые положительные числа и $m < n$,

г) Почему обычно считают, что расстояние между ближайшими параллельными участками траекторий в в) сколь угодно малы?

1.1.25 Со скоростью v навстречу друг другу ползут черепахи. В момент, когда расстояние между черепахами было L, с одной из них слетела муха и скоростью u, $u > v$ полетела навстречу второй черепахе. Долетев до неё, развернулась, и с той же скоростью полетела назад к первой черепахе. Долетев до неё, развернулась, и полетела ко второй и т. д. Какой пролетела муха, прежде чем черепахи встретились?

1.2 Прямолинейное движение с постоянным ускорением

Если промежуток времени dt очень мал, то скорость тела не успевает измениться. Следовательно, в течении этого промежутка времени тело движется с постоянной скоростью. Поэтому расстояние dS, пройденное телом за время dt, определяется формулой

$$dS \simeq v\,dt. \tag{1.2.1}$$

Величина v, называется мгновенной скоростью или просто — скоростью.

Скорость не обязана быть константой. Её величина может меняться с течением времени. Представляет интерес случай, когда скорость линейно зависит от времени.

$$v = v_0 + at \tag{1.2.2}$$

Величину a называют ускорением тела.

В качестве примера подобного поведения скорости можно привести скорость падающего камня: $v = gt$, где $g = 9.8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ — ускорение свободного падения; Скорость стартующего автомобиля линейно зависит от времени: $v = at$, где a —ускорение автомобиля, а t — время от начала старта; Поезд, подходя к железнодорожной станции тормозит и его скорость линейно уменьшается: $v = v_0 - at$, где v_0 — скорость поезда до начала торможения, $-a$ — отрицательное ускорение поезда, t — время торможения.

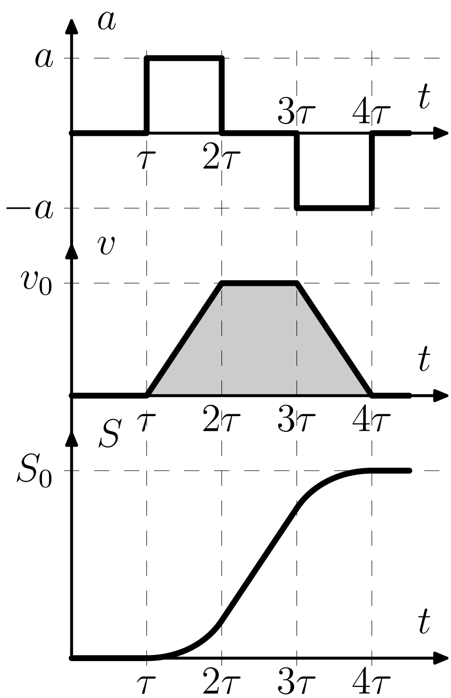

Рис. 1.2.1.

Расстояние S, пройденное телом, которое движется в течении времени t с постоянным ускорением a, равно средней скорости тела, умноженной на время t. Поэтому

$$S = \frac{1}{2}(v_0 + v_t)\cdot t = v_0 t + \frac{1}{2}at^2, \tag{1.2.3}$$

где v_0 — скорость тела в нулевой момент времени t.

Наглядную картину движения тела дают графические изображения зависимостей ускорения, скорости и расстояния от времени. Три графика на рис. 1.2.1 дают значения ускорения, скорости и расстояния, пройденное автомобилем в любой момент времени. Автомобиль двигался по прямому участку дороги. Наклон графика скорости в каждый момент времени равен ускорению в этот же момент времени. Аналогично, наклон графика расстояния, пройденного автомобилем, равен его скорости. Следствием этого является, что расстояние, пройденное телом на момент 4τ равно «закрашенной» площади под графиком скорости. Подробнее это обсуждается в разделах 3.2 и 3.3.

Пример 1.2.1 Поезд двигался равноускорено от станции в течении времени τ_1 с ускорением a, а затем равнозамедленно в течении времени τ_2 вплоть до полной остановки. На каком расстоянии от станции остановился поезд?

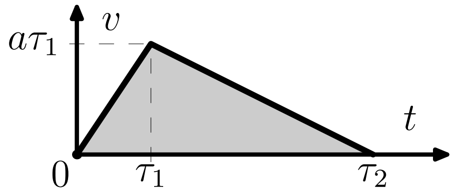

Рис. 1.2.2.

Решение: На рис. 1.2.2 изображён график зависимости скорости поезда от времени. Искомое расстояние — площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2}a\tau_1 \cdot (\tau_1 + \tau_2).$$

Задачи к § 1.2

1.2.1 а) Камень бросили вертикально вверх со скоростью 9.8 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Через какое время камень вернётся?

б) Первую половину пути сосулька летела 1 с. Сколько времени ей осталось лететь до земли?

Ускорение свободного падения $g = 9.8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

1.2.2 Двигаясь с постоянным ускорением, автомобиль на участке длины 50 м увеличил свою скорость с 20 до 25 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Определить ускорение автомобиля.

1.2.3 Поезд начинает тормозиться на расстоянии ell от железнодорожной станции, имея скорость v. С каким отрицательным ускорением он должен двигаться, чтобы остановиться на станции? Чему равно время торможения?

1.2.4 На неподвижный космический корабль со скоростью v летит поток метеоритов. Двигатель корабля может развить ускорение a. На каком расстоянии от корабля нужно обнаружить этот поток, чтобы включив двигатель, избежать столкновения?

1.2.5 Предпоследний вагон прошёл мимо пассажира за время t_1, последний — за t_2, $t_2 < t_1$. Электричка с вокзала двигалась равноускоренно. На какое время опоздал пассажир?

1.2.6 Спортсмен может пробежать первую половину дистанции с ускорением a, а вторую — с $2a$. Это же он может сделать наоборот: первую половину дистанции пробежать с ускорением $2a$, а вторую — с a. В каком случае он пробежит дистанцию быстрее?

1.2.7 Тело в течении времени τ двигалось с ускорением a_1, а затем равнозамедленно с ускорением a_2 вплоть до остановки. Какое расстояние прошло тело, если в начале оно а) было неподвижно? б) имело скорость v?

1.2.8 а) Поезд, двигаясь от станции равноускоренно, через время τ после отправления изменил величину и направление ускорения, а через время τ после этого проехал мимо станции со скоростью v. На какое максимальное расстояние поезд удалялся от станции?

б) Решите задачу а), если поезд проехал мимо станции через время T после изменения ускорения?

1.2.9 а) Из одной и той же точки вертикально вверх с интервалом времени τ выброшены два шарика скоростью v. Через какое время после валета второго шарика они столкнуться?

б) С какой скоростью нужно выбросить второй шарик в задаче а), чтобы столкновения не произошло?

в) С вертолёта, поднимающегося вертикально вверх со скоростью v с высоты h над землёй отпускают груз. Через какое время груз упадёт на землю? С какой скоростью упадёт груз? Ускорение свободного падения g.

$\diamondsuit$ 1.2.10 Восстановите, если это возможно, недостающие графики на рисунках, изображённых на Рис. 1.2.3.

1.2.11 Нарисуйте график зависимости от времени скорости теннисного шарика, подпрыгивающего в поле тяжести над упругой горизонтальной плоскостью. Шарик отпускают без начальной скорости с высоты 1 м.

1.2.12 Тело в течении времени τ двигается с постоянной скоростью v_0. Затем скорость линейно возрастает во времени так, что в момент времени 3τ она равна $3v_0$. Сохранив достигнутую скорость в течение времени τ,

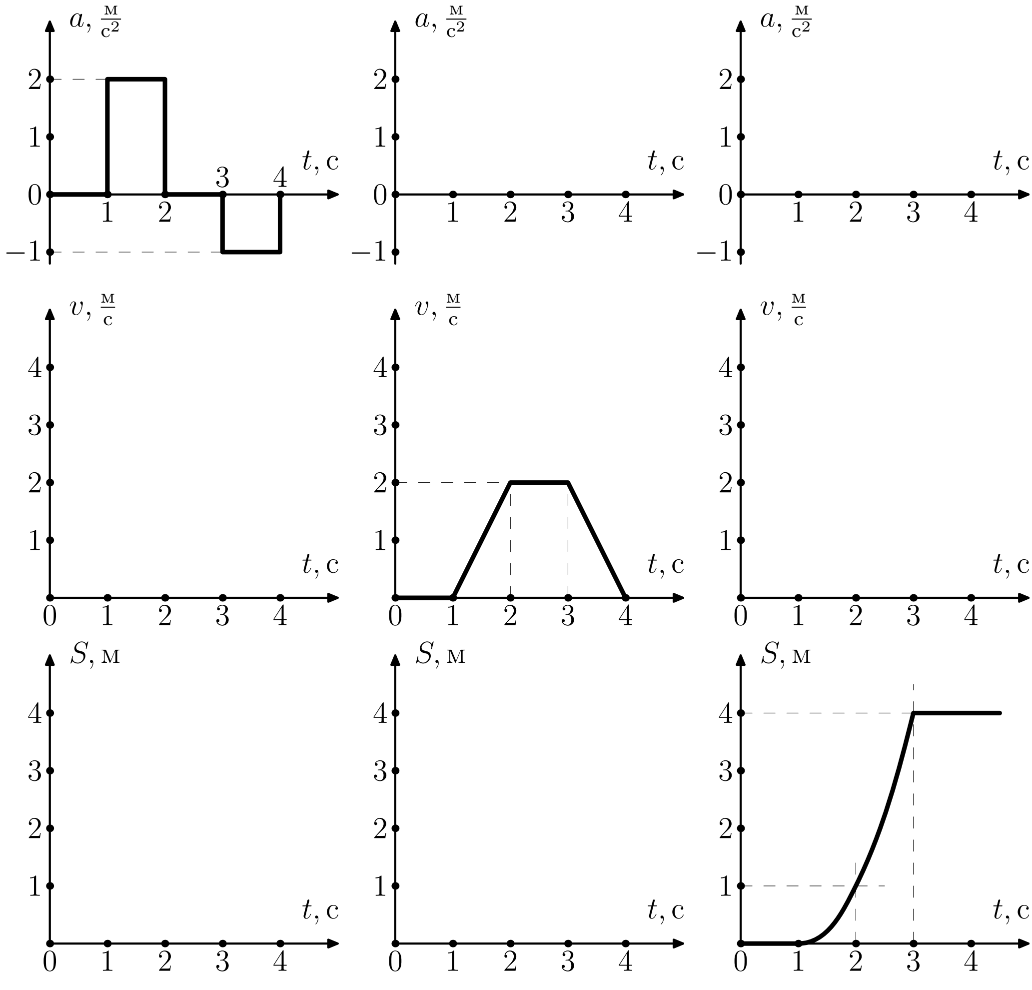

Рис. 1.2.3. К задаче №1.2.10

тело затем начинает тормозить так, что к моменту времени 6τ оно имеет скорость $3v_0$, но в противоположном направлении. Построить график зависимости скорости, ускорения и перемещения от времени.

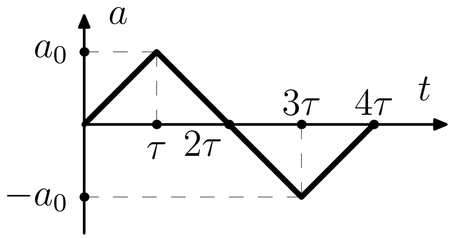

Рис. 1.2.4. К задаче №1.2.13

$\diamondsuit$ 1.2.13 По графику зависимости ускорения от времени (Рис. 1.2.4) построить график зависимости скорости от времени. Скорость в нулевой момент времени равна нулю. Определите скорость в момент времени 2τ и в момент времени 4τ.

1.2.14 Какое максимальное расстояние может пробежать спортсмен от остановки до остановки за время T, если он может разгоняться с ускорением a, а тормозить с ускорением $2a$?

1.2.15 а) Определите минимальное время движения автобуса от одной остановки до другой, если расстояние между остановками ℓ. При движении автобуса от остановки он может развивать ускорение a_1, а при подходе к остановке тормозиться с ускорением a_2.

б) Решить задачу а) при условии, что скорость автобуса на трассе не больше v.

1.3 Баллистика

На Рис. 1.3.1 изображена траектория тела, брошенного под углом α к горизонту со скоростью $\vec{v_0}$. Если промежуток времени dt предельно мал, то тело в течении этого времени движется по касательной с постоянной скоростью и расстояние, пройденное телом за время dt, определяется формулой: $\vec{dS} = \vec{v}dt$, где $\vec{v}$ — вектор скорости, направленный по касательной к траектории тела. В момент броска вертикальная составляю-

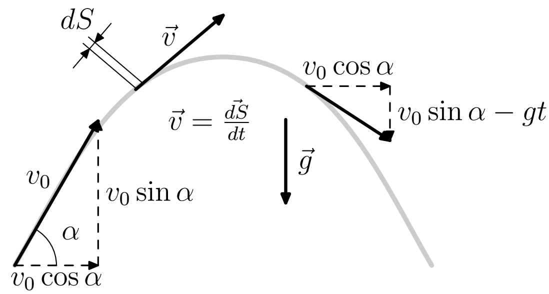

Рис. 1.3.1. Движение в поле тяжести

щая скорости равна $v_0 \sin\alpha$, а горизонтальная составляющая скорости равна $v_0 \cos\alpha$. Ускорение свободного падения g направлено вертикально вниз. Поэтому через время t после броска вертикальная составляющая скорости уменьшится на gt и будет равна $v_0 \sin\alpha - gt$, а горизонтальная составляющая не меняется.

Пример 1.3.1 Камень бросают со скоростью v под углом α к горизонту. Через какое время угол наклона скорости к горизонту уменьшится в 2 раза?

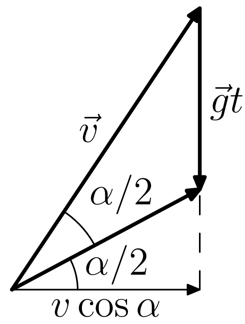

Рис. 1.3.2.

Решение: Вертикальная составляющая скорости в момент броска равна $v\sin\alpha$, а через время t равна $v\cos\alpha\,\mathrm{tg}(\alpha/2)$ (См. Рис. 1.3.2). Значит, время

$$t = v\sin\alpha - v\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}(\alpha/2) = v\sin\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right).$$

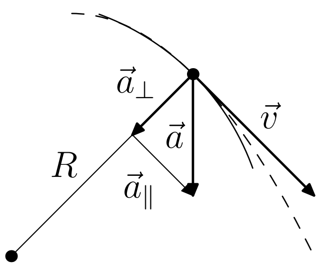

Рис. 1.3.3.

На Рис. 1.3.3 изображены вектор скорости $\vec{v}$ и вектор ускорения $veca$. Штрихованной линией изображена траектория тела. За время dt составляющая ускорения $a_\parallel$, параллельная скорости изменит величину скорости на $a_\parallel dt$, а составляющая ускорения $a_\perp$, перпендикулярная вектору скорости,изменит направление скорости тела на угол $d\varphi = a_\perp dt/v$ и тело будет двигаться по дуге окружности радиуса $R = v^2/a_\perp$. Величина R называется радиусом кривизны траектории.

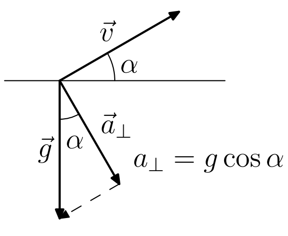

Рис. 1.3.4.

Пример 1.3.2 Определите максимальный и минимальный радиус кривизны траектории снаряда, выпущенного под углом α к горизонту со скоростью v. Ускорение свободного падения $g/$

Решение: Максимальный радиус кривизны будет в начале полёта снаряда, когда $a_\perp$ минимально (См. Рис. 1.3.4), а скорость снаряда максимальна и равна v: $R_{max} = \frac{v^2}{g\cos\alpha}$. Минимальный радиус кривизны траектории будет на максимальной высоте, когда скорость снаряда минимальна и равна $v\cos\alpha$, $a_\perp = g$ — максимально: $R_{min} = \frac{v^2\cos^2\alpha}{g}$.

Задачи к § 1.3

1.3.1 а) Камень бросают со скоростью v под углом α к горизонту. Определите время полёта камня.

б) Решите задачу а) в случае, когда камень бросают с высоты h.

1.3.2 Пушка стреляет под углом α к горизонту. Скорость снаряда в момент выстрела v_0. Как зависит от времени скорость и расстояние снаряда от пушки?

1.3.3 Баскетболист бросает мяч в кольцо. Скорость броска $8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, и направлена под углом 60° к горизонту. С какой скоростью мяч влетел в кольцо, если он долетел до него за 1 с?

1.3.4 С высоты h бросают камень под углом к горизонту. После прохождения точки наивысшего подъёма, находящейся на высоте H от поверхности земли, за оставшееся время падения он переместился по горизонтали на расстояние S. Найти величину начальной скорости камня.

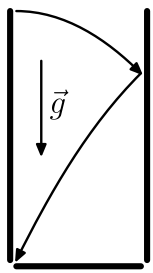

Рис. 1.3.5. К №1.3.7

1.3.5 Спортсмен толкает ядро под углом 45° к горизонту со скоростью $20\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Через какое время после толчка угол наклона скорости к горизонту уменьшится до 30°?

1.3.6 Камень бросили скрутого берега вверх под углом 30° к горизонту со скоростью $10\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. С какой скорость. он упал в воду, если время полёта камня 2 с?

$\diamondsuit$ 1.3.7 С балкона, находящегося на высоте 20 м, бросают мяч со скоростью $20\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Мяч упруго ударяется о стену соседнего дома и падает на землю под балконом. Определите расстояние до соседнего дома, если время полёта мяча 1.4 с.

1.3.8 а) Зенитный снаряд, взлетающий вертикально, через время τ достигает максимальной высот и взрывается. Скорость осколков в момент взрыва равна v. Какой участок земли зсыпят осколки через время τ после взрыва?

б) На каком участке окажутся осколки задачи а), когда все они упадут на землю?

$\diamondsuit$ 1.3.9 а) Со склона с углом α к горизонту бросают камень в горизонтальном направлении со скоростью v. Через какое время камень упадёт

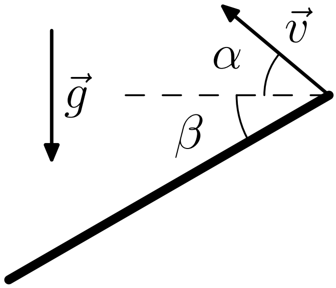

Рис. 1.3.6. К №1.3.9 б

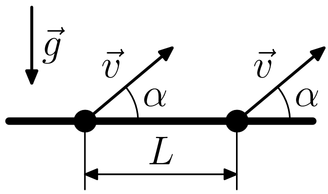

Рис. 1.3.7. К №1.3.12

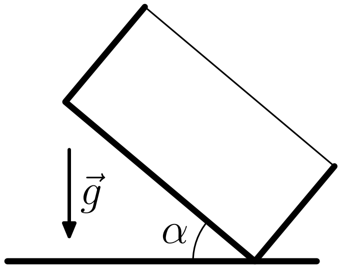

Рис. 1.3.8. К №1.3.13

нас склон? На каком расстоянии после броска будет место падения камня?

б) Из миномёта, расположенного на склоне горы, ведут стрельбу вниз по склону, образующему угол β с горизонтом (См. Рис. 1.3.6). На каком расстоянии от миномёта будут падать мины, если их начальная скорость v направлена под углом α к горизонту?

1.3.10 Когда самолёт пролетает над зенитной пушкой на высоте h, он летит скоростью v, которая направлена горизонтально. Под каким углом к горизонту должна в этот момент выстрелить пушка и какова должна быть скорость снаряда, чтобы поразить самолёт?

1.3.11 С какой скоростью в момент старта ракеты должен вылететь из пушки снаряд, чтобы поразить ракету, стартующую вертикально с ускорением a, если расстояние от пушки до места старта ракеты равно ℓ и пушка стреляет под углом α к горизонту?

$\diamondsuit$ 1.3.12 На расстоянии L друг от друга находятся две одинаковые пушки, направленные в одну сторону под углом α к горизонту (См. Рис. 1.3.7). Начальная скорость снаряда v. На какой высоте можно поразить снаряд одной пушки снарядом другой?

$\diamondsuit$ 1.3.13 В прямоугольной коробке, упруго ударяясь о дно и правую стенку, по одной траектории туда и обратно прыгает шарик (См. Рис. 1.3.8). Промежуток времени между ударами о дно и стенки равен T. Дно коробки образует угол α с горизонтом. Определить минимальную скорость шарика.

1.3.14 В сферической лунке радиуса R, упруго отражаясь от стенок лунки по одной траектории туда и обратно движется шарик. Места ударов находятся на одной горизонтали. Время от удара до удара T. Определить скорость шарика в момент удара.

1.3.15 Из миномёта выстреливают поду углом α к горизонту. Скорость вылетающей мины v. Через какое время мина будет на максимальном расстоянии от миномёта?

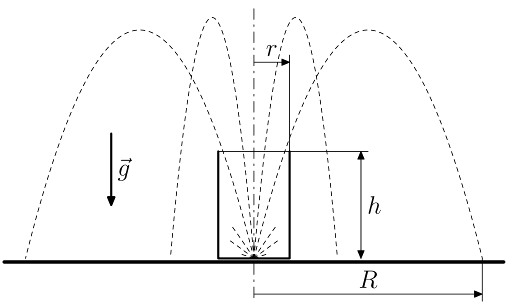

Рис. 1.3.9. К задаче №1.3.16 а

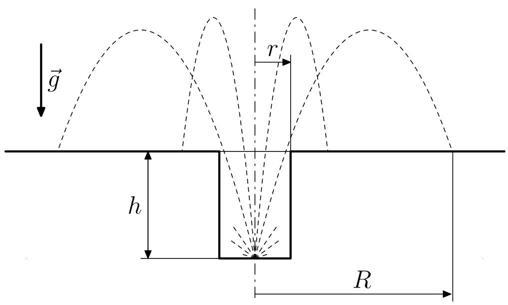

Рис. 1.3.10. К задаче №1.3.16 б

◇ 1.3.16 а) После взрыва снаряда, лежащего в центре дна прочного стакана (См. Рис. 1.3.9), осколки снаряда вылетевшие из стакана, усеяли область вокруг него в радиусе R. Высота стакана h, радиус r. осколки разлетелись в момент взрыва во все стороны с одинаковой скорости. Определите эту скорость.

б) После взрыва снаряда, лежащего в центре дна цилиндрического колодца (См. Рис. 1.3.10) глубины h и радиуса r, осколки снаряда, вылетевшие из колодца, усеяли область вокруг него в радиусе R. Осколки в момент взрыва разлетелись во все стороны с одинаковой скоростью. Определите эту скорость.

1.3.17 С какой минимальной скоростью можно перебросить камень через здание высоты H с куполообразной крышей радиуса R?

1.3.18 а) С какой скоростью должен скользить шарик радиуса r по горизонтальной доске, чтобы, достигнув края доски, оторваться от неё?

б)Горизонтальная доска имеет на конце закругление радиуса R. С какой скоростью должен скользить по доске шарик радиуса r, чтобы достигнув начала скругления доски, оторваться от неё?

◇ 1.3.19 Какое дополнительное ускорение должен развить реактивный снаряд (См. Рис. 1.3.11), выстреливаемый горизонтально с высоты h,

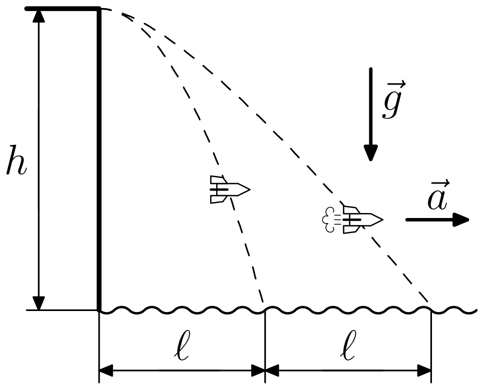

Рис. 1.3.11. К задаче №1.3.19

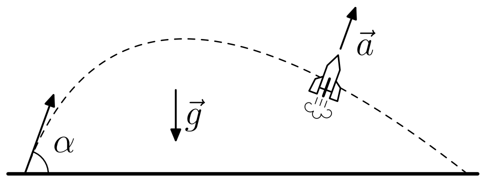

Рис. 1.3.12. К задаче №1.3.21

чтобы удвоить дальность полёта в сравнении с дальностью ℓ, которая была при выключенном двигателе.

1.3.20 Ракета на старте развивает дополнительное ускорение a под углом α к горизонту, $a > g \sin\alpha$. Через время τ после старта тяга выключается. Определите длительность и дальность полёта ракеты.

$\diamondsuit$ 1.3.21 Из орудия под углом α к горизонту произведён выстрел реактивным снарядом (См. Рис. 1.3.12). Начальная скорость снаряда v, и он сразу же после выстрела развивает постоянное дополнительное ускорение a в направлении выстрела. Определите время полёта, дальность полёта и максимальную высоту подъёма снаряда.

1.4 Движение с переменным ускорением

Тело только в редких случаях в течение длительного времени движется с постоянным ускорением. Чем меньше рассматриваемый промежуток времени, тем меньше меняется ускорение. В предельно малом промежутке времени dt ускорение постоянно и изменение скорости в этот промежуток времени определяется формулой:

$$d\vec{v} = \vec{a}dt. \tag{1.4.1}$$

Вектор $\vec{a}$ называется *мгновенным ускорением* или ускорением.

Пример 1.4.1 По прямой линии движутся два тела. Расстояние, которое проходит за время t первое тело, равно Ct^2, а второе Ct^3. Как меняется со временем скорость и ускорение этих тел?

Решение: Скорость и ускорение первого тела в момент времени t определяется равенствами:

$$v = \frac{(t+dt)^2 - t^2}{dt} = 2Ct + dt \underset{dt\to 0}{=} 2t,$$
$$a = \frac{2C(t+dt) - 2Ct}{dt} = 2C,$$

а скорость и ускорение второго тела — равенствами:

$$v = \frac{(t+dt)^3 - Ct^3}{dt} = 3Ct^2 + 3Ctdt + C(dt)^2 \underset{dt\to 0}{=} 3Ct^2,$$
$$a = \frac{3C(t+dt)^2 - 3Ct^2}{dt} = 6Ct + 3Cdt \underset{dt\to 0}{=} 6Ct,$$

так как dt стремится к 0.

ℓ	v	a
Ct^n	Cnt^{n+1}	$Cn(n-1)t^{n-2}$
$C\sin\omega t$	$C\omega\cos\omega t$	$-C\omega^2\sin\omega t$
$C\cos\omega t$	$-C\omega\sin\omega t$	$-C\omega^2\cos\omega t$
$Ce^{\alpha t}$	$C\alpha e^{\alpha t}$	$C\alpha^2 e^{\alpha t}$

Таблица 1.4.1.

v	ℓ
Ct^n	$Ct^{n+1}/(n+1) + \mathcal{D}$
$C\sin\omega t$	$-(C/\omega)\cos\omega t + \mathcal{D}$
$C\cos\omega t$	$(C/\omega)\sin\omega t + \mathcal{D}$
$Ce^{\alpha t}$	$(C/\alpha)e^{\alpha t} + \mathcal{D}$

Таблица 1.4.2.

В таблице 1.4.1 приводятся зависимости от времени: пути, скорости и ускорения, а в таблице 1.4.2 приводятся зависимости от времени скорости и пути. Величины C и $\mathcal{D}$ в таблицах — постоянные.

Зависимость $Ce^{\alpha t}$, приведённая в таблицах, называется *экспоненциальной зависимостью*, а $e^{\alpha t}$ — экспонентой с показателем α. Через промежуток времени $\tau = 1/|\alpha|$ экспонента с положительным показателем α увеличится в $e = 2.718281828459045\ldots$ раз, а с отрицательным — во столько же раз уменьшится. Экспоненциальное возрастание и затухание имеет место тогда, когда скорость изменения величины x пропорциональна x: $\frac{dx}{dt} = \alpha x$. Показатель экспоненты равен коэффициенту пропорциональности α. Поэтому, когда α положительно и скорость изменения

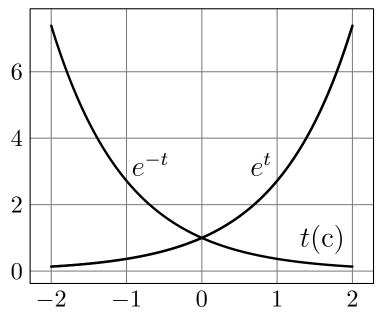

Рис. 1.4.1. Экспонента

величины тем больше, чем больше эта величина, имеет место экспоненциальное возрастание этой величины, а когда α отрицательно и скорость уменьшения величины тем меньше, чем меньше величина, имеет место экспоненциальное затухание этой величины. На Рис. 1.4.1 изображена возрастающая и затухающая экспонента с $1/|\alpha| = 1\,$с.

Пример 1.4.2 Чем меньше скорость лодки v, тем слабее она тормозится: $a = dv/dt = -\alpha v$. Какое расстояние пройдёт лодка, которой сообщили скорость v_0, до её остановки? Как зависит путь, пройденный лодкой от времени?

Решение: Уменьшение скорости $(-dv) = \alpha v dt = \alpha d\ell$ — пропорционально пройденному пути $d\ell$. Поэтому искомое расстояние $\ell = v_0/\alpha$, так как скорость лодки уменьшилась на v_0. Скорость изменения скорости пропорциональна скорости, Коэффициент пропорциональности равен $-\alpha$. Поэтому скорость убывает экспоненциально: $v = v_0 e^{-\alpha t}$. Согласно таблице 1.4.2:

$$\ell = -(v_0/\alpha)e^{-\alpha t} + \mathcal{D} = (v_0/\alpha)(1 - e^{-\alpha t}),$$

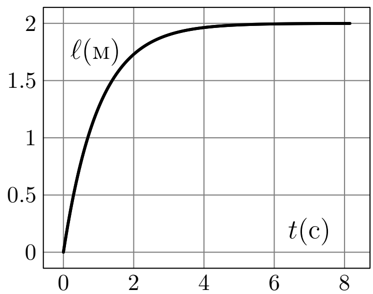

Рис. 1.4.2. Движение лодки $\alpha = 1\,\text{с}^{-1}$, $v = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

так как в момент времени $t = 0$, величина ℓ должна быть равна нулю. Зависимость расстояния от времени изображена на Рис. 1.4.2 в случае, когда $\alpha = 1\,\text{с}^{-1}$ и $v = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Если чуть отклонить маятник, а затем отпустить его, то он будет двигаться к положению равновесия с ускорением тем большим, чем больше его отклонение x:

$$a = -\omega_0^2 x, \tag{1.4.2}$$

ω_0^2 — положительная постоянная величина, разная у разных маятников. Подобная зависимость ускорения тел при малых отклонения от положения устойчивого равновесия универсальна и поэтому вблизи равновесия все тела движутся синусоидально:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) = A\sin(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}). \tag{1.4.3}$$

При малых колебаниях тела вблизи равновесия амплитуда колебаний A и фаза φ могут иметь любые значения, но ω_0 — *угловая частота колебаний* — для этого тела своя неизменная величина.

Пример 1.4.3 На Рис. 1.4.3 изображено небольшое тело, которое движется со скоростью $\omega_0 A$ по окружности радиуса A. В нулевой момент времени радиус, соединяющий тело с центром окружности, образует с осью X угол φ. На ось X падает перпендикулярно световой поток. Как зависит от времени расстояние тени тела до центра окружности, а также скорость и ускорение тела?

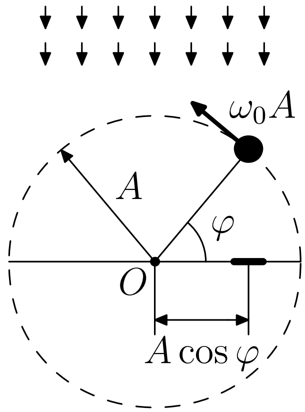

Рис. 1.4.3. Движение по окружности.

Решение: Расстояние тени до центра окружности O в момент времени t определяется формулой:

$$x = A\cos\omega_0 t + \varphi.$$

Пользуясь таблицей 1.4.1, находим скорость и ускорение тени:

$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x.$$

Этот же результат можно получить, если спроектировать скорость и ускорение на ось X. Таким образом, тень тела, движущегося по окружности радиус A со скоростью $A\omega_0$ повторяет колебательное движение тела с амплитудой A и фазой φ в случае, если угловая частота колебаний равна ω_0.

Пример 1.4.4 В нулевой момент времени тело, которое находилось на расстоянии x_0 от положения равновесия, имело скорость v_0. Определите, на каком расстоянии от положения равновесия будет находится тело в момент времени t, если угловая частота колебания тела равна ω_0.

Решение: Положение тела и его скорость определяется формулами:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \quad v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Нужно выбрать амплитуду A и фазу φ так, чтобы при $t = 0$ тело находилось на расстоянии x_0 от положения равновесия и имело скорость v_0. Это значит, что:

$$A\cos\varphi = A_0, \quad -A\omega_0 \sin\varphi = v_0.$$

Из этих двух уравнений находим, что

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}, \quad \varphi = -\operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{x_0\omega_0}\right).$$

Предложенный приём решения задачи называется определением движения тела по начальным условиям.

Когда скорость и ускорение сложным образом зависят от времени, например так, как это изображено на Рис. 1.4.4, используется графический метод. В первом случае расстояние, пройденное телом за время t_2–t_1, равно площади закрашенной фигуры, сначала делённой на площадь S_0, а затем умноженной на $v_0\tau_0$. Во втором случае изменение скорости за время t_2–t_1 равно заштрихованной площади, делённой на S_0, а затем умноженной на $a_0\tau_0$.

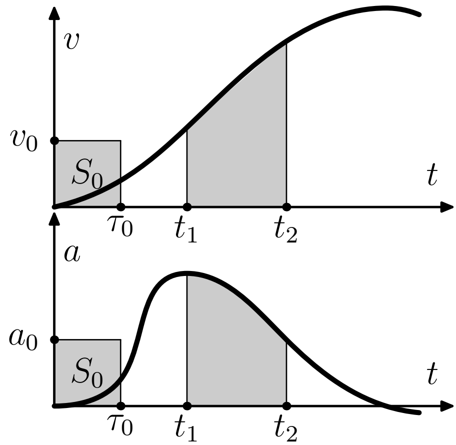

Рис. 1.4.4. Графический метод.

Пример 1.4.5 График зависимости скорости тела от времени имеет вид полуокружности. Максимальная скорость тела v_0, время движения tau_0. Определите путь, пройденный телом.

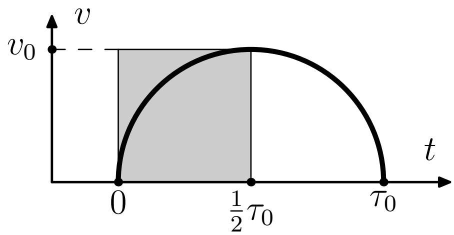

Рис. 1.4.5.

Решение: Площадь заштрихованного квадрата (См. Рис. 1.4.5) равна R^2, если R — радиус полуокружности. Она соответствует пути $\frac{1}{2}v_0\tau_0$. Путь ℓ, пройденный телом во столько раз больше $\frac{1}{2}v_0\tau_0$, во сколько раз площадь полуокружности больше площади квадрата. Поэтому:

$$\ell = \frac{1}{2}v_0\tau_0\left(\frac{1}{2}\pi R^2/R^2\right) = \frac{1}{4}\pi v_0\tau_0.$$

Задачи к § 1.4

1.4.1 Стартуя, гонщик линейно наращивает ускорение своего автомобиля, через время τ после старта имел скорость v. На каком расстоянии от старта он находился в это время?

1.4.2 Ускорение тела сначала в течении времени τ линейно увеличилось до v, а затем с такой же скоростью уменьшилось. Определить максимальную скорость тела.

♢ 1.4.3 Зависимость ускорение ракеты изображена на Рис. 1.4.6 Определите скорость и расстояние ракеты от места старта в момент времени $t > t_2$.

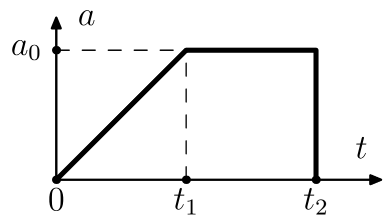

Рис. 1.4.6. К задаче №1.4.3

1.4.4 Мальчик начал раздувать воздушный шарик и через время t его радиус стал R. С какой скоростью в этот момент времени двигалась поверхность шарика, если считать, что шарик раздувался равномерно?

1.4.5 Через какое время исчезнет капля радиуса R, если с единицы поверхности в единицу времени испарился объём жидкости q?

♢ 1.4.6 Из конической воронки с углом α (См. Рис. 1.4.7) при вершине конуса через трубку радиуса r со скоростью v_0 вытекает жидкость. В нулевой момент времени уровень жидкости в воронке находится на расстоянии h от вершины конуса. Как зависит от времени скорость движения уровня жидкости?

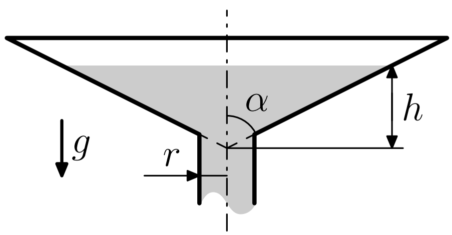

Рис. 1.4.7. К задаче №1.4.6

1.4.7 Нефть, равномерно вытекающая из танкера, потерпевшего аварию, через время t_0 растеклась по воде вокруг него в радиусе R. Толщина слоя нефти h. Какой объём нефти в единицу времени вытекает из танкера? С какой скоростью увеличивается радиус пятна через время t после аварии?

1.4.8 Через 2 с после толчка скорость лодки уменьшилась в два раза. Во сколько раз уменьшится скорость лодки через 10 с после толчка, если торможении лодки пропорционально её скорости?

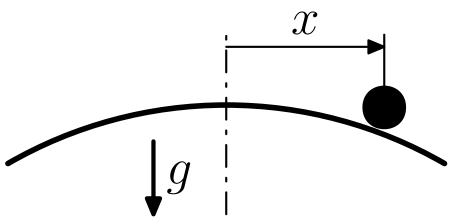

Рис. 1.4.8. К задаче №1.4.10

1.4.9 Скользящая с постоянной скоростью шайба попадает на вязкую дорожку ширины h, на которой ускорение шайбы отрицательно и линейно зависит от скорости: $a = -\alpha v$. На сколько уменьшится скорость шайбы после дорожки?

◇ 1.4.10 а) Если шарик скатывается с горки (См. Рис. 1.4.8), то его ускорение пропорционально расстоянию x до вершины горки: $a = \alpha^2 x$. Докажите, пользуясь таблицей 1.4.1 на странице 18, что ускорение зависит от расстояния x до вершины горки, когда расстояние x следующим образом зависит от времени:

$$x = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

б) В задаче а) на вершине горки шарик имеет скорость v_0. На каком расстоянии от вершины будет находиться шарик и какую скорость он будет иметь спустя время t?

1.4.11 Колеблющееся вблизи равновесия тело за время 0.01 с сместилось на расстояние 0.5 см от положения равновесия до наибольшего, равного 1 см. Каков период колебания тела?

1.4.12 Тело совершает колебания вблизи равновесия с частотой ω. В момент времени t_0 расстояние тела до положения равновесия равно x_0, а скорость v_0. Докажите, что зависимость расстояния до положения равновесия от времени t можно представить в виде

$$x = x_0 \cos\omega(t - t_0) + (v_0/\omega)\sin\omega(t - t_0).$$

1.4.13 Зависимость скорости центра меча при ударе его о стенку — полупериод косинусоиды: $v = v_0 \cos(\omega t,\ 0 < t < \pi/\omega$, если время отсчитывается от начала контакта мяча со стенкой, Пользуясь таблицей 1.4.1

на странице 18, определите путь, пройденный мячом в направлении к стенке, во время контакта с нею.

1.4.14 Горизонтальная мембрана совершает гармонические колебания по вертикали с частотой ω и амплитудой A. На мембране лежит грузик. При каких амплитудах A он будет колебаться вместе с мембраной, а при каких начнёт подскакивать? Ускорение свободного падения равно g.

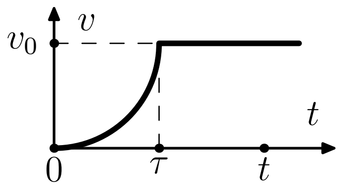

Рис. 1.4.9. К №1.4.15 а

◇ 1.4.15 а) Зависимость скорости тела от времени изображена на Рис. 1.4.9. Кривая линия на этом рисунке — четверть окружности. Начиная с момента времени τ, тело движется с постоянной скоростью v_0. Определите путь, пройденный телом за время t, если $t > \tau$.

б) Зависимость ускорения тела от времени изображена на Рис. 1.4.10. Кривая линия на графике состоит из двух четвертей окружности. Начиная с момента времени τ, тело движется с постоянным ускорением a_0. Определите скорость тела в момент времени t, если $t > \tau$.

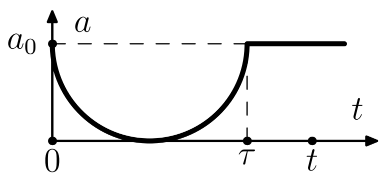

Рис. 1.4.10. К №1.4.15 б

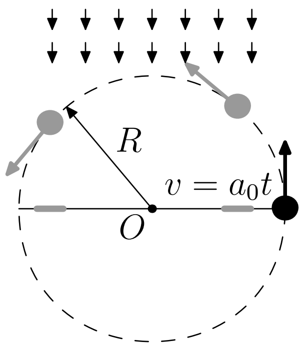

Рис. 1.4.11. К №1.4.18

1.4.16 Мотоциклист, движущийся со скоростью 72 $\frac{\text{км}}{\text{час}}$, на повороте радиуса 200 м тормозит и через 20 с останавливается. Скорость на повороте вплоть до остановки мотоциклиста уменьшалась линейно от времени. Чему равно нормальное и полное ускорение в начале поворота? Покажите это ускорение на рисунке.

1.4.17 а) Тело движется по окружности радиуса R со скоростью, которая линейно зависит от времени: $v = a_0 t$. Как зависит от времени полное ускорение тела?

б) Решите задачу а) в случае, если скорость квадратично зависит от времени: $v = \alpha t^2$.

◇ 1.4.18 По окружности радиуса R движется тело (См. Рис. 1.4.11), скорость которого пропорциональна времени $v = a_0 t$. В нулевой момент времени тело находилось на оси справа от центра окружности. Тело освещается светом, падающим перпендикулярно к оси x. Чему равна скорость и ускорение тени тела на ось x в момент времени t?

1.4.19 Частица движется по спирали радиуса R и с шагом h. Чему равно ускорение частицы, если она движется по спирали с постоянной по величине скоростью v_0? если её скорость линейно увеличивается: $v = a_0 t$.

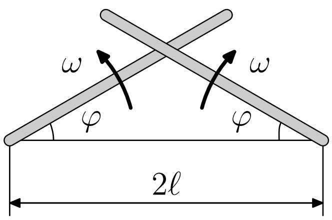

Рис. 1.4.12. К №1.4.20

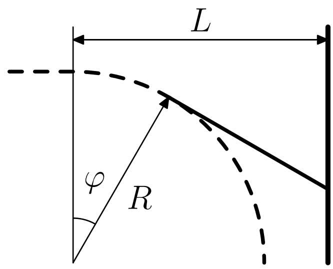

Рис. 1.4.13. К №1.4.21

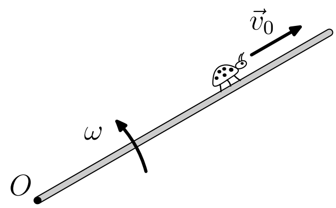

Рис. 1.4.14. К №1.4.22

◇1.4.20 Определить скорость линии пересечения двух лучей прожекторов (См. Рис. 1.4.12), которые вращаются в противоположных направлениях с угловой скоростью ω в момент, когда угол к горизонту обоих прожекторов равен φ. Расстояние между прожекторами равно 2ℓ.

◇1.4.21 Автомобиль с включёнными фарами движется со скоростью перпендикулярно стене (См. Рис. 1.4.13). На расстоянии L от стены он делает поворот радиуса R. Как зависит скорость световых пятен от лучей фар от угла поворота автомобиля? от времени движения на повороте? Скорость автомобиля постоянна и равна v.

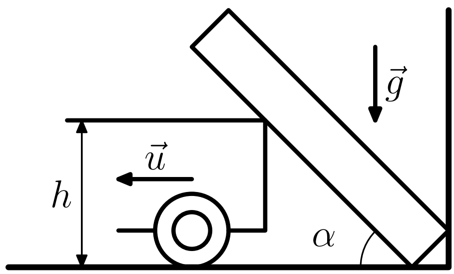

Рис. 1.4.15. К задаче №1.4.23

◇1.4.22 По палочке, которая вращается вокруг точки O так, как показано на Рис. 1.4.14, ползёт жук. Угловая скорость палочки ω. Жук удаляется от центра O со скоростью v_0. Определите скорость и ускорение жука на расстоянии ℓ от точки O.

◇ 1.4.23 Бревно, упираясь нижним концом в угол между стенкой и землёй, качается дна грузовика на высоте h от земли (См. Рис. 1.4.15). Длина бревна ℓ. Определите скорость и ускорение верхнего конца бревна в зависимости от угла α между ними и горизонталью, если грузовик отъезжает от стены со скоростью u.

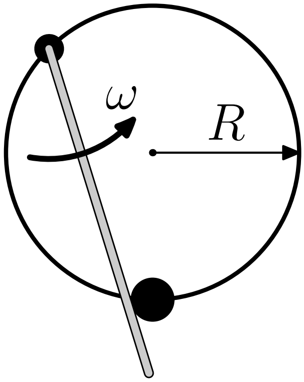

Рис. 1.4.16. К №1.4.24

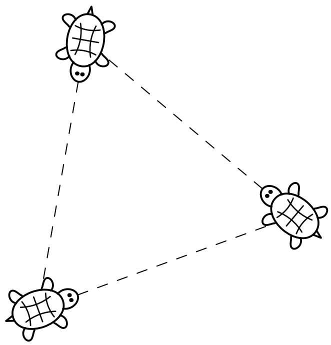

Рис. 1.4.17. К №1.4.27 б

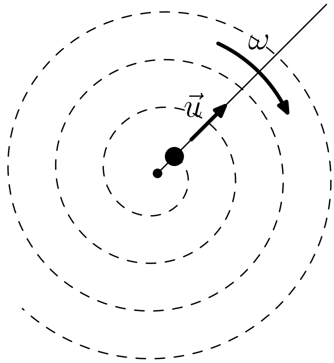

Рис. 1.4.18. К №1.4.28

◇ 1.4.24 Бусинка может двигаться по кольцу радиуса R, подталкиваемая спицей, которая равномерно вращается с угловой скоростью $omega$ в плоскости кольца (См. Рис. 1.4.16). Ось вращения спицы находится на кольце. Определите максимальное ускорение бусинки.

1.4.25 Скорость протяжки магнитофонной плёнки v_0. Начальный радиус бобины (с плёнкой) R, а конечный (без плёнки) r. Толщина плёнки h, $h \ll r$. Как зависит от времени радиус бобины? С какой скоростью он уменьшается?

1.4.26 За лисой, бегущей прямолинейно с постоянной скоростью v, гонится собака со скоростью u, которая всегда направлена на лису. В момент, когда векторы скоростей собаки и лисы перпендикулярны, расстояние между ними ℓ. С каким ускорением двигалась в этот время собака?

◇ 1.4.27 а) Четыре черепахи находятся в нулевой момент времени в вершинах квадрата со стороной ℓ. Они двигаются с постоянной по величине скоростью v. Каждая черепаха движется по направлению к своей соседке по часовой стрелки. С каким ускорением двигаются черепахи в нулевой момент времени? в момент времени t?

б) Три черепахи находятся в нулевой момент времени в вершинах правильного треугольника со стороной ell (См. Рис. 1.4.17). Они двигаются с постоянной скоростью v, каждая по направлению к своей соседке. Их движение происходит по часовой стрелки. Где встретятся черепахи и в какой момент времени? с каким ускорением двигались черепахи в нулевой момент времени? В момент времени t?

$\diamondsuit$ 1.4.28 По палочке, которая вращается вокруг своего конца с угловой скоростью ω, движется бусинка, удаляясь от центра со скоростью u (См. Рис. 1.4.18). Как зависит радиус кривизны траектории бусинки от расстояния до центра вращения?

1.5 Кинематика твёрдого тела

При поступательном движении твёрдого тела скорости всех его точек одинаковы (Рис. 1.5.1). При вращательном движении скорость любой точки твёрдого тела перпендикулярна радиусу $\vec{r}$, который соединяет эту точку с осью вращения O (Рис. 1.5.2). Величина скорости при вра-

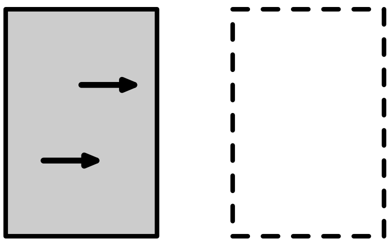

Рис. 1.5.1.

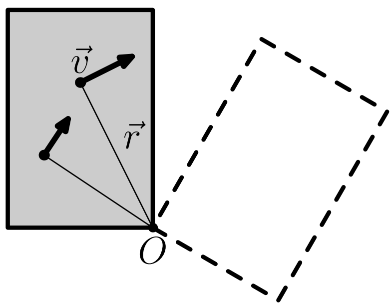

Рис. 1.5.2.

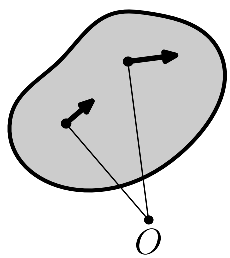

Рис. 1.5.3.

щательном движении пропорциональна r:

$$v = \omega r, \tag{1.5.1}$$

где ω — угловая скорость тела. В течении малого промежутка времени dt любое движение твёрдого тела можно рассматривать как мгновенное вращение вокруг точки, которая в этот момент времени неподвижна. Эта точка называется мгновенной осью вращения (Рис. 1.5.3).

Движения твёрдого тела, имеющего ось симметрии, чаще всего рассматривается, как наложение вращательного движения вокруг оси симметрии и поступательного движения. Колесо радиуса R, изображённое на Рис. 1.5.4, катится по плоскости со скоростью v. В любой момент времени это движение можно представить как мгновенное вращение с угловой скоростью $\omega = v/R$ по часовой стрелки вокруг точки касания колеса с плоскостью. Но можно представить это движение как наложение поступательного движения колеса со скорость v и его вращения вокруг центра колеса с угловой скоростью $\omega = v/R$ по часовой стрелки.

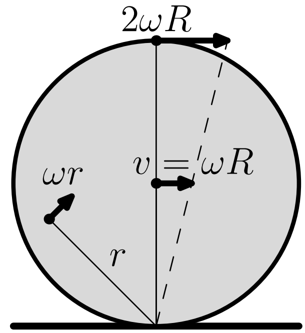

Рис. 1.5.4.

Пример 1.5.1 Определите скорость на ободе диска радиуса R в верхней части обода и на уровне центра диска, который катится по плоскости со скоростью v.

Решение: Движение диска должно быть таким, чтобы нижний участок диска был неподвижен, так как диск катится, а не скользит. Это происходит при наложении поступательного движения со скоростью v и такого вращения по часовой стрелке вокруг центра диска, когда скорости участков диска на ободе равны v (См. Рис. 1.5.5). Наложение этих двух движений даёт на ободе нулевую скорость внизу, скорость $2v$ наверху и скорость $\sqrt{2}v$ на уровне центра.

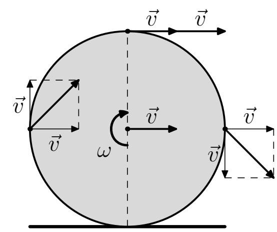

Рис. 1.5.5.

Это же движение можно рассматривать и как мгновенное вращение диска вокруг нижней точки с угловой скоростью $\omega = v/R$ по часовой стрелке, когда мгновенный центр вращения движется вместе с диском со скоростью v (См. Рис. 1.5.6). В этом случае верхний участок обода движется со скоростью $v_{\text{в}} = \omega \cdot 2R = 2v$, а участки обода на уровне центра — со скоростью $v_{\text{ц}} = \omega \cdot R\sqrt{2} = v\sqrt{2}$.

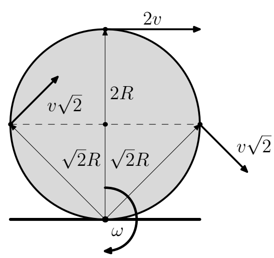

Рис. 1.5.6.

Задачи к § 1.5

1.5.1 Скорость на краю наждачного диска $v_к = 10\,\frac{м}{с}$. Радиус диска $R = 20$ см. Сколько оборотов он делает в секунду? Какова его угловая скорость? С какой скоростью движутся участки диска на расстоянии $r = 10$ см от оси вращения?

$\diamondsuit$ 1.5.2 Цилиндрический снаряд, летящий в направлении своей оси со скоростью v, одновременно вращается вокруг этой оси ч угловой скоростью ω (См. Рис. 1.5.7). Определите минимальную и максимальную скорость на поверхности снаряда, если радиус снаряда R.

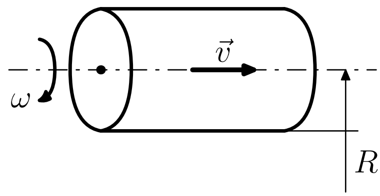

Рис. 1.5.7. К задаче №1.5.2

1.5.3 Определите скорость Земли, связанную с её вращением вокруг Солнца. Насколько меняется величина этой скорости из-за движения Земли вокруг своей оси? Расстояние до Солнца $1.5 \cdot 10^5$ км, радиус Земли $6.3 \cdot 10^3$ км.

1.5.4 Луна обращена к Земле одной стороной. Расстояние от Земли до Луны $3.8{\cdot}10^5$ км, радиус Луны $1.7{\cdot}10^3$ км. На сколько отличается скорость поверхности Луны наиболее близкой к Земле и наиболее удалённой от ней?

1.5.5 а) Автомобиль движется без проскальзывания колёс со скоростью v_0. Определите максимальную скорость на ободе колеса.

б) Чему равны скорости нижних и верхних участков гусеницы трактора, который движется со скоростью v_0? Как меняется скорость трактора, который движется со скоростью v_0? Как меняется скорость этих участков в зависимости от их расстояния до земли h, если радиус колеса трактора R?

1.5.6 Диск радиуса R катится по плоскости со скоростью v.

а) Определите скорости точек на ободе диска на уровне $\frac{1}{2}R$ и $\frac{3}{2}R$ от поверхности.

б) Определите минимальную и максимальную скорость точки, которая находится на расстоянии r от центра диска, $r < R$.

в) Чему равно ускорение точек на ободе диска? на расстоянии r от центра диска (r<R)?

1.5.7 Как зависит ускорение точек на ободе колеса радиуса R в верхней части обода и на уровне центра о его скорости, если колесо катится с ускорением a_0?

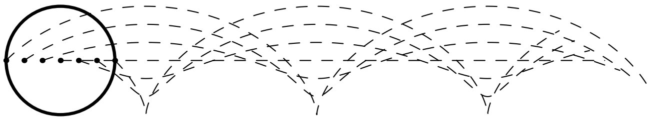

Рис. 1.5.8. К задаче №1.5.8

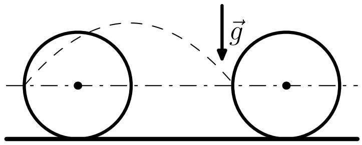

Рис. 1.5.9. К задаче №1.5.9

◇ 1.5.8 а) На каком расстоянии находятся соседние вершины траектории точки обода диска радиуса R, который катится по плоскости? Как зависит радиус кривизны траектории от расстояния до плоскости?

Эта траектория называется цикло́идой от греческого $\varkappa\upsilon\varkappa\lambda o\varepsilon\iota\delta\zeta$ — кругообразный круглый. Пример циклоиды представлен на Рис. 1.5.8.

б) Решите задачу а) для траектории точки, которая находится на расстоянии r от центра диска, $r < R$.

◇ 1.5.9 Колесо радиуса R катится по горизонтальной плоскости без проскальзывания (См. Рис. 1.5.9. От задней точки колеса, находящейся на уровне оси отрывается комочек грязи. С какой скоростью движется колесо, если комочек опустился на то же место с которого он оторвался?

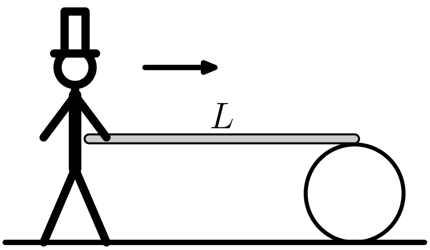

Рис. 1.5.10. К №1.5.10

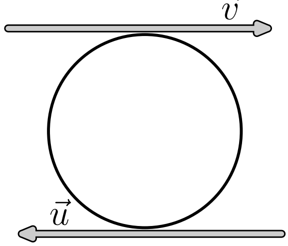

Рис. 1.5.11. К №1.5.11

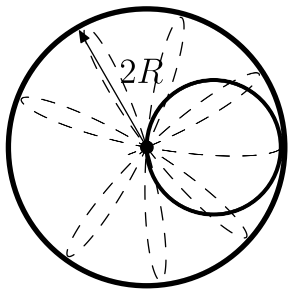

Рис. 1.5.12. К №1.5.12

◇ 1.5.10 Человек держит один край длинной доски. Второй её край лежит на круглой бочке (См. Рис. 1.5.10). Человек, толкая доску, идёт к бочке. Какое расстояние он пройдёт, прежде чем приблизится к ней?

Доска параллельна полу. Проскальзывание меду доской и бочкой, бочкой и полом отсутствуют. Длина доски L.

$\diamondsuit$ 1.5.11 а) Шарик радиуса R находится между двумя параллельными плоскостями (См. Рис. 1.5.11), одна из которых движется вправо со скорость v, а вторая — влево со скоростью u. Проскальзывания между плоскостями и шариком нет.С какой скоростью движется центр шарика? С какой угловой скоростью вращается шарик относительно оси, проходящей через его центр?

б) Решите задачу а) в случае, если плоскости движутся вправо со скоростями v и u.

$\diamondsuit$ 1.5.12 По внутренней поверхности закреплённого цилиндра радиуса $2R$ катится без проскальзывания колесо радиуса R (См. Рис. 1.5.12). Как зависит от времени скорость и ускорение точки обода? За начало отсчёта времени возьмём момент, когда точка соприкасается с поверхностью цилиндра.

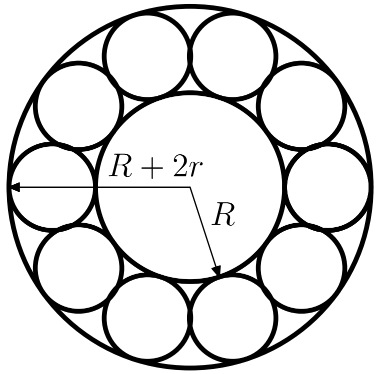

Рис. 1.5.13. К задаче №1.5.13

$\diamondsuit$ 1.5.13 Внутренний радиус подшипника R, внешний — (R+$2r$ (См. Рис. 1.5.13. Определите скорость шариков, когда внешняя часть подшипника, которая опирается на шарики двигается с угловой скоростью ω, а внутренняя часть неподвижна. Проскальзывания шариков с поверхностями, с которыми они имеют контакт, нет.

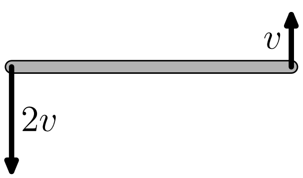

Рис. 1.5.14. К №1.5.14

$\diamondsuit$ 1.5.14 Скорости концов палки длины ℓ, равны v и $2v$, перпендикулярны палке и направлены в разные стороны (См. Рис. 1.5.14). На каком расстоянии от ближайшего находится неподвижный участок палки?

$\diamondsuit$ 1.5.15 Стержень длины ℓ упирается своими концами в стороны прямого угла (См. Рис 1.5.15. Нижний конец стержня движется со скоростью v. С какой скоростью движется верхний конец стержня и его центр, когда стержень образует угол α с нижней стороной угла?

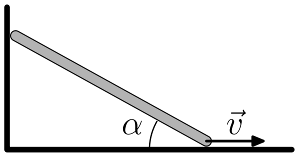

Рис. 1.5.15. К №1.5.15

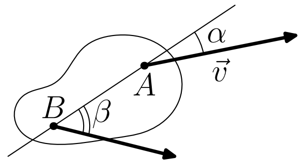

Рис. 1.5.16. К №1.5.16

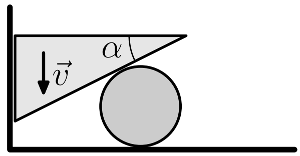

Рис. 1.5.17. К №1.5.17

◇ 1.5.16 Скорость точки A твёрдого тела образует угол α с прямой AB, а точки B — угол β (См. Рис. 1.5.16). Скорость точки A равна v. Чему равна скорость точки B, если обе скорости лежат в плоскости чертежа? Чему равна скорость в центре прямой AB?

◇ 1.5.17 Клин с углом α, движущийся со скоростью v по вертикальной стенке, заставляет по горизонтальной плоскости цилиндр радиуса R (См. Рис. 1.5.17). С какой скоростью движется цилиндр? Чему равна угловая скорость цилиндра относительно его центра, если нет проскальзывания между цилиндром и горизонтальной плоскостью? если нет проскальзывания между цилиндром и клином?

1.6 Преобразование Галилея

Когда скорости тел много меньше скорости света $c = 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, из одного состояния движения можно получить другое, если скоростям всех тел в первом состоянии постоянную скорость $\vec{v}$.

Пример 1.6.1 Вы находитесь на пристани, от которой со скоростью $\vec{v}$ отплывает пароход. Данное событие схематично изображено на Рис. 1.6.1. С какой скорость. удаляются от Вас предметы на пароходе, выделенные на рисунке кружками? Скорости этих предметов относительно парохода указаны на рисунке.

Решение: На палубе относительно пристани все предметы приобретают дополнительную скорость $\vec{v}$ (см. Рис. 1.6.1). Пассажир имеет скорость $\frac{1}{2}v$. Кот, бегущий по палубе, движется со скоростью $2v$, а конец стрелки часов — со скоростью $\sqrt{v^2 + u^2}$.

Пример 1.6.2 При нормальном упругом ударе тела о неподвижную стенку его скорость $\vec{v}$ меняется лишь по направлению. Определите, на

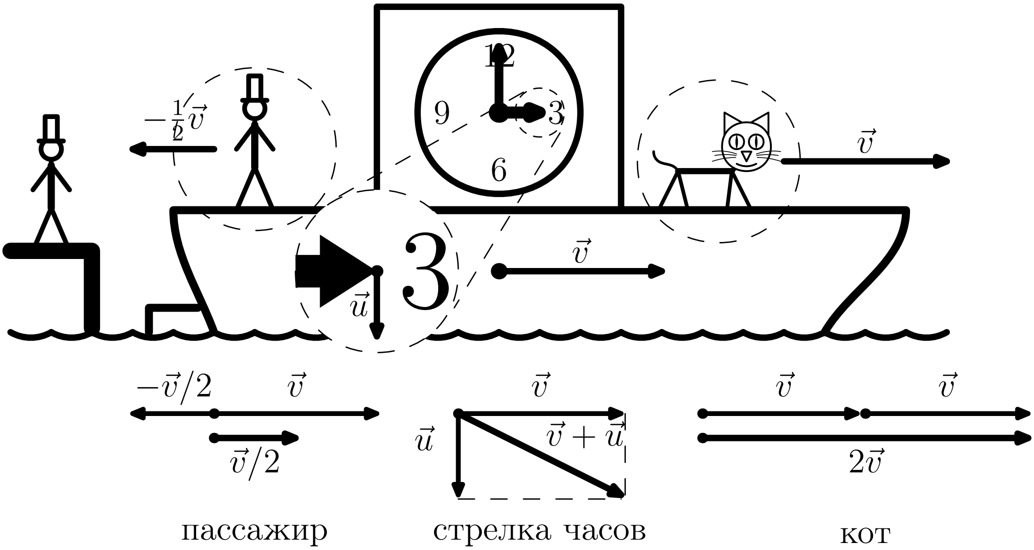

Рис. 1.6.1. Пристань и пароход

какую величину изменится после удара скорость этого тела, если стенка движется со скоростью $-\vec{u}$ навстречу телу (см. Рис. 1.6.2 (а)).

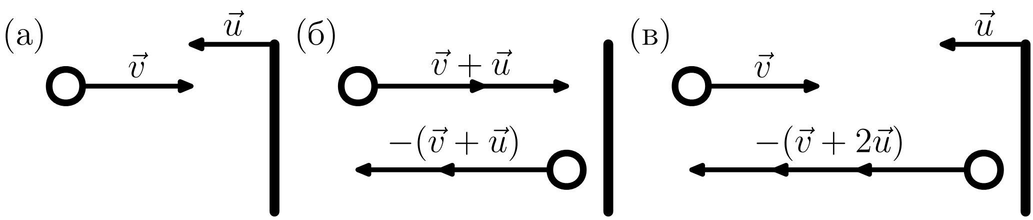

Рис. 1.6.2. Упругий удар о движущуюся стенку

Решение: На Рис. 1.6.2 (б) изображено отражение шарика, имеющего скорость $\vec{v}+\vec{u}$, от неподвижной стенки, (в) — состояние движения, полученное из первого состояния, когда скоростям всех тел прибавить скорость $(-\vec{u})$. В новом состоянии стенка движется со скоростью $-\vec{u}$ навстречу шарику, летящему на стенку со скоростью $\vec{v}$. Отражённый шарик в этом состоянии летит от стенки с абсолютной скоростью $v+2u$. Значит шарик при отражении от стенки увеличил свою абсолютную скорость на $2u$.

Пример 1.6.3 Две одинаковые космические станции движутся навстречу друг другу со скоростями v и $3v$. Определите скорости станции после их стыковки.

Решение: Две одинаковые станции, летящие на встречу друг другу с одинаковыми скоростями $2v$, после стыковки останавливаются. Ситуация абсолютно симметричная. Если ко всем скоростям добавить скорость v в направлении движения какой-либо из станции, то мы получим картину движения, приведённую в условии задачи. Из описанного выше следует, что после стыковки станции будут двигаться со скоростью v.

Пример 1.6.4 На Рис. 1.6.3 изображены скорости шести зайцев, выпущенных старым Мазаем в системе координат, в которой Мазай неподвижен. Нарисуйте вектор скорости Мазая и векторы скоростей остальных зайцев в системе координат, в которой один из зайцев неподвижен.

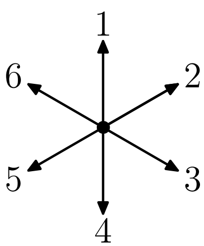

Рис. 1.6.3.

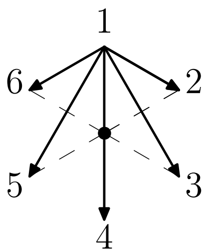

Рис. 1.6.4.

Решение: Согласно принципу относительности Галилея, в системе координат, в которой один из зайцев, например, заяц №1, неподвижен, мир выглядит таким же, как и в неподвижной системе координат. В этой системе отсчёта ко всем скоростям зайцев и Мазая нужно прибавить скорость, которая равна по величине скорости зайца №1, но направлена противоположно. Эта ситуация представлена на Рис. 1.6.4.

Задачи к § 1.6

$\diamondsuit$ 1.6.1 Пароход отчаливает от пристани со скоростью $\vec{v}$. С какой скоростью удаляются от пристани объекты, выделенные на Рис. 1.6.5. Скорости этих объектов указаны на рисунке.

$\diamondsuit$ 1.6.2 а) При нормальном упругом ударе шарика о неподвижную поверхность его скорость меняет направление, но величина скорости не меняется. Определите, во сколько раз изменится скорость шарика при нормальном упругом ударе о стенку, которая движется со скоростью в три раза меньшей, чем скорость шарика, в том же направлении, что и шарик (См. Рис. 1.6.6).

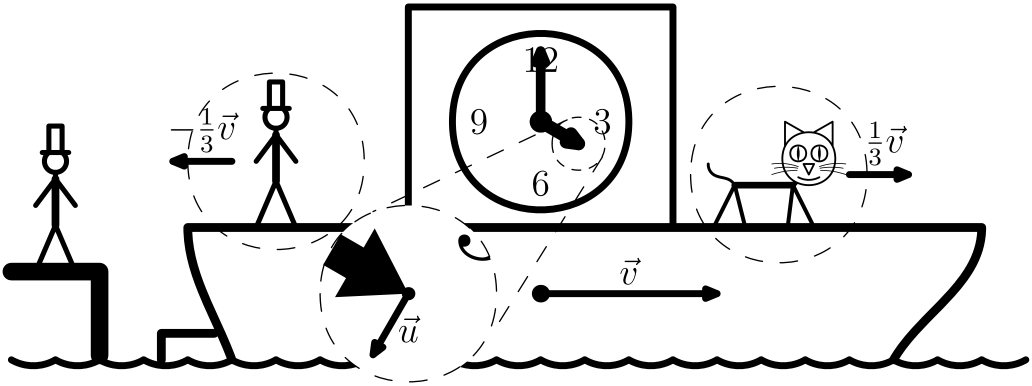

Рис. 1.6.5. К задаче №1.6.1

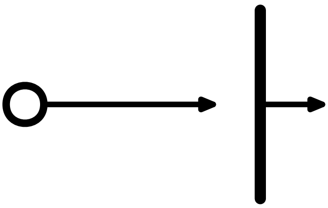

Рис. 1.6.6. К №1.6.2 (а)

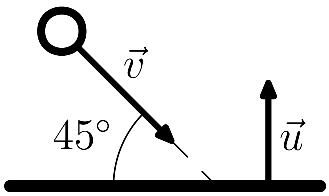

Рис. 1.6.7. К №1.6.2 (б)

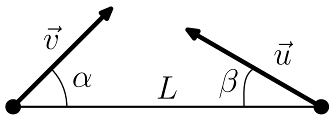

Рис. 1.6.8. К №1.6.4

б) Тело движется под углом 45° к плоскости стенки, как это изображено на Рис. 1.6.7. Стенка движется со скоростью u, которая перпендикулярна плоскости стенки. Скорость тела до удара о стенку v. Определите величину скорости тела после упругого удара о стенку.

в) Велосипедист едет со скоростью 20 $\frac{\text{км}}{\text{час}}$. На встречу ему едет «КАМАЗ» со скоростью 40 $\frac{\text{км}}{\text{час}}$. Считая соударение велосипедиста и «КАМАЗа» абсолютно упругим и принимая, что масса велосипедиста много меньше массы «КАМАЗа», найти скорость велосипедиста после аварии.

1.6.3 Две одинаковые космические станции летят навстречу друг другу со скоростями v и $5v$. Определите скорости этих двух станций после их стыковки.

◇1.6.4 Крейсер движется со скоростью v, а миноносец со скоростью u. Когда корабли были на расстоянии L, их скорости образовывали с линией, соединяющей корабли, углы α и β, соответственно. На каком минимальном расстоянии пройдут корабли друг от друга?

◇1.6.5 На Рис. 1.6.9 изображены скорости четырёх зайцев, выпущен-

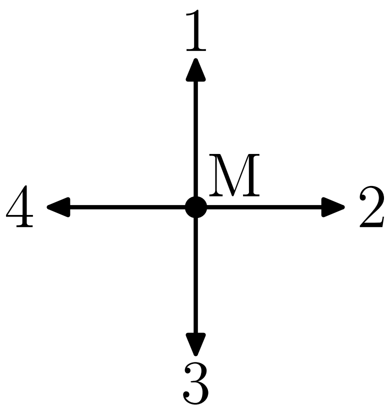

Рис. 1.6.9. К задаче №1.6.5

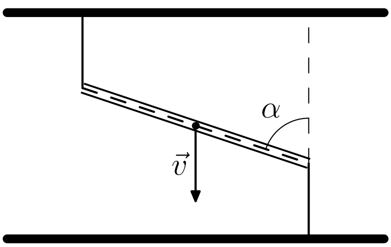

Рис. 1.6.10. К задаче №1.6.7

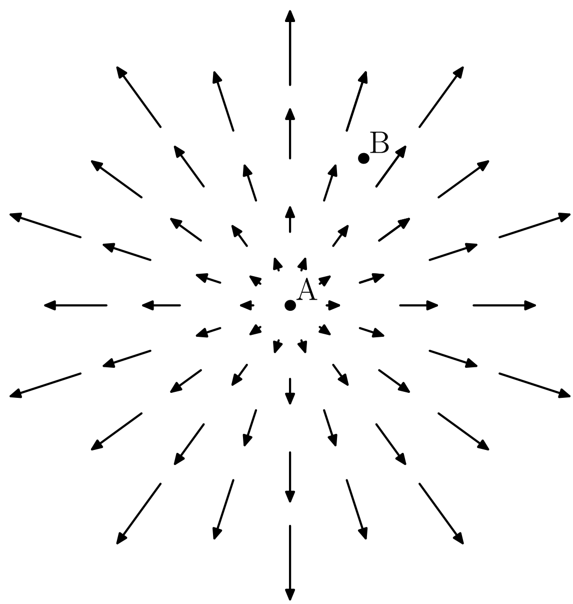

Рис. 1.6.11. К задаче №1.6.6

ных Мазаем. Система координат выбрана такой, в которой Мазай неподвижен. Нарисуйте векторы скоростей остальных зайцев и Мазая в системе координат, в которой один из зайцев неподвижен.

$\diamondsuit$ 1.6.6 Одна из частиц пылевого облака (частица A) покоится, а все остальные разлетаются от неё в различные стороны со скоростями пропорциональными расстоянию от частицы A (см. Рис. 1.6.11). Какую картину движения обнаружит наблюдатель, движущийся вместе с частицей B?

$\diamondsuit$ 1.6.7 Нить, привязанная концами к потолку и полу, проходит через тонкую прямую трубу, как это показано на Рис. 1.6.10. В некоторый момент времени труба составляет угол α с вертикалью и движется со скоростью $\vec{v}$, которая направлена вниз. Участки нити вне трубы вертикальны. С какой скоростью движется в этот момент времени нить в трубе?

$\diamondsuit$ 1.6.8 а) В U-образной тонкой трубе скользит упругая нить (см. Рис. 1.6.12).

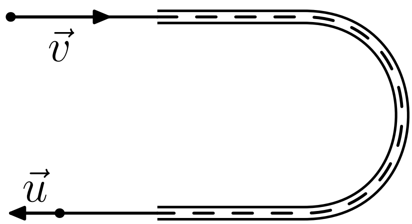

Рис. 1.6.12. К задаче №1.6.8 а)

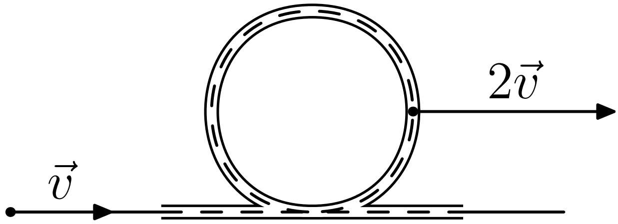

Рис. 1.6.13. К задаче №1.6.8 б)

Скорость входящего в трубу конца равна v, выходящего — u. С какой скоростью движется труба?

б) Тонкая труба изогнута в виде почти замкнутой окружности (см. Рис. 1.6.13). В этой трубе скользит упругая нить. Скорость участка нити, входящего в трубу v, скорость трубы $2v$. Обе скорости одинаково направлены. С какой максимальной скоростью движется какой-либо участок нити в трубе?

1.6.9 а) В поток космической пыли влетает шар радиуса R. Скорость пылинок v, скорость шара перпендикулярна скорости пылинок и равна u. Количество пылинок в единице объёма n, время пребывания шара в потоке T. Определите число пылинок, попавших на поверхность шара.

б) Решить задачу а), если в поток влетел цилиндр радиуса R и длины L. Ось цилиндра ориентирована вдоль его скорости. Как нужно изменить ориентацию цилиндра, чтобы количество пылинок, осевших на его поверхности, было оптимальным?

1.6.10 С угла квадратного плота спрыгнул пёс и плывёт вокруг плота, двигаясь вдоль его сторон. Нарисуйте траекторию движения пса относительно берега, если скорость пса относительно воды составляет половину скорости течения.

1.6.11 При порывах ветра капли дождя, ранее падавшие из-за ветра под углом α к горизонту, падают под более острым углом β. Во сколько раз увеличивается скорость ветра при порывах?

1.6.12 Скорость самолёта относительно воздуха u. Во сколько раз изменится длительность рейса самолёта туда и обратно, проходящего по прямой, если в течении всего полёта под углом α к траектории дует ветер со скоростью v.

1.6.13 а) Дым из выхлопной трубы автомобиля, который движется со скоростью v по просёлочной дороге, стелется под углом α к ней, а дым от костра — под углом β. Определите скорость ветра.

б) Два корабля идут встречным курсом с одинаковой скоростью v. Дым от одного корабля остаётся под углом α, а от другого — под углом β к их общей трассе. Определите скорость ветра над морем.

в) Решите задачу б) в случае, если скорость первого корабля v_1, а второго v_2.

1.6.14 На быстрине скорость течения реки 10 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$, а на разливе реки — 5 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Расстояние между берегами на быстрине 40 м, на разливе 100 м. Пловец плывёт прямо на берег. Где отнесёт его больше, — на равнине или на быстрине?

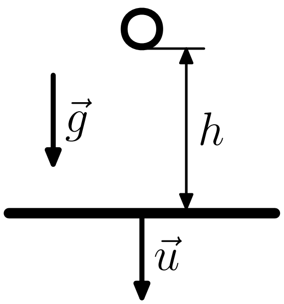

Рис. 1.6.14. К №1.6.15

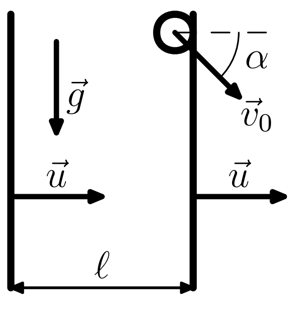

Рис. 1.6.15. К №1.6.16

$\diamondsuit$ 1.6.15 Тело отпускают в поле тяжести на высоте h от горизонтально расположенной плиты, которая движется со скоростью v. определите время между последовательными ударами тела о плиту. Удары абсолютно упругие. Ускорение свободного падения g.

$\diamondsuit$ 1.6.16 Двигаясь в поле тяжести, тело влетает со скоростью $\vec{v}_0$ под углом α к горизонту в пространство между двумя вертикальными пластинами, которые движутся с постоянной скоростью $\vec{u}$, как показано на Рис. 1.6.15. Определите скорость тела, после n-го удара. Расстояние между стенками много больше размеров тела и равно ℓ. Удары абсолютно упругие. Ускорение свободного падения $\vec{g}$.

1.6.17 Ядра, движущиеся в пучке со скоростью u, распадаются на осколки. Экспериментатор измеряет скорости осколков, вылетающих в направлении, перпендикулярном пучку. Скорость осколков в этом направлении оказалась равной w. Нужно определить направлении в котором летят самые быстрые осколки и их скорость.

1.6.18 Ядро, летящее со скоростью u, распадается на два одинаковых осколка. Определите максимально возможный угол между скоростью одного из осколков и первоначальной скоростью ядра, если при распаде покоящегося ядра осколки разлетаются ос скоростью v и $v < u$.

1.6.19 Имеется пучок одинаковых ядер, движущихся параллельно со скоростью u. Ядра в пучке самопроизвольно делятся на два одинаковых осколка. Скорость осколков, движущихся в направлении пучка, в k раз больше скорости ядер. Найдите скорость осколков, движущихся в направлении, перпендикулярном пучку.

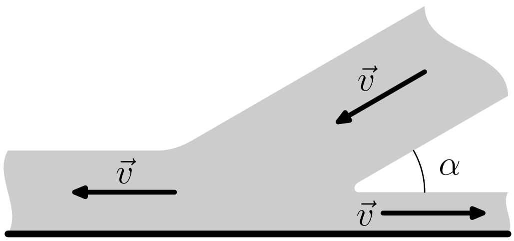

Рис. 1.6.16. К задаче №1.6.20 а)

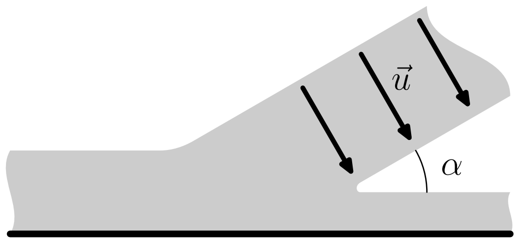

Рис. 1.6.17. К задаче №1.6.20 б)

$\diamondsuit$ 1.6.20 Скорость невязкой жидкости, падающей под углом α на жёсткую плоскость, вдали от места падения имеет одну и ту же величину, если скорость в падающей жидкости направлена вдоль струи, как на Рис. 1.6.16. Определить минимальную и максимальную скорость жидкости, если скорость падающей жидкости направлена поперёк струи, как на Рис. 1.6.17 и равна $\vec{u}$.

1.6.21 Две длинные и широкие пластины, расположенные под углом 2α друг к другу, движутся со скоростью u по нормали к своим поверхностям. Найдите скорость струй, возникающих при столкновении пластин, если движение материала пластин рассматривать как движение идеальной жидкости.

$\diamondsuit$ 1.6.22 Академик М.А.Лаврентьев рассказывал: «...В 1941 году немцы придумали кумулятивный противотанковый снаряд. На конусе снаряда — запал. При ударе он вызывает детонацию и воспламеняет весь снаряд. Снаряд пробивает броню (Рис. 1.6.18). В 1944 году такие снаряды попали в наши руки и руки союзников. Начался широкий эксперимент. При этом обнаружили много дополнительных эффектов и парадоксов. Стали выяснять — что же летит, что пробивает? Сперва думали, что этот снаряд бронепрожигающий, что броню пронзает струя горящего газа. Нет, оказалось, что летит металл, причём самым необъяснимым образом: перед плитой скорость около 8 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$, внутри плиты 4 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$, за плитой – снова 8 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$ (Рис. 1.6.19). Как это может быть? Ни механика, ни газовая динамика не могли дать ответа. А решение оказалось чрезвычайно простым! Даже математический аппарат уже был: за 15 лет до этого в гидродинамики уже была теория — теория жидких струй. И она целиком подошла к этой задаче.

Дело в том, что при давлении в тысячи атмосфер прочность металла уже не важна. И как это ни парадоксально — железо можно считать жидкостью. . . » Объясните это явление.

Кумулятивный снаряд

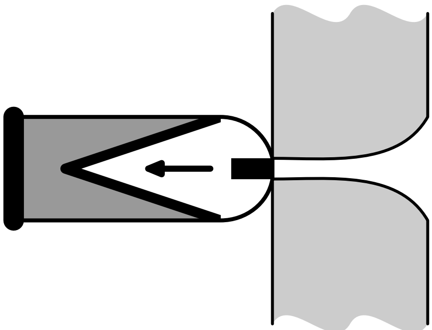

Рис. 1.6.18. К задаче №1.6.22

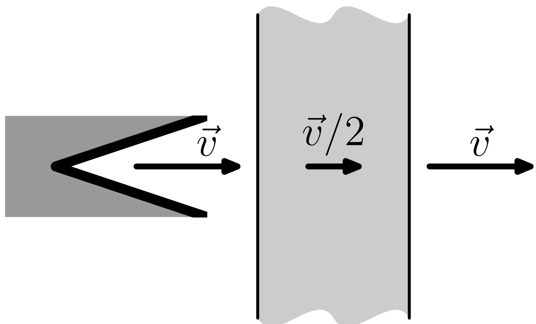

Рис. 1.6.19. К задаче №1.6.22

Глава 2

Динамика

Основной задачей динамики[1] является изучение движения материальных тел под действием приложенных к ним сил.

Динамику можно разбить на подразделы. Это разбиение условно, но позволит облегчить восприятие материала. К этим подразделам относятся:

- динамика материальной точки,
- динамика абсолютно твёрдого тела,
- динамика упругого твёрдого тела,
- динамика жидкости и газа.

Последний раздел традиционно разбивается на два и выносится за приделы стандартного курса динамики в силу своей важности.

Как и в случае кинематики «классические» уравнения динамики не являются истиной в последней инстанции. Движения тел со скоростями, близкими к скорости света рассматриваются в теории относительности, а движения микрочастиц — в квантовой механики. Для повседневного же использования законов Ньютона и законов сохранения энергии и импульса — основных законов динамики, как правило, достаточно.

[1] От греческого dýnamis — сила.

2.1 Законы Ньютона

Физик №1 Исаак Ньютон (1641–1727) обобщая экспериментальные данные пришёл к выводу, что ускорения, с которым тела двигаются, обусловлены влиянием на них других тел.

Если тело не взаимодействует с другими телами, то оно сохраняет или состояние покоя, или состояние прямолинейного равномерного движения. Это утверждение носит название *первого закона Ньютона.*

Системы отсчёта, относительно которых все тела, не взаимодействующие с другими телами, движутся прямолинейно и равномерно или, как частный случай такого движения, покоятся, называются *инерциальными.* В основном мы будем работать с инерциальными системами отсчёта.

В природе существует бесконечное множество различных взаимодействий. Количественно они определяются *силами.* Сила действующая на тело массы M равна произведению массы на ускорение тела:

$$\vec{F} = M\vec{a}. \tag{2.1.1}$$

Приведённая формула носит название *второго закона Ньютона.* Единица силы — 1 Н (Ньютон). Из уравнения (2.1.1) сила в 1 Н сообщает телу в 1 кг ускорение в 1 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

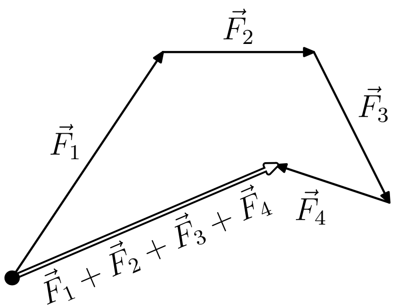

Рис. 2.1.1. Сложение сил

Силы, которые соответствуют основным типам физических взаимодействий[2], как правило определялись по ускорениям тел.

Если на тело действует несколько сил, то результирующая сила находится *векторным* сложением сил. На Рис. 2.1.1 действующие на тело силы изображены сплошными стрелками, а результирующая сила представлена стрелкой контурной.

Пример 2.1.1 Надо найти перегрузку[3] пассажира при взлёте самолёта, который равномерно набирает взлётную скорость в 60 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ на пути в 1 км.

[2] Гравитационное, электромагнитное, слабое и сильное.

[3] Если F — сила, действующая со стороны сидения, mg — сила притяжения пассажира к Земле, то перегрузкой называется величина F/mg.

Решение: Самолёт ускоряется равномерно, это означает, что его движение равноускоренное. Ускорение самолёта a определяется из соотношения

$$a = \frac{v^2}{2S} = \frac{60^2\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2}{2 \cdot 1000\,\text{м}} = 1.8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Так как пассажир, тоже двигается равноускоренно, в горизонтальной плоскости на него действует со стороны сидения в этом направлении сила $m\vec{a}$, а в вертикальном направлении сила $m\vec{g}$, как на Рис. 2.1.2. Поэтому результирующая сила $F = \sqrt{(mg)^2 + (ma)^2} = m\sqrt{g^2 + a^2}$, а перегрузка

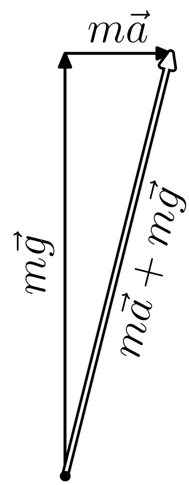

Рис. 2.1.2.

$$n = \frac{F}{mg} = \frac{m\sqrt{g^2 + a^2}}{mg} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{g^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{v^2}{2gS}\right)^2} \simeq 1.016$$

В механике довольно часто встречаются задачи, в которых нужно определить движение тела под действием силы.

Пример 2.1.2 На Рис. 2.1.3 нарисован график зависимости силы, действующей на тело массы 2 кг, от времени. В начальный момент тело покоилось. Чему равна скорость тела после действия силы?

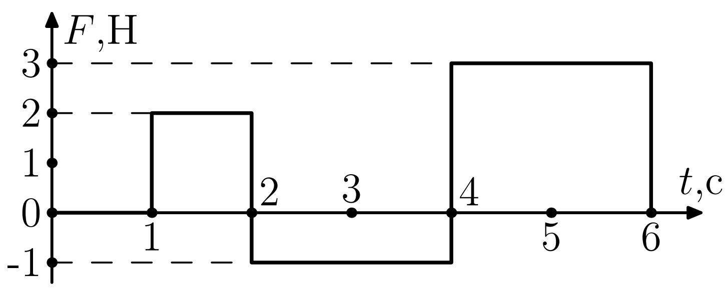

Рис. 2.1.3.

Решение: Ускорение тела в промежутке времени от 1 с до 2 с равно $a_1 = \frac{4\text{Н}}{2\,\text{кг}} = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Ускорение тела в промежутке времени от 2 с до 4 с равно $a_2 = -\frac{1\text{Н}}{2\,\text{кг}} = -\frac{1}{2}\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Ускорение тела в промежутке времени от

4 с до 6 с равно $a_3 = \frac{3\text{Н}}{2\,\text{кг}} = \frac{3}{2}\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. После первого промежутка времени скорость тела равна $2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 1\,\text{с} = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, после второго промежутка времени скорость уменьшилась на $\frac{1}{2}\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 2\,\text{с} = 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, а после третьего промежутка — увеличилась на $\frac{3}{2}\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 2\,\text{с} = 3\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Итого: конечная скорость равна $2\,\frac{\text{м}}{\text{с}} - 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}} + 3\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = 4\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задачи к § 2.1

2.1.1 При начальной скорости $72\,\frac{\text{км}}{\text{час}}$, тормозной путь автомобиля оказался равен 20 м. Определите перегрузку водителя при таком торможении.

2.1.2 Определите силу сопротивления воздуха, действующую не парашют, если последний опускается с постоянной скоростью. Масса парашютиста с парашютом 90 кг.

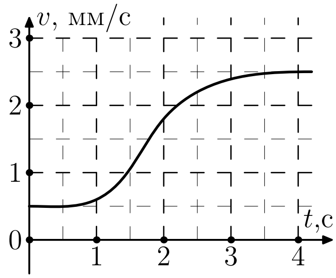

Рис. 2.1.4. К №2.1.3

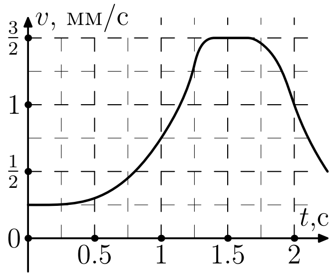

Рис. 2.1.5. К №2.1.3

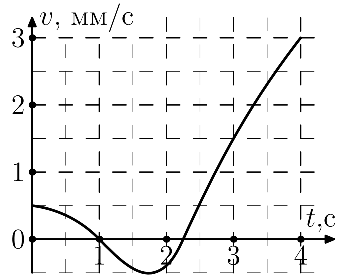

Рис. 2.1.6. К №2.1.3

◇ 2.1.3 Наблюдая за движением муравья, экспериментатор зарисовал графики зависимости скорости муравья на различных участках пути от времени. Графики представлены на Рис. 2.1.4– 2.1.6. Масса муравья 0.1 г. Нарисуйте графики силы, с которой муравей отталкивался от земли.

2.1.4 При упругом ударе о стенку скорость шарика меняет своё направление. Длительность удара шарика 10^{-2} с, скорость шарика $10\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Чему равна сила, действующая на шарик? Силу в процессе удара можно считать постоянной.

◇ 2.1.5 На Рис. 2.1.7 показан график зависимости высоты подъёма теннисного шарика, подпрыгивающего над упругой плитой, от времени. Попробуйте воспроизвести характер зависимости от времени скорости шарика и действующей на него силы.

2.1.6 Определите: а) силу, действующую на Луну со стороны Земли (расстояние до Луны 384000 км); б) силу, действующую со стороны Солнца на Землю (расстояние от Земли, до Солнца свет проходит за 8 мин, а скорость света равна 300 тыс. $\frac{\text{км}}{\text{с}}$). Масса Луны $7.3 \cdot 10^{22}$ кг, масса Земли $6 \cdot 10^{24}$ кг.

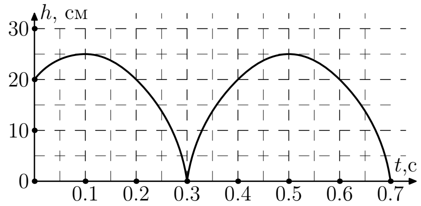

Рис. 2.1.7. К задаче №2.1.5

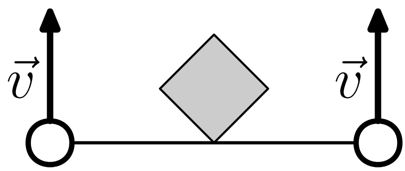

Рис. 2.1.8. К задаче №2.1.9

2.1.7 Космический корабль массы M, летящий со скоростью u обнаружил на расстоянии ℓ по курсу рой метеоритов, летящих ему навстречу со скоростью v. Какую «противотягу» должен развить корабль, чтобы «убежать» от метеоритов.

2.1.8 Ракета массы M, стартующая с палубы, ракетоносца движется под углом α к горизонту по прямой линии. Определите ускорение и силу тяги этой ракеты, если струя газа отбрасывается под углом 2α к горизонту.

$\diamondsuit$ 2.1.9 Два шарика массы M, связанные нитью длинны ℓ скользят по гладкой горизонтальной плоскости со скоростью v, как показано на Рис. 2.1.8. При их движении нить, связывающая шарики, налетает на столбик квадратного сечения $a \times a$ так, как это изображено на Рис. 2.1.8. Какая сила будет действовать на шарики через время $\frac{a}{2v}$ и через время $frac2av$ после контакта нити со столбиком? $\ell > 2a$.

2.1.10 Тело движется по окружности радиуса R со скоростью, которая линейно увеличивается во времени $v = kt$. Как зависит от времени сила, действующая на тело?

$\diamondsuit$ 2.1.11 Ракета массы M движется в горизонтальной плоскости со скоростью v по окружности радиуса R как изображено на Рис. 2.1.9. Определить силу тяги этой ракеты. Ускорение свободного падения $\vec{g}$.

$\diamondsuit$ 2.1.12 Мальчик на санках скатывается с горки и едет по горизонтальному участку льда. Зависимость силы, действующей на действующей на

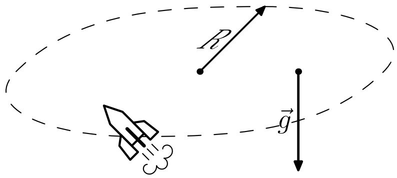

Рис. 2.1.9. К задаче №2.1.11

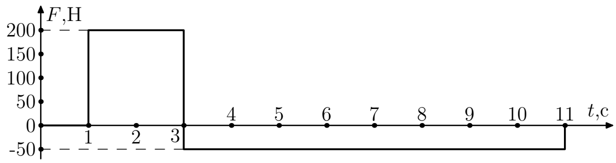

Рис. 2.1.10. К задаче №2.1.12

мальчика от времени представлена на Рис. 2.1.10. Построить график скорости от времени.

2.1.13 Представьте, что Вы сидите в пассажирском кресле самолёта, готового к взлёту. Попробуйте сконструировать прибор, который можно изготовить из подручных материалов за несколько минут, оставшихся до старта самолёта. Оцените точность измерения ускорения Вашим прибором.

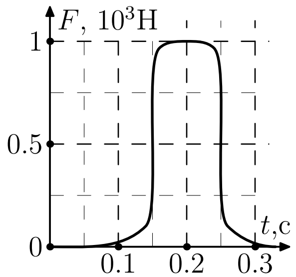

Рис. 2.1.11. К №2.1.14

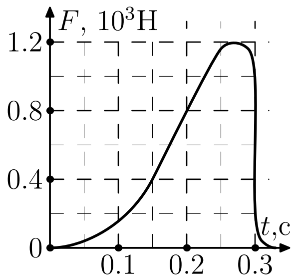

Рис. 2.1.12. К №2.1.14

◇ 2.1.14 Хоккеист сообщает шайбе ускорение, действуя на неё клюшкой с силой, зависимость которой от времени показана на Рис. 2.1.11 и Рис. 2.1.12. Масса шайбы 0.2 кг. Нарисуйте график скорости и пути, пройденного шайбой за время действия клюшки на шайбу. Оцените путь, пройденный шайбой за 0.3 с.

2.1.15 На первоначально неподвижное тело массы M с момента времени $t = 0$ действует постоянная сила F, которая каждые τ секунд меняет своё направление. Какое расстояние пройдёт тело за $2n\tau$ секунд, где n — целое число.

2.1.16 Стартуя с самолёта, летящего горизонтально со скоростью v на высоте H, реактивный снаряд массы M развивает тягу F под углом α к горизонту. При этом $F \sin\alpha < Mg$. Определите дальность полёта снаряда.

2.1.17 Ракета массы M стартует под углом α к горизонту со скоростью v. Реактивная струя образует угол $beta$ с направлением её взлёта. Ускорение свободного падения g. Какую тягу должна развить ракета, чтобы через время T выйти на горизонтальный участок полёта.

2.1.18 Сила, действующая на тело, линейно зависит от времени: $F = \alpha t$. Как меняется скорость тела под действием этой силы? Масса тела m.

2.2 Закон Гука, реакция опоры, натяжение нити.

Груз, положенный на пружинные весы, под действием силы тяжести движется вниз и сжимает пружину до тех пор, пока сила упругости пружины его не остановит. Груз, подвешенный на пружине динамометра, двигается вниз до тех пор, пока сила упругости растянутой пружины его не остановит. В обоих случаях при остановки груза сила тяжести равна по величине и противоположна по направлению силе упругости пружины, которая определяется формулой

$$F_{\text{у}} = -kx \tag{2.2.1}$$

где k — жёсткость пружины, x — её растяжение. Знак минус в этой формуле означает, что сила направлена в сторону обратную растяжению пружины. Поэтому на пружинных весах и на динамометре перемещение груза *пропорционально* его весу (силе тяжести). Формула (2.2.1) называется *законом Гука.*

Пример 2.2.1 Балка лежит на трёх пружинах одинаковой длины как это показано на Рис. 2.2.1. Определите силы, действующие на балку со стороны каждой пружины. Масса балки — M, жёсткость пружины в центре в два раза больше жёсткости крайних пружин.

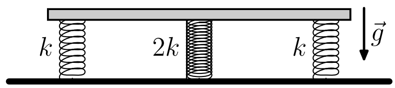

Рис. 2.2.1.

Решение: Все пружины сжимаются балкой одинаково, поэтому сила упругости каждой крайней пружины в два раза меньше силы упругости центральной пружины. Балка неподвижна, поэтому суммарная сила упругости, действующая со стороны пружин равна по величине и противоположна по направлению силе тяжести балки равной $M\vec{g}$. Следовательно $F + 2F + F = 4F = Mg$, где F — величина силы, действующей со стороны каждой крайней пружины, а $2F$ — со стороны центральной.

Значит каждая крайняя пружина действует на балку с силой $-\frac{1}{4}M\vec{g}$, а центральная — с силой $-\frac{1}{2}M\vec{g}$

Будучи положено на пол, любое тело под действием силы тяжести будет двигаться вниз до тех пор, пока из-за деформации пола не возникнет упругая сила, останавливающая тело. Эта сила перпендикулярная полу и направленная в сторону, обратную этой деформации, называется *реакцией опоры*. Тело тоже деформируется и давит на пол в противоположном направлении от реакции опоры с такой же силой. Время движения тела и величина такого рода деформаций настолько малы, что такое движение можно наблюдать лишь с помощью специальных приборов. *Но*, каждый из нас видит конечный результат такого движения — множество неподвижных предметов рядом с нами.

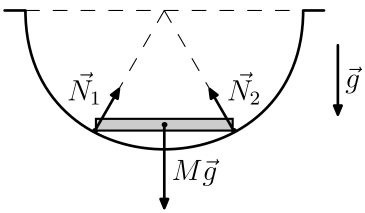

Рис. 2.2.2.

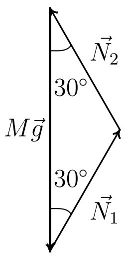

Рис. 2.2.3.

Пример 2.2.2 Определите реакцию опор у тонкой палочки массы M и длины R, лежащей горизонтально в лунке радиуса R как на Рис. 2.2.2.

Решение: На Рис. 2.2.3 изображены силы, действующие на палочку: $M\vec{g}$ — сила тяжести, $\vec{N_1}$ и $\vec{N_2}$ — реакции опор с левой и правой стороны палочки соответственно. Так как палочка неподвижна, то сумма всех этих сил равна нулю. Из-за симметрии следует, что $N_1 = N_2 = N$. Но тогда $2N\cos 30° = N\sqrt{3} = Mg$. Поэтому $N = Mg/\sqrt{3}$.

Если а нити подвесить тело массы M, то тело под действием силы тяжести будет двигаться вниз до тех пор, пока в результате растяжения нити не возникнет упругая сила, направленная в сторону обратную растяжению, останавливающая это тело. Эта сила, которую называют *натяжением*, существует на любом участке нити.

Пример 2.2.3 На брусок массы M, находящийся на абсолютно гладкой горизонтальной поверхности, действует сила $\vec{F}$ (См. Рис. 2.2.4). На бруске укреплён невесомый блок, через блок перекинута нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы m_1 и m_2. Определить ускорение бруска.

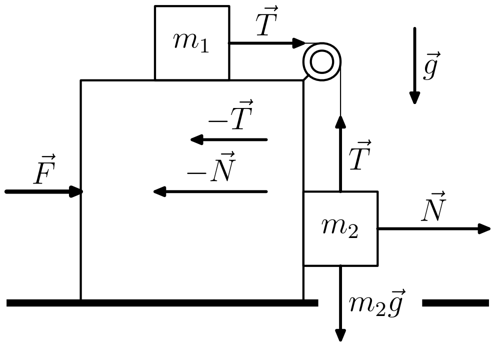

Рис. 2.2.4.

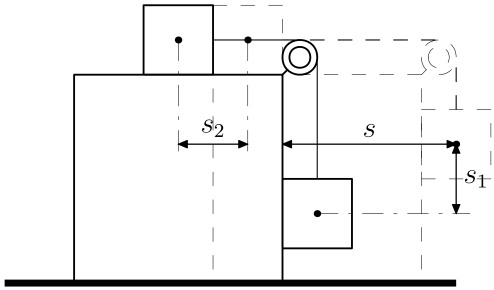

Рис. 2.2.5.

Решение: Рассмотрим тело массы m_1. На него вертикально вниз действует сила тяжести m_1g, вверх реакция бруска N'. Эти силы равны по величине и противоположны направлены, их результирующая равна нулю. В горизонтальном направлении на тело массы m_1 действует сила натяжении нити T. По второму закону Ньютона

$$T = m_1a_1. \tag{2.2.2}$$

На груз m_2 в вертикальном направлении действует сила тяжести и сила натяжения нити T. Сила натяжения нити везде *одна и та же*, так как нить невесомая. Под действием этих сил груза m_2 двигается с ускорением a_2 в вертикальном направлении

$$T - m_2g = m_2a_2. \tag{2.2.3}$$

В горизонтальном направлении на тело m_2 действует реакция бруска. Она сообщает телу горизонтальное ускорение a_3:

$$N = m_2a_3. \tag{2.2.4}$$

Под действием суммы сил $F - T - N$ брусок двигается с ускорением a:

$$Ma = F - T - N \tag{2.2.5}$$

Итого мы получили 4 уравнения и 6 неизвестных. Для решения задачи не хватает ещё двух уравнений. Эти уравнения можно получить из кинематических условий задачи:

- Брусок M и груз m_2 в горизонтальном направлении двигаются вместе, а это значит, что горизонтальное ускорение груза будет равно ускорению бруска, т.е.:
$$a_3 = a. \tag{2.2.6}$$

- Нерастяжимость нити накладывает условие на ускорения всех тел. Из Рис. 2.2.5 видно, что $s_2 = s - s_1$, где s_2 и s_1 — пути, проходимые телами m_1 и m_2 за одинаковое время по горизонтали и вертикали соответственно, а s — путь, пройденный бруском. Ускорения постоянны во времени, следовательно, соотношение для путей можно заменить на соотношения для ускорений:
$$a_2 = a - a_1 \tag{2.2.7}$$

Решив систему уравнений (2.2.2–2.2.7) получим, что
$$a = \frac{F(m_1 + m_2) - m_1 m_2 g}{m_1 m_2 + (M + m_2)(m_1 + m_2)}.$$

Глава 3

Математика

Основываясь на своем опыте общения со школой[1] я сформулирую два утверждения:

- математика, которую изучают в школе, как правило, не достаточна для изучения физики,

- физику в школе не изучают (это следствие предыдущего пункта).

Признаюсь, что я немного утрирую ситуацию, сами по себе, учебники по физике очень даже неплохие, на уроках рассказывают о великих открытиях и даже дают решать задачи. Есть одно но: практически все школьные задачи, это задачи на подстановку формулы. Вы выучили формулу и тут же в эту формулу следует подставить числа и получить новую цифру в качестве ответа, при этом совершенно выпускается физический смысл задачи. Формулы не выводятся, а даются, так как школьники не владеют адекватным математическим аппаратом.

Конечно 99.99% жителей планеты Земля совершенно замечательно могут прожить без этих знаний, но тот 0.01%, который связал или планирует связать свою жизнь с какой-либо наукой рано или поздно обнаруживает, что школьных знаний ему не достаточно. Невозможно заниматься химией или биологией не зная физики[2]. Занятие физикой невозможно без овладения определёнными математическими приёмами.

[1] В качестве ученика я провёл в школе 10 лет — так что я знаю, что говорю.

[2] Л.Д. Ландау приписывают фразу: «Всё научного в химии это физика, остальное — кухня»

Можно, конечно, встать в позу и сказать: А зачем изучать всем эти странные вещи ради какого-то 0.01%. Ответ на этот вопрос существует только один: «Всё что вы имеете сейчас, всё что на вас надето и обуто, всё на чём вы ездите возникло благодаря именно этому 0.01%». Чуть больше 100 лет назад электричество было фундаментальной наукой и занимался этой наукой тот же 0.01%. Каждый новый человек, который *может* заниматься физикой воистину бесценен и нельзя упускать никого. Если ты что-то понимаешь, то ты *обязан* это делать, потому что иначе *нельзя*.

В этом тексте вводятся некоторые понятия и показаны приёмы, которые сильно облегчают понимание физики. Помните, что понятия «интегрирование», «дифференцирование» и др. вводятся для облегчения понимания и упрощения анализа физической картины мира, а вовсе не для усложнения жизни. Освоив эти приёмы, в дальнейшем вы сможете изучать более изощрённые и эффективные методы и даже (чего в жизне не бывает) придумывать свои.

Читать только добровольцам.

Вам не следует бояться новых слов и выражений — это не развлекательная литература, поэтому если какой-то абзац вам не понятен, то перечитайте его ещё раз. «Повторение — мать учения»[3].

Если по этому тексту у вас возникли вопросы и/или предложения, то свяжитесь со мной по электронной почте E.M.Baldin@inp.nsk.su.

3.1 Численные примеры

Если человек просто лежит на диване и ничего не делает, то даже в этом случае его мозг потребляет 10% от общей энергии человека, а если человек начинает хоть что-то делать, например, решать задачи по физике, то энергопотребление возрастает более чем в два раза. Поэтому, обычно, у человека вырабатывается рефлекс на умственную работу, так как всё стремится к минимизации потребления энергии. Одним из следствий такой минимизации стало распространение калькуляторов. Калькулятор — хорошая вещь, но если вы не умеете считать, то он вам не поможет. Поэтому следующие задачи и примеры решайте с помощью листочка бумаги, ручки и вашей головы.

[3]Готов подписаться под каждым словом.

В физике не бывает абсолютно точных численных ответов. Любую величину можно измерить только с определённой точностью. Обычно эта точность не превышает[4] 10%, поэтому при вычислении какой-либо величины вовсе не обязательно выписывать 10 знаков после запятой[5], достаточно правильно посчитать $2 \div 3$ значащих цифры.

В процессе численных вычислений лучше всего следовать правилу: «Сначала вычисляем порядок, затем всё остальное». Разберём следующий пример:

$$\pi \frac{1200 + 2^{10}}{8 \cdot 10^8 - 3600^2 + 1500^2 \cdot 10^3}$$

Вычислим порядки, чтобы определить, какими величинами можно пренебречь.

$$\pi \frac{1.2 \cdot 10^3 + 1.024 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^8 - 3.6^2 \cdot 10^6 + 1.5^2 \cdot 10^9} = \pi \frac{(1.2 + 1.024) \cdot 10^3}{(800 - 3.6^2 + 1.5^2 \cdot 1000) \cdot 10^6}.$$

Теперь начнём всё упрощать[6]: $1.024 \simeq 1$. Величиной $3.6^2 \simeq 10 \ll 800$ можно пренебречь. $1.5^2 = 2.25$, $\pi \simeq 3$. Итого:

$$\frac{\pi \cdot 2.2}{0.8 + 2.25} \cdot 10^{3-9} \simeq 2.2 \cdot 10^{-6}.$$

Все промежуточные выкладки лучше всего проделывать в уме, после некоторой тренировки, вы без проблем обгоните любой калькулятор. Если вычислить этот пример точно, то получится $2.31965775434589182 \cdot 10^{-6}$ — мы ошиблись на 5.5%, что в подобных вычислениях вполне приемлемо.

Когда вы вычисляете что-то более осмысленное, то пытайтесь запоминать полученные результаты и закономерности. Например:

- $2^{10} \simeq 1000$;
- $\pi^2 \simeq g$, где g — ускорение свободного падения — это не закон природы, просто так получилось;
- число секунд в году примерно равно $\pi \times 10^7$.

[4]Это не относится к таким уникальным экспериментам, как измерение скорости света, определение заряда электрона — здесь точность намного превышает доли процента.

[5]Столько, сколько влезает в окошко калькулятора.

[6]Нам не нужна точность выше чем 10%.

Если вы решаете задачу в которой надо получить ответ, то следует этот ответ *получить в буквах. Цифры следует подставлять в самом конце.* Это простое правило подчас сильно облегчает жизнь

3.2 Дифференцирование

Понятие дифференцирование неразрывно связано с именем Ньютона[7]. Введение понятий дифференцирования и интегрирования стало началом физики как самостоятельной науки и без этих понятий изучение физики не возможно.

Основной идеей возникновения дифференциального исчисления является желание изучить изменение физической картины (положение тела, например) в малые промежутки времени. Если мы знаем скорость этих изменений (скорость тела) в любой момент времени, то мы знаем как развивается система (можем вычислить положение тела в любое время). Идея простая, как всё гениальное.

Центральными понятиями дифференциального исчисления являются производная и дифференциал.

Дифференциал[8] Рассмотрим сначала математический аспект этого понятия. Изучим поведение функции $y = f(x)$. Я не буду конкретизировать вид функции до тех пор, пока мне это не понадобится, поэтому мы рассматриваем функцию $f(x)$, которая может быть чем угодно. Точно так же при решении задач не нужно гнаться за частностями, за цифрой, которая является ответом — вашей целью должна быть физическая и/или математическая зависимость.

На рис. 3.2.1 изображена некая функция $f(x)$ (пунктирная линия). В точке x_0 эта функция имеет значение $y_0 = f(x_0)$ (жирная точка на графике).

---

[7] Ньютон Исаак (Newton Isaac) (04.01.1643–31.03.1727) — английский физик и математик, создавший основы механики и астрономии, открывший закон всемирного тяготения, разработавший (на ряду с Г.Лейбницем) дифференциальное и интегральное исчисление, изобретатель зеркального телескопа и автор важнейших экспериментальных работ по оптике. Сам же Ньютон важнейшей своей работой считал написания трудов по теологии — великие люди даже ошибаются по крупному.

[8] От лат. differentia — разность, различие.

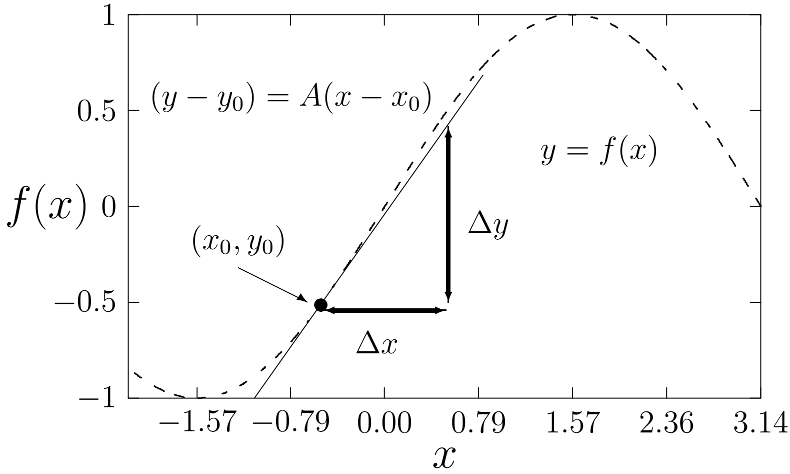

Рис. 3.2.1. Дифференциал

Отступив вправо на Δx, в точке $x_0 + \Delta x$ значение функции будет равно $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ — пока всё просто:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \tag{3.2.1}$$

Проведём в точке $(x_0, f(x_0))$ касательную прямую — это прямая должна удовлетворять уравнению

$$\Delta y = (y - y_0) = A(x - x_0) = A\Delta x, \tag{3.2.2}$$

где A — некая константа (пока мы не знаем чему она равна).

Если присмотреться к тому, что изображено на рис. 3.2.1, то можно заметить, что в окрестности точки (x_0, y_0), поведение функции $y = f(x)$ и касательной прямой схожи — чем ближе к точке касания, тем сложнее отличить прямую от функции. Выразим эту схожесть в виде формулы

$$\Delta y = A\Delta x + \varphi\Delta x, \tag{3.2.3}$$

где A — коэффициент из (3.2.2), а φ — некий параметр, который стремится к 0, при достаточно малом Δx. Какое бы маленькое число мы не назвали, увеличивая масштаб графика и уменьшая Δx (прямая будет сливаться с функцией всё больше и больше), рано или поздно φ станет меньше этого числа. Что бы показать, что мы берём бесконечно малое приращение x букву Δ заменяют на d и пишут:

$$dy = Adx, \tag{3.2.4}$$

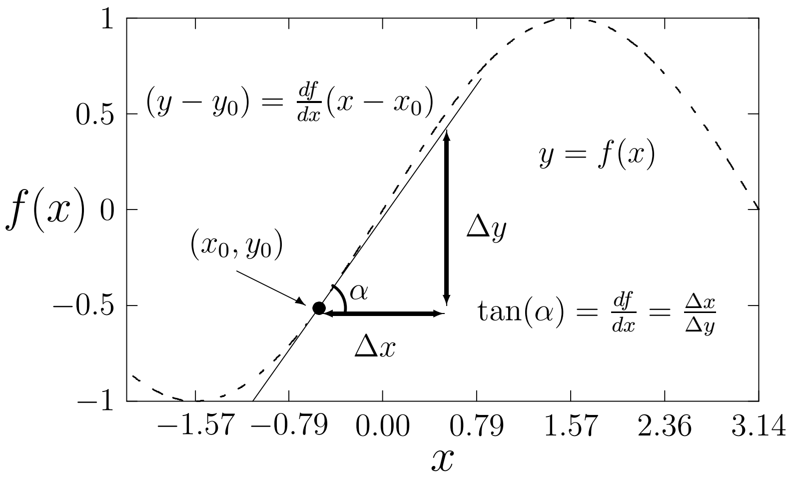

Рис. 3.2.2. Производная

где dx и dy и есть дифференциалы — бесконечно малые изменения. Можно записать, что

$$dy = d(f(x)) = Adx. \tag{3.2.5}$$

Переписав немного 3.2.5 получим более полезную формулу:

$$f(x + dx) = f(x) + Adx. \tag{3.2.6}$$

Полезна эта формула тем, что фактически любую зависимость можно представить как прямую, естественно это верно только при очень малых dx.

Производная Понятие производной возникло из большого числа задач естествознания и математики. Важнейшие из них — построение касательной к кривой и определение скорости движения точки.

На Рис. 3.2.2 изображена примерно то же, что и на Рис. 3.2.1. Зададимся вопросом чему равен угол наклона касательной в точке (x_0, y_0).

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \lim_{\Delta x \to 0}(\frac{\Delta y}{\Delta x}) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \tag{3.2.7}$$

Функция «сливается» с кривой только тогда, когда мы возьмём достаточно большой масштаб и очень маленький Δx — то есть возьмём дифференциал. Довольно часто поведение различных зависимостей в увеличенном масштабе очень слабо отличается от поведения прямой — многие физические законы в первом приближении имеют линейную зависимость. Обычно для упрощения записи $\frac{df(x)}{dx}$ записывают как f'. Читает как «Дэ Эф по Дэ Икс» или «Эф штрих».

Если посмотреть на уравнение (3.2.5), то легко можно заметить, что $A = \frac{dy}{dx}$, где A есть коэффициент, описывающий поведение касательной в точке — уравнение (3.2.2).

Этот угол наклона или коэффициент пропорциональности для уравнения касательной называется производной и по сути является скоростью роста функции. Для начала рассмотрим основные правила *взятия производной*.

1. C' — производная от постоянной равна 0, и действительно: $\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}(\frac{C-C}{\Delta x}) = \lim_{\Delta x \to 0}(\frac{0}{\Delta x}) \equiv 0$, так как Δx хоть и очень маленькая величина, но она больше 0. Кроме того тангенс угла наклона касательной к функции $y = C$ равен 0.

2. $(f(x) + g(x))' = f' + g'$ — производная суммы равна сумме производных, так тангенсы углов наклона складываются

3. $(f(x)g(x))' = f'g + g'f$ — это уже немного посложнее: при дифференцировании произведения сомножители дифференцируются по очереди. Докажем это:

$$\begin{aligned}(fg)' &= \lim_{\Delta x \to 0}(\frac{\Delta(fg)}{\Delta x}) = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}(\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}).\end{aligned}$$

   Теперь вспомним формулу (3.2.6) и учтём, что Δx достаточно мала и что коэффициент пропорциональности A для f равен f', а для g равен g':

$$\begin{aligned}(fg)' &= \lim_{\Delta x \to 0}(\frac{(f + f'\Delta x)(g + g'\Delta x) - fg}{\Delta x}) = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}(\frac{fg + gf'\Delta x + fg'\Delta x + f'g'(\Delta x)^2 - fg}{\Delta x}) = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}(f(x)g'(x) + g(x)f'(x) + f'(x)g'(x)\Delta x) = \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)\end{aligned}$$

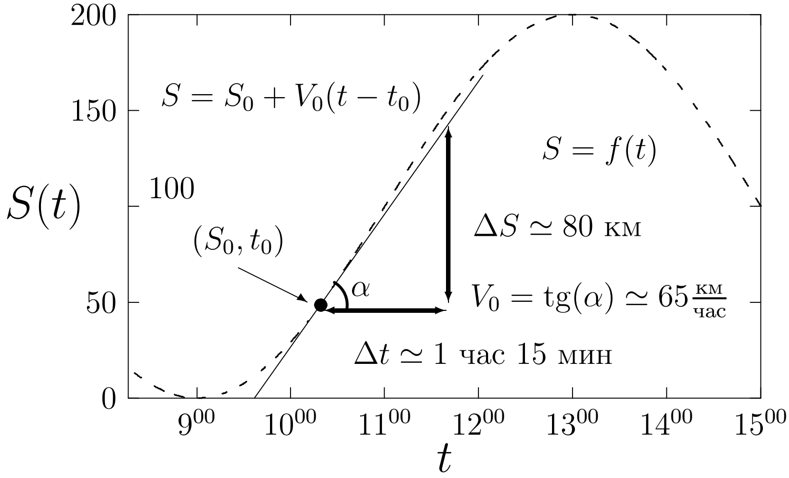

Рис. 3.2.3. График перемещения грузовика от времени

4. $f'(g(x)) = f'g'$ — докажем и это свойство[9] (умножим числитель и знаменатель на dg):

$$f'(g(x)) = \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(x)}{dx} = f'g'.$$

Физический смысл. Вот, теперь можно поговорить и о физике: «Для чего всё это?»

Уже упоминалось, что производная, это «скорость роста» функции — смысл производной в том и есть, что она является *скоростью*.

Немного изменим Рис. 3.2.2 так, чтобы получился Рис. 3.2.3 и добавим легенду: Грузовик возит продукты с базы до сельского магазина, расстояние между этими пунктами 200 км, от одного до другого пункта он добирается за 4 часа.

На Рис. 3.2.3 изображена зависимость расстояния от грузовика до базы (ось y) от времени (ось x). Средняя скорость грузовика на участке от базы до магазина равна $\frac{S}{t} = \frac{200\text{ км}}{4\text{ часа}} = 50\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, но всегда ли его движение было ровным и гладким? Как видно из рисунка нет. Например, в 11^{30} его скорость примерно равнялась $\frac{\Delta S}{\Delta t} \simeq 65\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, что значительно отличается от средней скорости грузовика.

[9]Не совсем корректно, но показательно.

Зная среднюю скорость грузовика, мы можем предсказать только время, когда он прибудет в магазин, но если мы хотим исследовать это явление поподробнее[10], то нам надо знать скорость в каждый момент времени, то есть вычислить производную.

3.3 Интегрирование

Заглушка

[10] Вопрос: А зачем это надо? — пока отложим на потом. А захотелось.

Ответы

Здесь собраны ответы на задачи. Для большинства задач даны только ответы. Но для некоторые задач даны подробные разъяснения. Как правило, эти задачи являются ключевыми для восприятия изложенного в этом разделе материала.

Прежде чем смотреть в ответ, попробуйте решите задачу самостоятельно. Важно не решение задачи самой по себе, а умение сделать это самостоятельно без сторонних подсказок.

Ответы к задачам из § 1.1

1.1.1 $t = 1$ мин.
1.1.2 $t = l/(v + u)$.
1.1.3 $t = 30$ мин.
1.1.4 $v = 6\,\frac{\text{км}}{\text{час}}$.
1.1.5 Уменьшится в k раз.
1.1.6 $c = \frac{L}{t_A - t_B}$. На расстоянии $L\frac{3t_A - 2t_B - t_C}{2(t_A + t_B)}$ от точки A.
1.1.7 $v = 10^7\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.
1.1.8 На расстоянии 1 м от счётчика B.
1.1.9 При $L > 4R$ на расстоянии от стенок большем $2R$; $P = \frac{2R}{L-2R}$. При $4R > L > 2R$ на расстоянии от стенок большем $L - 2R$; $P = 1$. 1.1.1 $t = 1$ мин.
1.1.2 $t = l/(v + u)$.
1.1.3 $t = 30$ мин.
1.1.4 $v = 6\,\frac{\text{км}}{\text{час}}$.
1.1.5 Уменьшится в k раз.
1.1.6 $c = \frac{L}{t_A - t_B}$. На расстоянии $L\frac{3t_A - 2t_B - t_C}{2(t_A + t_B)}$ от точки A.
1.1.7 $v = 10^7\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.
1.1.8 На расстоянии 1 м от счётчика B.

1.1.9 При $L > 4R$ на расстоянии от стенок большем $2R$; $P = \frac{2R}{L-2R}$. При $4R > L > 2R$ на расстоянии от стенок большем $L - 2R$; $P = 1$.

1.1.10 $n = \frac{k+1}{k-1}$. Пусть c — скорость звука, а v — скорость тела. Когда от тела отразился звуковой импульс, следующий за ним импульс находился от тела на расстоянии $c\tau$. За время $\tau_1 = ct/(c-v)$ он догонит тело и тоже отразится от него. В этот момент первый отражатель импульс будет находиться от тела на расстоянии

$$l = \tau_1 \cdot (c+v) = c\tau_0 \cdot \frac{c+v}{c-v}.$$

Поэтому на локатор возвращается импульсы, разделённый временным интервалом

$$\tau = l/c = \tau\frac{c+v}{c-v} = k\tau.$$

Из последнего равенства следует, что скорость v в $\frac{k+1}{k-1}$ раз меньше скорости звука.

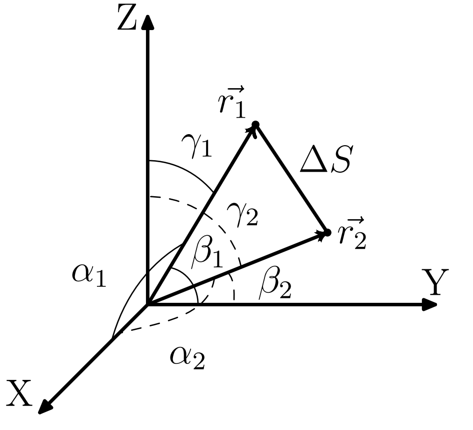

Рис. О.1.1.1. К задаче №1.1.20

1.1.11 $n = \frac{k+1}{k-1}$.

1.1.12 а) $v \simeq 60\,\frac{\text{км}}{\text{час}}$, б) $v \simeq 200\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

1.1.13 $\tau = (\sqrt{l^2 + 4h_1h_2} - l)/c$.

1.1.14 $n \simeq 1.8$.

1.1.15 $v = u/\cos\alpha$.

1.1.16 $u = v\sqrt{1 + 4\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

1.1.17 $v = u\frac{H}{H-h}$.

1.1.18 $\tau = L\left(\frac{\cos\alpha}{v} - \frac{\sin\alpha}{u}\right)$.

1.1.19 $v = 170\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

$\diamondsuit$ 1.1.20 За время $(t_2 - t_1)$ координаты тела изменились на

$$\Delta x = r_2\cos\alpha_2 - r_1\cos\alpha_1$$
$$\Delta y = r_2\cos\beta_2 - r_1\cos\beta_1$$
$$\Delta z = r_2\cos\gamma_2 - r_1\cos\gamma_1$$

Поэтому скорость тела определяется формулой:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}{t_1 - t} =$$
$$= \frac{\sqrt{(r_2\cos\alpha_2 - r_1\cos\alpha_1)^2 + (r_2\cos\beta_2 - r_1\cos\beta_1)^2 + (r_2\cos\gamma_2 - r_1\cos\gamma_1)^2}}{t_1 - t},$$

$\cos\gamma_1$ и $\cos\gamma_2$ в этой формуле определяется из равенства:

$$\cos^2\alpha + \cos^\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Ответ.

$$v = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2)}}{t_2 - t_1},$$

где $\cos\gamma_1 = \sqrt{1-\cos^2\alpha_1 - \cos^2\beta_1}$, $\cos\gamma_2 = \sqrt{1-\cos^2\alpha_2 - \cos^2\beta_2}$.

1.1.21 $\varphi_3 = \frac{\pi}{2} - \alpha$, если $\alpha < \frac{\pi}{2}$; $\varphi_5 = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$, если $\alpha < \frac{\pi}{4}$; $\varphi_5 = \frac{\pi}{2} - n\alpha$, если $\alpha < \frac{\pi}{n}$.

◊ 1.1.22 а) $P = \sqrt{\frac{r^2-h^2}{R^2-h^2}}$, при $r > h$, и $P = 0$ при $r < h$.

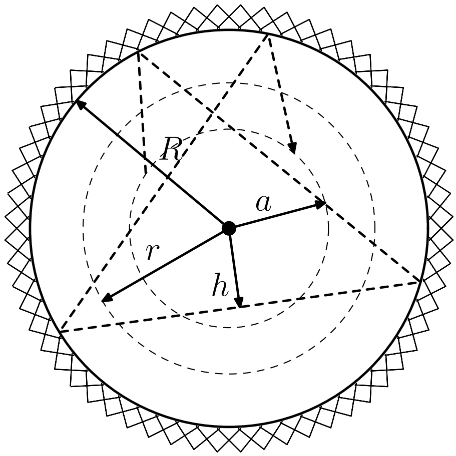

Рис. О.1.1.2. К задаче №1.1.22

На рис. О.1.1.2 изображена часть траектории шарика. При упругом отражении угол падения равен углу отражения и поэтому шарик после очередного отражения опять пролетит на расстоянии h от центра полости. Вероятность обнаружить шарик на расстоянии меньшем r определяется долей времени, когда шарик находится внутри окружности радиуса r. Поэтому при $r > h$ вероятность P равна $\sqrt{r^2-h^2}/\sqrt{R^2-h^2}$ — отношение длины хорды окружности радиуса r к длине хорды, окружности радиуса R.

б) $P = \frac{\sqrt{r^2-h^2} - \sqrt{a^2-h^2})}{\sqrt{R^2-h^2}}$ при $a > h$; $P = \sqrt{\frac{r^2-h^2}{R^2-h^2}}$ при $a < h < r$; $P = 0$ при $r < h$.

◊ 1.1.23 n раз. На рис. О.1.1.3 движение по траектории развёрнуто зеркальными отображениями из движение между двумя параллельными прямыми. Соответствующие точки траектории отмечены одинаковыми буквами. Из рис. О.1.1.3 следует, что шар вернётся на прежнее место после n ударов о борты, длина которых равна a.

1.1.24 а) $u = \frac{\Delta}{a\sqrt{8}}v$.

б) $T = \frac{a^2\sqrt{2}}{\Delta}$, $h = \Delta\sqrt{2}$.

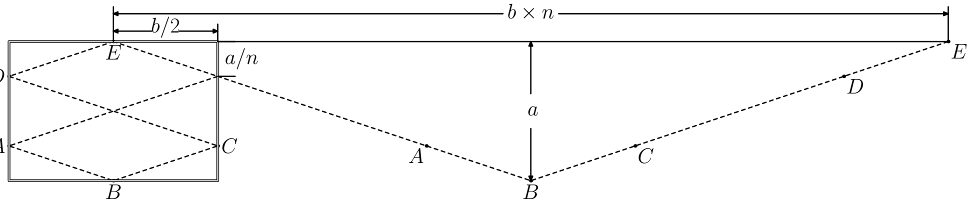

Рис. О.1.1.3. К задаче №1.1.23

в) $T = \frac{a^2\sqrt{2}}{\Delta} \cdot k$, $h = \frac{\Delta\sqrt{2}}{k}$.

г) Пусть $a/\Delta = k/n$, где k и n — целые положительные числа в интервале от 0 до N и вероятность появления каждой пары чисел k и n — одинакова. Тогда при $N \to \infty$, вероятность события, для которого число $k < K$, где K — сколь угодно большое, но ограниченное число, стремится к нулю. Но это означает нулевую вероятность того, что $h > \Delta\sqrt{2}/K$, где K — сколь угодно большое, но ограниченное число.

1.1.25 $S = (u/2v)L$.

Ответы к задачам из § 1.2

1.2.1 а) $t = 2$ с, б) $t = (\sqrt{2} - 1)$ с.

1.2.2 $a = 5\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

1.2.3 $a = v^2/2\ell$, $t = 2\ell/v$.

1.2.4 $\ell > v^2/2a$.

1.2.5 $\tau = [t_1t_2 - \frac{1}{2}(t_1^2 - t_2^2)]/(t_1 - t_2)$.

1.2.6 Во втором случае.

1.2.7 $S_1 = \frac{a_1(s_1+a_2)}{2a_2}\tau^2$;
$S_2 = v_0\tau + \frac{1}{2}a_1\tau^2 + \frac{1}{2}\frac{(v_0+a_1\tau)^2}{a_2}$.

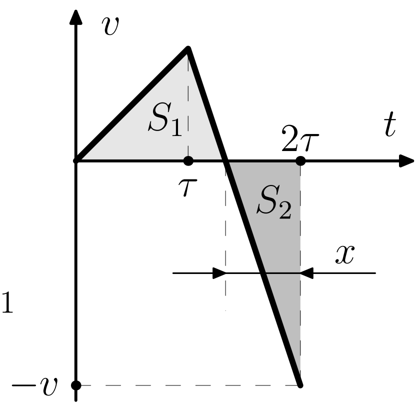

Рис. О.1.2.1. К задаче №1.2.8

◇ 1.2.8 а) $\ell = \frac{1}{3}v\tau$. Площади треугольников S_1 и S_2 на графике зависимости скорости поезда от времени Рис. О.1.2.1 одинаковы. Поэтому время движения поезда по направлению к станции равно $\frac{2}{3}\tau$, а площадь нижнего треугольника, которая определяет максимальное удаление поезда от станции равно $\frac{1}{2}xv = \frac{1}{3}v\tau$.

б) $\ell = \frac{\tau+T}{2(\tau+2T)} \cdot vT$.

1.2.9 а) $t = \frac{v}{9} - \frac{1}{2}\tau$, если $\tau < \frac{2v}{9}$, и не будет сталкиваться, если $\tau > \frac{2v}{g}$.
б) $v < \frac{1}{2}g\tau$.
в) $\tau = \frac{\sqrt{v^2+2gh}+v}{g}$, $u = \sqrt{v^2 + 2gh}$.
◇ 1.2.10 См. Рис. О.1.2.2.

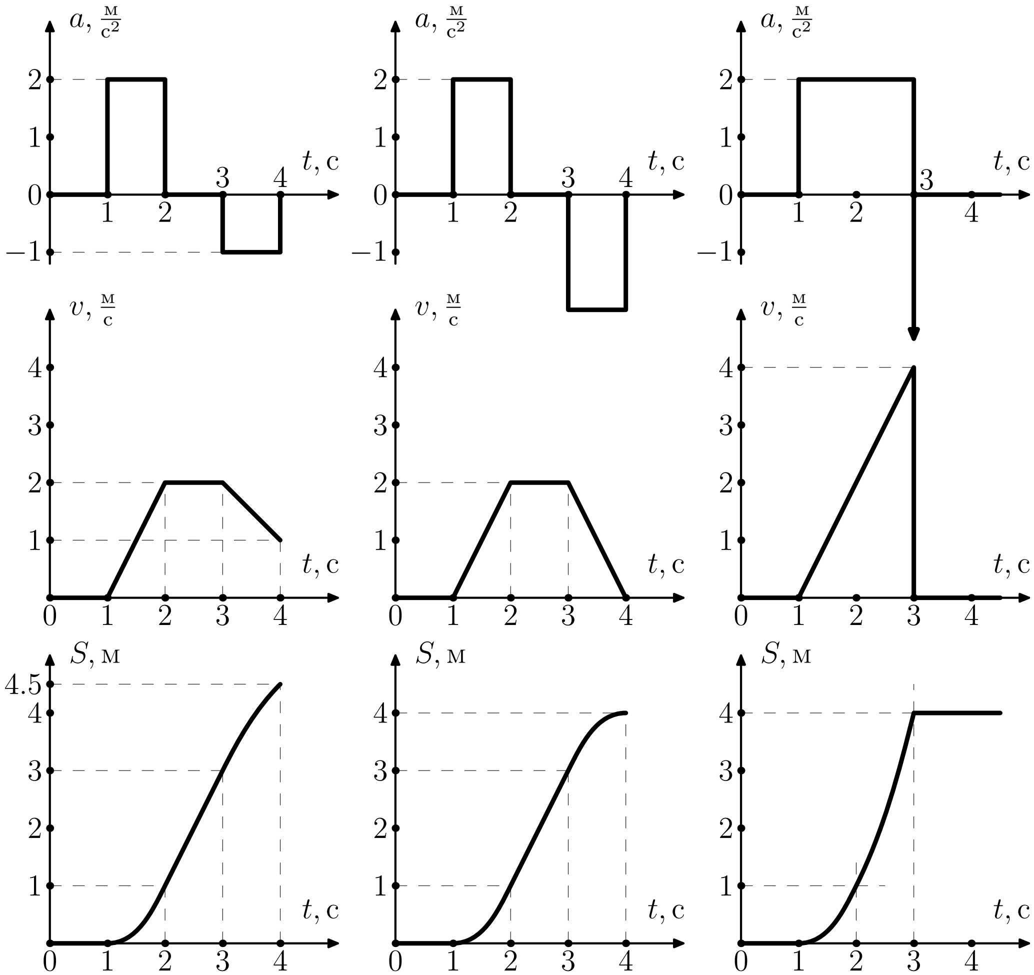

Рис. О.1.2.2. К задаче №1.2.10

◇ 1.2.11 $V_{max} = \sqrt{2Sg}, \tau = \sqrt{\frac{2S}{g}}$, где $S = 1$ м, $g \simeq 9.8\,\frac{м}{с^2}$. См. Рис. О.1.2.3.
◇ 1.2.12 См. Рис. О.1.2.5.
◇ 1.2.13 См. Рис. О.1.2.4.

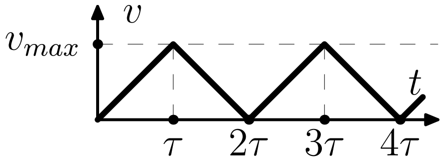

Рис. О.1.2.3. К задаче №1.2.11

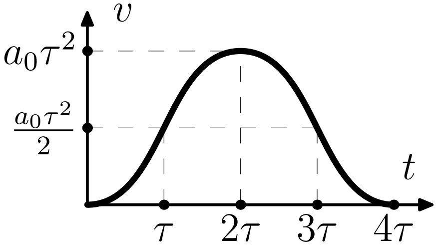

Рис. О.1.2.4. К задаче №1.2.13

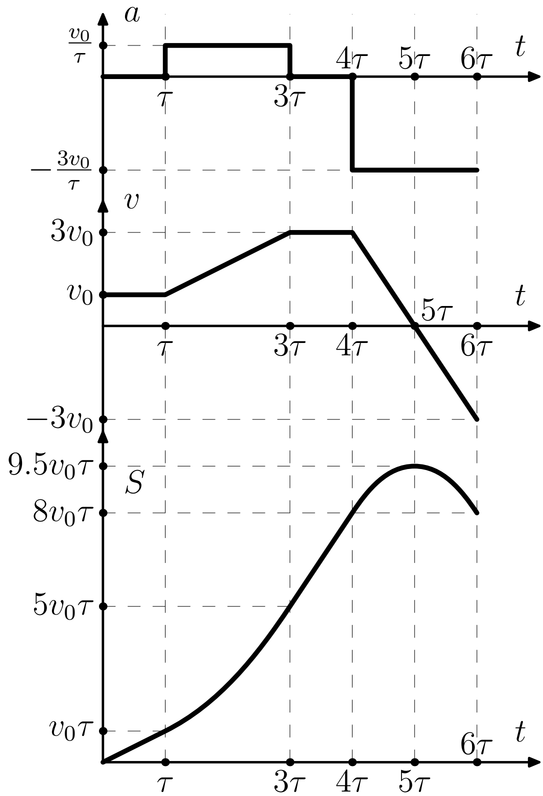

Рис. О.1.2.5. К задаче №1.2.12

1.2.14 $\ell = \frac{1}{3}a\tau^2$.

1.2.15 а) $T = \sqrt{2\ell\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)}$,

б) $T = \sqrt{2\ell\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)}$, если $v > \sqrt{2\ell/\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)}$
и $T = \frac{\ell}{v} - \frac{1}{2}v\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)$, если $v < \sqrt{2\ell/\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)}$.

Ответы к задачам из § 1.3

1.3.1 а) $T = 2v\sin\alpha/g$, б) $T = \left(\sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2gh} + v\sin\alpha\right)/g$.

1.3.2 $v = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2 - 2v_0 gt\sin\alpha}$, $r = t\sqrt{v_0^2 + \frac{1}{4}(gt)^2 - v_0 gt\sin\alpha}$.

1.3.3 $v \simeq 5.7\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

1.3.4 $v = \sqrt{2g(H - h + S^2/4H)}$.
1.3.5 $t \simeq 0.61$ с.
1.3.6 $v \simeq 17\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.
1.3.7 $S \simeq 13$ м.
◇ 1.3.8 а) Круг радиуса $v\tau$.

б) В момент времени t после взрыва осколки находятся на сферической поверхности радиуса $R = vt$, центр которой находится на высоте $h - \frac{gt^2}{2}$, где $h = \frac{g\tau^2}{2}$ — высота, на которой произошёл взрыв снаряда. На Рис. О.1.3.1 участок этой сферической поверхности изображён в момент времени, когда $h - \frac{gt^2}{2} < 0$. Радиус области, покрытой осколками r. Граница этой области движется со скоростью $u = \frac{v}{\cos\alpha} - gt\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Первое слагаемое связано с увеличением радиуса сферы, второе — с опусканием её центра тяжести со скоростью gt. Пусть в момент времени t_0 скорость u обращается в 0. При $t < t_0$ $u > 0$, а при $t > t_0$ $u < 0$, следовательно при $t = t_0$ осколки падают на Землю на максимальном расстоянии от центра O. Используя Рис. О.1.3.1, получаем:

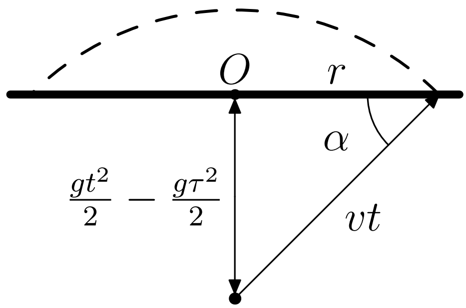

Рис. О.1.3.1. К задаче №1.3.8 б

$$t_0 = \frac{v}{g\sin\alpha}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{2}\frac{g(t^2 - \tau^2)}{vt}.$$

Из последних равенств следует, что $t_0 = \sqrt{\tau^2 + 2(v/g)^2}$, поэтому радиус круга, покрытого покрытого осколками, определяется формулой:

$$r_0 = \sqrt{(vt_0)^2 - \left[\frac{1}{2}g(t_0^2 - \tau^2)\right]^2} = v\tau\sqrt{1 + (v/g\tau)^2}.$$

1.3.9 а) $t = (2v/g)\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $\ell = (2v^2/g)\sin\alpha/\cos^2\alpha$.

б) $\ell = (2v^2/g)\sin(\alpha + \beta)\cos\alpha/\cos^2\beta$.

1.3.10 $\cos\alpha = v/u$, где u — скорость снаряда должна быть больше $\sqrt{v^2 + 2gh}$.

1.3.11 $v = \sqrt{2(g + a)\ell/\sin 2\alpha}$.

1.3.12 $h = \frac{(v\sin\alpha)^2}{2g} - \frac{gL^2}{8(v\cos\alpha)^2}$.

1.3.13 $v = \frac{1}{2}gT\sin 2\alpha$.
1.3.14 $v = 2R/T$.
1.3.15 $t = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha}\right)\frac{v}{g}$, если $\operatorname{tg}\alpha \geqslant 2\sqrt{2}$, $t = 2v\sin\alpha/g$, если $\operatorname{tg}\alpha \leqslant 2\sqrt{2}$.

1.3.16 а) $v = \sqrt{gR}$, если $\frac{hR}{r(R-r)} < 1$, и $v = \sqrt{\frac{1}{2}gR\left(\frac{hR}{r(R-r)} + \frac{r(R-r)}{hR}\right)}$, если $\frac{hR}{r(R-r)} > 1$.

б) $v = \sqrt{(\sqrt{R^2+h^2}+h)g}$, если $\frac{hR}{r(R-r)} < 1$, и $v = \sqrt{\left[\frac{1}{2}R\left(\frac{hR}{r(R-r)} + \frac{r(R-r)}{hR}\right) + 2h\right] g}$ если $\frac{hR}{r(R-r)} > 1$.

1.3.17 $v = \sqrt{(R+2H)g}$.
1.3.18 $v = \sqrt{(R+r)g}$.
1.3.19 $a = g\ell/h$.
1.3.20 Через время τ ракета поднимется на высоту $y = (a\sin\alpha - g)\tau^2/2$ и переместится в горизонтальном направлении на расстояние $x = (a\cos\alpha)\tau^2/2$. В этот момент времени вертикальная составляющая скорости $v_y = (a\sin\alpha - g)\tau$, а горизонтальная $v_x = (a\cos\alpha\tau$. В момент приземления вертикальная составляющая скорости

$$v_y' = -\sqrt{v_y^2 + 2gy} = -\tau\sqrt{(a\sin\alpha - g)^2 + (a\sin\alpha - g)g},$$

поэтому время свободного полёта

$$t = \frac{v_y' - v_y}{g} = \left(\frac{a}{g}\sin\alpha - 1 + \sqrt{\left(\frac{a}{g}\sin\alpha - 1\right)\frac{a}{g}\sin\alpha}\right)\tau,$$

а дальность полёта

$$\ell = x + v_x t = a\tau\left(t + \frac{1}{2}\tau\right)\cos\alpha.$$

1.3.21 $t = \frac{2v\sin\alpha}{g - a\sin\alpha}$, $\ell = \frac{gv^2\sin 2\alpha}{(g-a\sin\alpha)^2}$.

Ответы к задачам из § 1.4

1.4.1 $\ell = \frac{2}{3}v\tau$.
1.4.2 $v = a\tau$.

1.4.3 $v = a_0(t_2 - \frac{1}{2}t_1)$, $\ell = a_0\left[\frac{1}{3}t_1^2 + \frac{1}{2}t_1t_2 - \frac{1}{2}t_2^2 + t(t_2 - \frac{1}{2}t_1)\right]$.
1.4.4 $v = R/3t$.
1.4.5 $t = R/q$.
1.4.6 $v = v_0r^2/(h^3 - r^2vt/\sin\alpha)^{2/3}$.
1.4.7 $q = \pi R^2h/t_0$, $v = R/2\sqrt{tt_0}$.
1.4.8 В 32 раза.
1.4.9 $|\Delta v| = \alpha h$.
1.4.10 б) $\ell = (v_0/2\alpha)(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})$, $v = \frac{1}{2}v_0(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})$.
1.4.11 $T = 0.06\,$с.
1.4.13 $T = v_0/\omega$.
1.4.14 $A > g/\omega$.
1.4.15 а) $\ell = v_0t - \frac{1}{4}\pi v_0\tau$, б) $v = a_0(t - \frac{1}{2}\tau)$.
1.4.16 $a_н = 2\,\frac{м}{с^2}$, $a = \sqrt{5}\,\frac{м}{с^2}$, $a_1 = \sqrt{2}\,\frac{м}{с^2}$.
1.4.17 а) $a = a_0\sqrt{1 + (a_0t^2/R)^2}$, б) $a = \alpha t\sqrt{4 + (\alpha t^3/R)^2}$.
1.4.18 $v = a_0t\cos\varphi$, $a = a_0(\cos\varphi - \omega^2t^2\sin\varphi$, где $\varphi = \frac{1}{2}a_0t^2/R$.
1.4.19 $a_1 = v_0^2/(R + H/4\pi^2R)$, $a_2 = a_0\sqrt{1 + [a_0t^2/(R + h^2/4\pi^2R)]^2}$.
1.4.20 $v = \omega\ell/\cos^2\varphi$.
1.4.21 $v = v_0(L/R - \sin\varphi)$, где$\varphi = (v_0/R)t$.
1.4.22 $v = \sqrt{v_0^2 + \omega^2\ell^2}$, $a = \omega\sqrt{4v_0^2 + \omega^2\ell^2}$.
1.4.23 $v = (4\ell/h)\sin^2\alpha$, $a = (\ell u^2/h^2)\sin^3\alpha\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}$.
1.4.24 $a = 4\omega^2R$.
1.4.25 $x = \sqrt{R^2 - hv_0t/\pi}$, $v = hv_0/2\pi\sqrt{R^2 - hv_0t/\pi}$.
1.4.26 $a = uv/\ell$.
1.4.27 а) $a_0 = v^2/\ell$, $a_1 = v^2/(\ell - vt)$. б) В центре треугольник через $t = \frac{2}{3}(\ell/v)$. $a_0 = v^2\sqrt{3}/2\ell$, $a_1 = v^2\sqrt{3}/(2\ell - 3vt)$.
1.4.28 $r = (v_0^2 + \omega^2\ell^2)^{3/2}/\omega(2v_0^2 + \omega^2\ell^2)$.

Ответы к задачам из § 1.5

1.5.1 $N = v/2\pi R = 8\,\frac{1}{с}$, $\omega = 50\,\frac{1}{с}$, $v = 5\,\frac{м}{с}$.
1.5.2 $v_{min} = v$, $v_{max} = \sqrt{v^2 + (\omega R)^2}$.
1.5.3 $v = 30\,\frac{км}{с}$, $v_{max} = v(1 + r/R)$.
1.5.4 $\Delta v \simeq 31\,\frac{км}{час}$.
1.5.5 а) $v = 2v_0$, б) $v = v_0\sqrt{2h/R}$.
1.5.6 а) $v_1 = v$, $v_2 = v\sqrt{3}$, б) $v_{min} = v(1 - r/R)$, $v_{max} = v(1 + r/R)$, в) $f = v^2/R$, $a_r = (v/R)^2r$.
1.5.7 $a = \sqrt{a_0^2 + (v^2/R)^2}$.

1.5.8 а) $L = 2\pi R$, $r = R\sqrt{8R/h}$, б) $L = 2\pi R$, $r_1 = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{(r^2-R^2+2Rh)^{3/2}}{R^2-r^2-Rh}$.
1.5.9 $v = \sqrt{\pi Rg}$.
1.5.10 $x = 2L$.
1.5.11 а) $v_1 = \frac{1}{2}(v-u)$, $\omega = (v+u)/2R$, б) $v_1 = \frac{1}{2}(v+u)$, $\omega = (v-u)/2R$.
1.5.12 $v = 2r\omega \sin \omega t$, $a = 2r\omega^2 \cos \omega t$.
1.5.13 $v = \frac{1}{2}\omega(R + 2r)$.
1.5.14 $x = \frac{1}{3}\ell$.
1.5.15 $v_1 = 2v \operatorname{ctg} \alpha$, $v_2 = v/2 \sin \alpha$.
1.5.16 $u_1 = v \cos \alpha / \cos \beta$, $u_2 = v \sin(\alpha + \beta)/2 \cos \beta$.
1.5.17 $u = v \operatorname{ctg} \alpha$, $\omega_1 = \frac{v}{R} \operatorname{ctg} \alpha$, $\omega_2 = \frac{v}{R} \sec \alpha$.

Ответы к задачам из § 1.6

1.6.1 $v_1 = \frac{2}{3}v$, $v_2 = \sqrt{v^2 + u^2 - vu}$, $v_3 = \frac{4}{3}v$.
1.6.2 а) Уменьшится в три раза. б) $v_1 = \sqrt{v^2 + s\sqrt{2}vu + 4u^2}$. в)[1] 100 $\frac{\text{км}}{\text{час}}$.
1.6.3 $u = 2v$.
1.6.4 $h = |(v \sin \alpha - u \sin \beta)/(v \cos \alpha + u \cos \beta)|L$.

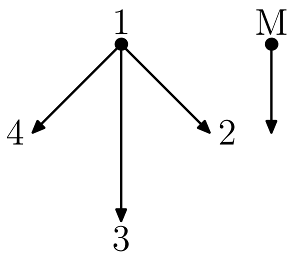

Рис. О.1.6.1. К №1.6.5

◇ 1.6.5 На Рис. О.1.6.1 изображены скорости Мазая и зайцев №2–№4 в системе координат, в которой заяц №1 неподвижен.
1.6.6 Такую же.
1.6.7 $u = 2v \sin \frac{\alpha}{2}$.
1.6.8 а) $v = \frac{1}{2}(v - u)$. б $u = 3v$.
1.6.9 а) $N = n\pi R^2 T\sqrt{v^2 + u^2}$.
б) $N = n(2RLu + \pi R^2 v)T$. Тангенс угла между осью цилиндра и направлением его движения равен v/u, если $L > \frac{\pi}{2}R$, и $\frac{u}{v}$, если $L = \frac{\pi}{2}R$.

◇ 1.6.10 Пусть a — длина плота, тогда траектория плывущей собаки изображена на Рис. О.1.6.2.
1.6.11 В $\operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \beta$ раз.
1.6.12 Увеличится в $\frac{v\sqrt{v^2-u^2 \sin^2 \alpha}}{v^2-u^2}$ раз.
1.6.13 а) $u = v \sin \alpha / \sin(\beta - \alpha)$.
б) $u = v\sqrt{2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)/\sin^2(\alpha + \beta) - 1}$.
в) $u = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(v_1 - v_2)^2 - (v_1 + v_2)^2 \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}\right] - 2\frac{v_1^2 \sin \beta \cos \alpha + v_2^2 \sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha+\beta)}}$.
1.6.14 На разливе.

[1] Не следует кататься на велосипеде на проезжей части.

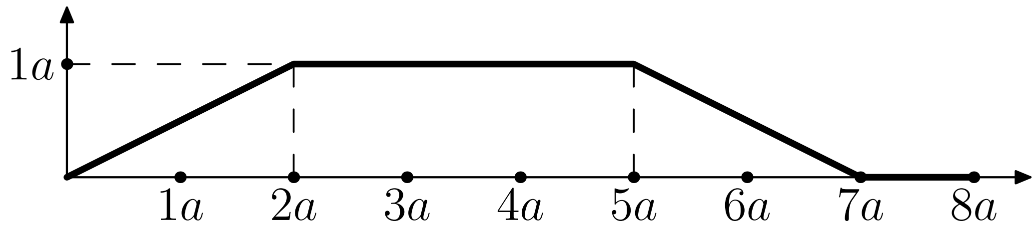

Рис. О.1.6.2. К задаче №1.6.10

1.6.15 Так как время между ударами шарика о плиту не зависит от преобразования Галилея, то лучше решать эту задачу для такого движущегося состояния, где плита неподвижна, а шарик будет в начальный момент иметь скорость u вверх. После удара скорость шарика в этом состоянии будет равна $v = \sqrt{u^2 + 2gh}$. Поэтому время между двумя последовательными ударами будет равно $T = 2v/g = 2\sqrt{u^2/g^2 + 2h/g}$.

1.6.16 Проекция на горизонталь $v_x = v_0 \cos\alpha - 2u$; проекция на вертикаль $v_y = v_0 \sin\alpha + (2n-1)\ell g/(v_0 \cos\alpha - u)$.

1.6.17 $v = u + \sqrt{u^2 - w^2}$.

♢ 1.6.18 На Рис. О.1.6.3 представлено решение. Окружность представляет из себя возможные варианты для векторов скоростей распада. Максимальный угол для вектора скорости соответствует углу для касательного вектора к этой окружности и равен $\alpha_{max} = \arcsin(u/v)$.

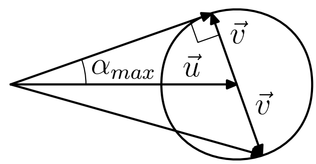

Рис. О.1.6.3. К №1.6.18

1.6.19 $u = v\sqrt{k(k-2)}$. При $k \leqslant 2$ таких осколков нет.

♢ 1.6.20 Перейдём в состояние, в котором жидкость направлена вдоль падающей струи, как на Рис. О.1.6.4. Для этого необходимо перейти в систему отсчёта, двигающуюся со скоростью $-\vec{w}$, где $w = u/\sin\alpha$. При переходе в первоначальное состояние надо будет прибавить ко всем скоростям $-\vec{w}$. Как следствие:

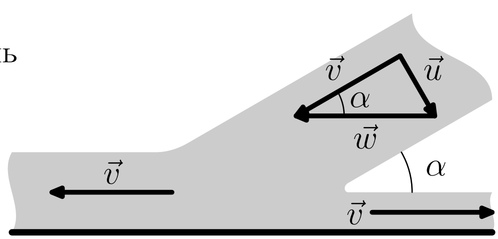

Рис. О.1.6.4. К задаче №1.6.20

$$v_{min} = v_{\leftarrow} = v - w = u \operatorname{ctg}\alpha - u/\sin\alpha = u(1-\cos\alpha)/\sin\alpha = u \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$
$$v_{max} = v_{\rightarrow} = v + w = u \operatorname{ctg}\alpha + u/\sin\alpha = u(1+\cos\alpha)/\sin\alpha = u \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

1.6.21 Решение для этой задачи почти полностью эквивалентно решению задачи №1.6.20. В силу симметрии среднюю линию можно представить как горизонтальную плиту, ничего при этом не изменив. $v_{min} = u \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $v_{max} = u \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

$\diamondsuit$ 1.6.22 Как формируется струя металла, которая пробивает броню кратко описано в решениях задач №1.6.20 и №1.6.21. Далее обсудим почему скорость струи металла внутри брони в два раз меньше, чем вне её.

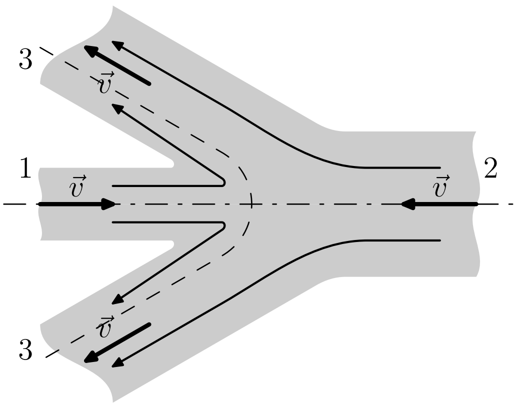

Рис. О.1.6.5. К задаче №1.6.22

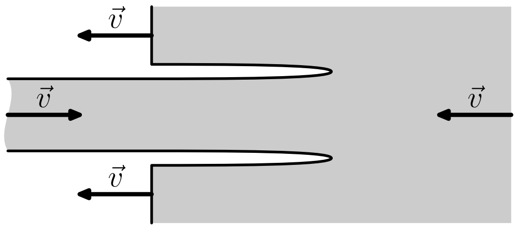

Рис. О.1.6.6. К задаче №1.6.22

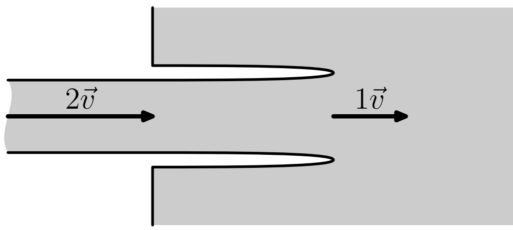

Рис. О.1.6.7. К задаче №1.6.22

Рассмотрим две летящие с одинаковой скоростью друг на встречу другу струи №1 и №2 изображённые на Рис. О.1.6.5. По аналогии с решением задачи №1.6.21 можно заключить, что результатом встречи этих двух струй будет конический «зонтик» №3. «Зонтик» будет иметь ту же скорость, что и встречающиеся струи.

При увеличении радиуса струи №2 угол конуса «зонтика» уменьшается. В предельном случае, когда струя №2 очень толстая мы получаем ситуацию, изображённую, на Рис. О.1.6.6. В этом случае струя №2 моделирует броневую плиту, а струя №1 кумулятивную струю, которая прожигает в броне «нору» с радиусом близким к радиусы струи №1.

Теперь перейдём в систему отсчёта, где плита становится неподвижной (см. Рис. О.1.6.7). В этом случае скорость струи становится равной $2v$, а место встречи струи будет двигаться в плите со скоростью v. Это означает, что налетающая на неподвижную плиту струя дырявит её со скоростью в два раза меньшей скорости жидкости в струе. Таким образом, утверждение «...летит металл, причём самым необъяснимым образом: перед плитой около 8 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$, внутри плиты 4 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$, а за плитой 8 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$ » расшифровывается так: Металл из снаряда вылетает со скоростью 8 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$, затем дырявит плиту со скоростью 4 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$, а проделав дыру , летит через неё опять со скоростью 8 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$.

Литература

[1] *И. И. Воробьёв, П. И. Зубков, Г.А. Кутузова, О.Я. Савченко, А. М. Трубачёв, В. Г. Харитонов* **Задачи по физике:** учебное пособие под редакцией О. Я. Савченко. Новосибирск. Новосибирский государственный университет.