МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Секция истории и методологии естествознания
Ученого совета по естественным наукам

ИСТОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

ВЫПУСК III

ФИЗИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1965

УДК 5(09)+5(018)

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

ИСТОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

ВЫПУСК III

ФИЗИКА

Тематический план 1965 г. № 10

Редактор *М. Г. Зайцева* Технический редактор *Г. И. Георгиева*

Корректор *Г. И. Чугунова*

Сдано в набор 5. III 1965 г. Подписано к печати 13. IX 1965 г.
Л-49554. Формат $70\times108^1/_{16}$. Физ. печ. л. 20,5. Усл. печ. л. 28,7.
Уч.-изд. л. 27,25. Изд. № 617 Зак. 567 Тираж 2.000 экз.
Цена 1 р. 51 к.

Издательство Московского университета
Москва, Ленинские горы, Административный корпус.
Типография Изд-ва МГУ. Москва, Ленинские горы.

К 80-летию со дня рождения С. А. Богуславского

Н. А. Капцов

ВОСПОМИНАНИЯ О С. А. БОГУСЛАВСКОМ

Приглашение Сергея Анатолиевича Богуславского в Московский государственный университет для создания в нем новой кафедры теоретической физики состоялось в первые годы Советской власти.

Научная жизнь в Физическом институте университета в те времена только начинала возрождаться после длительного и печального перерыва, вызванного разгромом передовой части профессуры университета в 1911 г. царским правительством и вспыхнувшей в 1914 г. первой империалистической войной. Появление Сергея Анатолиевича в Физическом институте весьма содействовало этому возрождению. Он никогда не замыкался в кругу занимавших его вопросов теоретической физики и живо интересовался всем, что делалось в институте, и всегда был готов помочь своим советом опытного и передового физика всякому, кто к нему обращался. Его лекции, посвященные актуальным и новым вопросам физики, собирали большое число слушателей, многие среди которых не были непосредственно связаны с работой в институте. Интерес к коллоквиумам, регулярно происходившим в большой физической аудитории, сильно возрос.

Параллельно с чтением лекций по теоретической физике Сергей Анатолиевич приступил к организации лаборатории при организованной им кафедре. Ассистентами его по этой лаборатории были молодые тогда физики Б. А. Введенский и Г. С. Ландсберг. Это была та самая лаборатория, в которой несколько лет спустя (уже после смерти Богуславского) его преемником по кафедре Л. И. Мандельштамом и Г. С. Ландсбергом было открыто одновременно с индийским физиком Раманом комбинационное рассеяние света.

Сергей Анатолиевич был искренен и прост в обращении с людьми. Никакой чрезмерной гордости или кичливости своими блестящими работами у него не было. Он всегда охотно делился с коллегами своими идеями, относящимися к актуальным в то время вопросам физики.

Трудные бытовые условия тех лет вынуждали многих научных работников состоять на службе одновременно в нескольких местах. С. А. Богуславский кроме той большой и плодотворной работы, которую он вел в университете, еще сотрудничал в Государственном электротехническом экспериментальном институте (ГЭЭИ), преобразованном впоследствии в существующий ныне Всесоюзный электротехнический институт (ВЭИ). В «Трудах» этого института были напечатаны две его работы, носившие прикладной характер: «О влиянии магнитного поля на силу термоионных токов», ч. I и II, и «О влиянии пространст-

С. А. Богуславский (1883—1923)

венных зарядов на силу термоионных токов». Обе эти задачи были вызваны запросами, возникшими при изготовлении и практическом использовании так называемых катодных ламп. Решение второго из этих вопросов для цилиндрического триода Богуславский получил одновременно с американским физиком Ленгмюром, но независимо от последнего и в значительно более простой, наглядной и изящной форме. Первая из упомянутых выше статей тесно связана с его работой, приведшей к его замечательной книге «Пути электронов в магнитных полях», написанной в 1922 г., но вышедшей из печати лишь в 1929 г.

Автору этих строк посчастливилось ближе узнать С. А. Богуславского, его доброту и отзывчивость к людям во время длительной командировки последнего в Германию в 1923 г. Только благодаря Сергею Анатолиевичу автору удалось провести с большой пользой для себя несколько месяцев в стенах Физического института Геттингенского университета, где получил образование и сам Сергей Анатолиевич. В Геттингенском университете он получил и немецкую докторскую степень. Здесь хранились оставленные им в 1914 г. при поспешном отъезде в Швейцарию в начале войны вещи и книги. Трудно описать, с каким уважением относились к нему — как ученому и человеку — его геттингенские друзья — профессора Борн, Франк и др., с каким вниманием выслушивались его выступления на коллоквиуме Физического института Геттингенского университета. Да и не только Геттингенского. В то время, когда волновая механика еще не оформилась окончательно, Богуславский, продолжая работать над применением теории Бора к атому гелия, окончательно убедился в невозможности получить согласное с опытом решение данной задачи на основе классической механики и электродинамики. Он выступил с доказательством своего вывода на коллоквиуме в Физическом институте Берлинского университета и после рассказывал, как на этом же заседании выступили пришедшие к аналогичному заключению немецкие физики, вследствие чего он решил не печатать статью по этому вопросу.

Сергей Анатолиевич был болен туберкулезом легких, и московский климат губительно отражался на его здоровье. Наиболее неблагоприятную для него зиму 1922/23 г. он провел в Швейцарии, затем поехал в Германию и вернулся в Москву летом 1923 г. В это время состояние его резко ухудшилось, и осенью 1923 г. его не стало.

К. В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ И Г. В. СПИВАК

О КЛАССИЧЕСКОЙ РАБОТЕ С. А. БОГУСЛАВСКОГО ПО ТЕОРИИ ТОКОВ, ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЪЕМНЫМ ЗАРЯДОМ

Введение

Опубликованная в 1924 г. работа профессора Московского университета С. А. Богуславского «О влиянии пространственных зарядов на силу термоионных токов» [1] может считаться примером строгого, простого и изящного решения одной из важнейших задач современной электроники, сохранившей и до нашего времени свое принципиальное и практическое значение [1].

В связи с тем большим интересом к мощным электроннолучевым приборам, который проявляется в настоящее время, наличие электрических полей, обусловленных кулоновским взаимодействием зарядов в потоке частиц, заставляет нас привлечь внимание читателей к этой малоизвестной работе Богуславского.

Нам бы хотелось не только показать, что Богуславский оригинально решил эту задачу, но что его решение является и более общим и содержит, как нам кажется, весьма интересный физический парадокс, имеющий большое значение для уяснения понятия «ограничение тока объемным зарядом».

Хорошо известно, что в униполярных системах заряженных частиц ток не определяется одними лишь полями, созданными внешним напряжением, но с некоторого момента начинают играть существенную роль и поля самих заряженных частиц [2].

Эффект этих пространственных, или объемных, зарядов был предметом многочисленных теоретических и экспериментальных работ.

В настоящей статье проведено детальное сопоставление двух основополагающих работ, описывающих роль пространственных зарядов в современной электронике: работы И. Лентмюра и его сотрудников и работы Богуславского.

Следует отметить, к сожалению, что ни в учебной, ни в монографической литературе до сих пор не было надлежащим образом отмечено то новое и принципиальное, что содержится в этой замечательной работе Богуславского, давшего более общее и красивое решение задачи, нежели сделал это Ленгмюр.

Всякий, имеющий отношение к электронике, знает о достижениях Ленгмюра в этой области. Его выдающиеся работы по физике плазмы, теории зондов, вопросам электронной эмиссии, по физике и химии поверхностных явлений составили важный этап в развитии современной электроники; однако в решении вопроса о роли объемных зарядов в си-

[1] См. С. А. Богуславский. Избр. тр. по физике. М., Физматгиз, 1961.

стемах коаксиальных цилиндров первенство должно быть отдано Богуславскому.

Задача, о которой будет идти речь в настоящей статье, представляет не только исторический интерес. Простое перечисление современных устройств, в которых очень существенна роль объемных зарядов, свидетельствует о том, сколь важно сейчас наличие хорошего метода расчета полей объемных зарядов.

Интересно отметить, что роль объемных зарядов проявляется как в униполярных системах, где переносятся заряды одного знака, так и в биполярных системах, где движутся положительные и отрицательные заряды.

К униполярным системам относятся катодные лампы, системы автоэлектронной эмиссии, магнетроны, клистроны, устройства для генерирования сверхвысоких частот — приборы прямой и обратной волны, электроннооптические пушки для создания электронных и ионных потоков, полупроводниковые (дрейфовые) транзисторы и др.

Явления в газоразрядной плазме, являющейся биполярной системой, не могут быть поняты без привлечения теории объемных зарядов.

В самом деле, процессы формирования газовой проводимости в плазме связаны с накоплением положительного пространственного заряда, влияние которого остается и в сформировавшейся плазме.

Наличие радиального поля в стационарной плазме следует объяснять эффектом остаточного положительного пространственного заряда. Поля в катодных и анодных частях газоразрядного промежутка модулируются в основном объемными зарядами разных знаков (катодное и анодное падение потенциала). Первостепенную роль играют объемные заряды в различных неоднородностях плазмы (страты), у пограничных поверхностей, в явлении низковольтной дуги, в вопросах космической и ионосферной электродинамики и многих других вопросах. Хотя в работе Богуславского рассматривается вопрос о влиянии пространственных зарядов на силу термоионных токов, что предполагает наличие выделения заряженных частиц благодаря нагреву эмиттера, однако это предположение не ограничивает общности решения, так как мало существенно, каким частным процессом создан избыточный пространственный заряд.

1. Некоторые общие вопросы теории пространственных зарядов

При невысоких температурах катода и достаточной разности потенциалов можно считать, что все испускаемые катодом электроны быстро увлекаются полем на анод, и при этих условиях сила тока хорошо выражается выведенной Ричардсоном [3] формулой. Ленгмюр [4, 5] нашел, что при высоких температурах катода эта формула перестает соответствовать действительности, так как выше известной температуры не наблюдается сильного возрастания тока, как это следует из формулы Ричардсона. Оказывается, что дальнейшее повышение температуры катода не влияет на силу тока. Ленгмюр дал правильное истолкование этого явления. Именно при высоких температурах катода большое число электронов, даваемых катодом, создает значительные объемные заряды в пространстве между электродами. Эти заряды сильно изменяют электростатическое поле и своим отталкивающим действием задерживают движение электронов. Поэтому электрическое поле обусловливается не только геометрической формой и наложенной извне между электродами разностью потенциалов, но и полем самих частиц, связанным с их передвижением и взаимодействием с нейтральными частицами и между собой в пространстве между электродами, т. е. наличием пространственного заряда.

Следовательно, поле складывается из внешнего наложенного на электроды поля и поля, созданного совокупностью всех остальных заряженных частиц, движущихся между электродами.

Плотностью пространственного заряда называют алгебраическую сумму зарядов всех частиц в единице объема.

Ленгмюр дал решение [4, 7] задачи для вакуумной электронной лампы о распределении потенциала между электродами для случая плоских, цилиндрических и сферических электродов, причем в двух последних случаях за катод принимались внутренний цилиндр и внутренний шар соответственно.

Во всех трех указанных случаях зависимость тока от напряжения следует «закону трех вторых», иначе называемому формулой Ленгмюра.

Эту зависимость Ленгмюр выражает следующими формулами в зависимости от формы электродов.

а) Плоские параллельные электроды:

$$i = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \sqrt{\frac{e}{m}} \frac{V^{3/2}}{x^2}. \tag{1}$$

б) Коаксиальные цилиндрические электроды (внутренний цилиндр-катод):

$$i = \frac{2\sqrt{2}}{9} \sqrt{\frac{e}{m}} \frac{V^{3/2}}{r\beta^2}, \tag{2}$$

где

$$\beta = f_1\left(\frac{r}{r_0}\right).$$

в) Концентрические сферические электроды (внутренняя сфера-катод):

$$i = \frac{4\sqrt{2}}{9} \sqrt{\frac{e}{m}} \frac{V^{3/2}}{a^3}, \tag{3}$$

где $a = f_1\left(\frac{r}{r_0}\right)$, r_0 — радиус внутреннего электрода.

Задача о вольт-амперной характеристике диода для случая плоских и цилиндрических электродов была решена Ленгмюром в 1913 г. [4, 5]. В 1923 г. Ленгмюр снова возвратился к этой задаче для случая цилиндрических электродов [6]. Та же задача для сферических электродов была решена им в 1924 г. [7].

Обычно при решении задачи о распределении потенциала между электродами и нахождении соотношения между плотностью тока и разностью потенциалов между анодом и катодом (т. е. при решении задачи о вольт-амперной характеристике двухэлектродной электронной трубки-диода) задачу упрощают, делая следующие допущения.

1) Пренебрегают начальной скоростью электронов, покидающих катод; ошибка, вносимая этим допущением, тем меньше, чем больше V_a по сравнению со средней энергией (порядка 0,2 *эв*) вылетающих из катода электронов при температуре катода 2400—2500°.

2) Считают, что около катода всегда очень много электронов. Это допущение возможно, пока ток на аноде i_a далек от тока насыщения. Приближение к току насыщения дает другую закономерность.

3) Полагают, что пространственный заряд создает такое распределение потенциала V между электродами, что непосредственно у поверхности катода градиент потенциала равен нулю, т. е.

$$\left(\frac{dV}{dr}\right)_{r\to 0} \to 0, \tag{4}$$

где r — расстояние между электродами, считая от катода.

Это предположение необходимо сделать, если принять первое допущение. Если бы напряженность поля у поверхности катода была больше нуля, то все эмиттируемые катодом электроны попадали бы на анод и V_a равнялось бы току насыщения при всяком сколь угодно большом положительном потенциале анода.

Если бы $\frac{dV}{dr}$ у катода было меньше нуля, то при наличии первого допущения ни один электрон, покидающий катод, не мог бы достигнуть анода.

Вместе с тем это пограничное условие имеет глубокий физический смысл. Суммарное поле обращается на эмиттере в нуль, что соответствует максимальному току, проходящему через нашу систему. Поэтому надо искать лишь такие решения задачи о токах, ограниченных объемным зарядом, которые удовлетворяют данному условию.

Действием оставшихся молекул газа в межэлектродном пространстве на движение электронов и образовавшихся положительных ионов пренебрегают (высокий вакуум). Потенциал катода считают равным нулю, потенциал анода V_a.

Как видно из (1), плотность тока при наличии пространственного заряда зависит от потенциала анода и расстояния между электродами и не зависит от температуры и от коэффициентов, характеризующих свойства металла, эмиттирующего электроны.

Большой интерес представляет случай, когда электродами являются коаксиальные цилиндры. Этот случай часто встречается в практике.

В работах [4] Ленгмюра и Адамса [1] и работах [6] Ленгмюра и Блоджетт 1923 г. дано решение задачи для коаксиальных цилиндрических электродов. Оригинальное решение этой задачи получил Богуславский в 1923 г. и опубликовал его [1] в 1924 г. Кроме простейшего случая тока между плоскими параллельными электродами Ленгмюром был изучен и ток между цилиндрическими электродами, когда внутренний цилиндр служит катодом. Богуславский дополнил его результат, разобрав тот случай, когда, наоборот, катодом служит внешний цилиндр, попутно разобрав и случай, изученный Ленгмюром. Богуславский не знал о работе Ленгмюра и Блоджетт [6], где были вычислены значения β и для того случая, когда катодом является наружный цилиндр.

Богуславский указывал на то, что Ленгмюр решил задачу методом, аналогичным методу, использованному Богуславским, но менее непосредственным. Для того чтобы это стало ясно, ниже будут разобраны оба метода решения задачи.

Кроме того, мы обращаем внимание на возникающий здесь парадокс, связанный с тем, что ток зависит от полярности системы, и даем истолкование этого парадоксального явления.

При рассмотрении метода мы ограничиваемся случаем цилиндри-

---

[1] Таблица для β^2 Ленгмюра и Адамса оказалась ошибочной (см Н. А. Капцов Электрические явления в газах и вакууме. М. ГТТИ, 1950 Соответствующее исправление было сделано Ленгмюром в 1923 г. [6]).

ческих электродов, так как метод Ленгмюра в случае сферических электродов аналогичен методу решения для цилиндрических электродов.

Недавно задача для сферических электродов была решена В. Л. Каном [8].

2. Метод Ленгмюра

Ленгмюр принимает внутренний цилиндр радиуса r_0 за катод. а внешний цилиндр радиуса r_a, коаксиальный с первым, за анод и записывает уравнение Пауссона в виде:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left(r \frac{dV}{dr}\right) = -4\pi\rho. \tag{5}$$

Скорость движения электрона дается уравнением

$$\frac{mv^2}{2} = eV. \tag{6}$$

Электронный ток с единицы длины катода:

$$i = -2\pi r\rho v. \tag{7}$$

Исключая v и ρ из уравнений (6), (7), получаем:

$$r\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{dV}{dr} = i\sqrt{\frac{2m}{eV}}. \tag{8}$$

Решение этого уравнения дает распределение потенциала между коаксиальными цилиндрическими электродами, вызванное пространственным зарядом, и может быть представлено в виде:

$$V \sim r^{2/3}. \tag{9}$$

Выражение для тока в этом случае имеет вид:

$$i = \frac{2\sqrt{2}}{9}\sqrt{\frac{e}{m}}\frac{V^{3/2}}{r}. \tag{10}$$

Легко видеть, что требование обращения электрического поля на эмиттере в нуль, т. е. условие (4), не получается из решения (9).

В самом деле, из (9) следует:

$$\frac{dV}{dr} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{r}},$$

и, следовательно, при

$$r_0 \to 0, \left(\frac{dV}{dr}\right)_{r\to a} \to \infty$$

выражение (9) не является нужным нам решением дифференциального уравнения (8). Поэтому Ленгмюр вводит в знаменатель правой части выражения (10) поправочный множитель β^2 и получает выражение (2). Поправочный множитель β обозначает некоторую функцию, которую нужно подобрать так, чтобы выражение (2) было интегралом дифференциального уравнения (8), удовлетворяющим всем указанным выше условиям. Подстановка $\frac{dV}{dr}$ и $\frac{d^2V}{dr^2}$, найденных из выражения (2), в уравнение (8) приводит к новому дифференциальному уравнению:

$$3\beta r^2 \frac{d^2\beta}{dr^2} + r^2\left(\frac{d\beta}{dr}\right)^2 + 7\beta r\frac{d\beta}{dr} + \beta^2 - 1 = 0. \tag{11}$$

Полагая $\gamma = \ln\frac{r}{r_0}$, Ленгмюр преобразует уравнение (11) к виду:

$$3\beta\frac{d^2\beta}{d\gamma^2} + \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 + 4\beta\frac{d\beta}{d\gamma} + \beta^2 - 1 = 0. \tag{12}$$

Решение этого уравнения задается рядом:

$$\beta = \gamma - \frac{2}{5}\gamma^2 + \frac{11}{120}\gamma^3 - \frac{47}{3300}\gamma^4 + \ldots, \tag{13}$$

который называют *рядом Ленгмюра.*

В работе [6] 1923 г. Ленгмюр писал, имея в виду работу [4], о том, что значения β^2 вычислялись с помощью грубого метода, и поэтому многие из них имели ошибку в несколько процентов. В [6] приводится исправленная и расширенная таблица значений β^2, а также вычисляются значения β^2 для случая, когда катодом является наружный цилиндр.

Ряд Ленгмюра медленно сходится, и для вычисления его коэффициентов потребовались громоздкие вычисления. Поэтому были сделаны попытки отыскать более быстро сходящиеся ряды для β и более удобный способ вычисления коэффициентов этих рядов.

Адамс [5] предложил свой метод вычисления β для больших значений γ. С помощью подстановки

$$\beta = 1 - e^{-\mu} \tag{14}$$

он преобразовал уравнение (12) к виду:

$$\left(\frac{d\mu}{d\gamma}\right)^2 + (e^{\mu} - 1)\left[3\frac{d^2\mu}{d\gamma^2} - 3\left(\frac{d\mu}{d\gamma}\right)^2 + 4\frac{d\mu}{d\gamma} - 2\right] = 1 \tag{15}$$

и дал решение этого уравнения в форме ряда:

$$\mu = \gamma + \frac{1}{10}\gamma^2 + \frac{1}{40}\gamma^3 + \frac{49}{6600}\gamma^4 + \frac{31\,723}{18\,480\,000}\gamma^5 + \ldots \tag{16}$$

Пользуясь этим методом, Ленгмюр и Адамс [4] дали ту краткую таблицу значений β^2, которую в 1923 г. они были вынуждены исправить. Ленгмюр пишет [6], что значения β, полученные этим путем, сходятся так быстро к единице для значений $\frac{r}{r_0}$ от 11 до 20, что точность этого метода подверглась сомнению, поэтому от этого ряда пришлось отказаться. Метод вычисления коэффициентов ряда (13), предложенный Мотт-Смитсом [6], заключался в представлении β, которая была дана как функция от γ в уравнении (12), в виде ряда:

$$\beta = A_0 + A_1\gamma + A_2\gamma^2 + A_3\gamma^3 + \ldots + A_n\gamma^n \tag{17}$$

и разложении β в ряд Маклорена:

$$\beta = \beta_0 + \gamma\left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)_0 + \frac{\gamma^2}{2!}\left(\frac{d^2\beta}{d\gamma^2}\right)_0 + \ldots + \frac{\gamma^n}{n!}\left(\frac{d^n\beta}{d\gamma^n}\right)_0. \tag{18}$$

Полагая $\beta = a$, $\frac{d\beta}{d\gamma} = b$, $\frac{d^2\beta}{d\gamma^2} = c$ и т. д., уравнение (12) записываем в форме:

$$3ac + b^2 + 4ab + a^2 - 1. \tag{19}$$

Дифференцируя (19), получаем:

$$3ad + 5bc + 4b^2 + 4ac + 4ab = 0. \tag{20}$$

Дифференцируя (20), получаем:

$$3ac + 8bd + 4ad + 12bc + 5c^2 + 2ac + 2b^2 = 0. \tag{21}$$

Дальнейшее дифференцирование (21) дает:

$$3af + 11be + 4ae + 18cd + 16bd + 2ad + 12c^2 + 8bc = 0. \tag{22}$$

Замечаем, что для ряда (13) $\beta=0$ если $\gamma=0$, поэтому в данном представлении для β в окрестности $\gamma=0$, полагая $a_0=0$, сводим уравнение (19) к следующим уравнениям: $b_0^2=1$; $b_1=1$; здесь выбирается положительный знак, так как β возрастает вместе с γ и, следовательно, первая производная положительна.

Подставляя $a_0=0$, $b_0=1$ в уравнение (20), имеем: $c_0=-\frac{4}{5}$. Из подстановки значений a_0, b_0 и c_0 в уравнение (21) следует: $d_0=\frac{11}{20}$. Подобно этому, из уравнения (22) имеем: $e=-\frac{375}{1100}$. Сравнивая уравнения (17) и (18), видим, что

$$A_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n\beta}{d\gamma^n}\right)_0.$$

Поэтому, деля полученные значения b_0, c_0, d_0, e_0 на 1, 2, 6 и 24 соответственно, получаем:

$$A_1 = 1,\ A_2 = -\frac{2}{5},\ A_3 = \frac{11}{20},\ A_4 = -\frac{47}{3300},$$

что совпадает с коэффициентами ряда (13).

Таким образом могут быть вычислены коэффициенты для любого числа членов ряда (17), а следовательно и ряда (13). Мотт-Смитс с помощью подстановки

$$\beta = \theta e^{-\gamma/2} \tag{23}$$

преобразовал уравнение (12) к виду:

$$3\theta\frac{d^2\theta}{d\gamma^2} + \left(\frac{d\theta}{d\gamma}\right)^2 - e^{\gamma} = 0. \tag{24}$$

Он отыскал его решение в виде ряда для θ и с помощью (23) придал ему форму:

$$\beta = e^{-\gamma/2}(\beta_0 + \beta_1\gamma + \beta_2\gamma^2 + \dots + \beta_n\gamma^n), \tag{25}$$

где

$$\beta_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n\theta}{d\gamma^n}.$$

Коэффициенты ряда (25) были вычислены методом, указанным выше. Из сравнения коэффициентов рядов (17) и (25) следует, что ряд (25) для малых γ сходится более быстро, чем ряд (17), но начинает медленнее сходиться, когда берут более одиннадцати членов (для больших γ). Ленгмюр [6] приводит значения 14 коэффициентов каждого ряда (17) и (25). При перемене полярности, т. е. в том случае, когда наружный коаксиальный цилиндр является катодом, Ленгмюр не решает задачи заново, а только указывает, что для обратного случая, когда катодом является наружный цилиндр, для вычисления электронного тока между концентрическими электродами могут быть использованы те же самые ряды, как и в предыдущем случае, но γ теперь отрицательна, так что происходит перемена знаков у членов ряда. Это делает значения β отрицательными, но так как в уравнение (2) входят только β^2, ток остается положительным.

В работе [6] приведена исправленная и значительно дополненная таблица значений функции β^2 в зависимости от r/r_0 и функции $-\beta^2$ в зависимости от r/r_0 [1]. Далее авторы показывают, что ряд (25) был использован для всех вычислений значений β, когда $r/r_0>0$ (катод внутри анода). Четырнадцати членов ряда достаточно для точного вычисления значений β вплоть до $\gamma=4{,}2$ при $r/r_0=66{,}7$ и — с некоторым приближением — для $\gamma=7{,}5$ при $r/r_0=1808$. Значения β, вычисленные с помощью ряда, требовали при $\gamma=4{,}5$ поправки $-0{,}00003$ и при $\gamma=7{,}5$ поправки $-0{,}00260$, что было установлено с помощью метода последовательных приближений. Для значений γ, больших чем 7,5, ряд был оставлен и значения β были получены путем численного интегрирования и метода последовательных приближений. Значения β, соответствующие $r/r_0>20$, были получены по интерполяционной формуле Ньютона. Эти вычисления показали, что β принимает значение, равное 1, при $r/r_0=11{,}2$, достигая максимального значения 1,0946 при $r/r_0=42$ и снова принимая значение, равное 1, вблизи $r/r_0=10\,000$. Минимум достигается перед $\gamma=10{,}5$ (при $r/r_0=36\,316$), и его значение отличается от единицы менее чем на 0,0012. Ленгмюр предполагает, что далее, после этой точки, кривая проходит последовательно через бесконечное число максимумов и минимумов, которые быстро приближаются к единице.

При вычислении β в случае, когда $r/r_0<1$ (катод снаружи анода), снова используется ряд (25) до $r/r_0=20$. Для дальнейших вычислений значений β используется ряд (13), так как он быстро сходится в этом интервале.

Для значений $r_0/r>10$ дается удобная приближенная формула:

$$\beta^2 = 4{,}6712\left(\frac{r_0}{r}\right)\left[\log_{10}\left(\frac{r_0}{r}\right)-0{,}1505\right]^{3/2}, \tag{26}$$

дающая результаты с точностью до 10^{-4} для значений $r/r_0>0$.

Чтобы получить формулу (26) из уравнения (24), нужно пренебречь e^{γ}, интегрировать дважды, подставить значения θ в (23) и исключить γ с помощью выражения $\gamma=\ln(r/r_0)$. Две константы интегрирования определяются так, чтобы значения β^2 для больших r_0/r соответствовали тем значениям, которые вычислены с помощью рядов. Для r_0/r, больших 10, значения β^2 вычисляются с точностью до 1%.

3. Метод Богуславского

Громоздкость вычислений по методу Ленгмюра и проистекающая отсюда трудность обозрения результатов вызваны тем, что Ленгмюр упорно искал решение для вспомогательной функции β, в то время как

[1] Эта таблица приведена в кн. Н. А. Капцов. Электрические явления в газах и вакууме. М., Гостехиздат, 1947, стр. 714.

возможен другой путь решения задачи, который и был найден С. А. Богуславским,— более простой и красивый.

Уравнение Пуассона можно записать в виде:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right)=4\pi\rho.$$

Пространственная плотность тока $i=-v\rho$, где v — скорость движения электрона в данной точке пространства, полученная из уравнения

$$\frac{mv^2}{2}=eV.$$

Общая сила тока, отнесенная к единице длины цилиндров, связана с плотностью тока i уравнением $I=2\pi ri$. Пользуясь написанными соотношениями, можно преобразовать уравнение Пуассона к виду:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right)=2I\sqrt{\frac{m}{2eV}}. \tag{27}$$

Вводя новую[1] независимую переменную $s=\ln\frac{b}{r}$, которая положительна в пространстве между электродами и обращается в нуль для $r=b$ (b — радиус внешнего цилиндра, в данном случае катода), получаем уравнение (27) в виде:

$$\sqrt{V}\frac{d^2V}{ds^2}=2I\sqrt{\frac{m}{2e}}\,be^{-s}. \tag{27'}$$

Богуславский ищет решение этого уравнения в виде ряда по возрастающим степеням s: $V=a_0s^n(1+a_1s+a_2s^2+a_3s^2+\ldots)$, показывая при этом, что нельзя удовлетворить ему рядом, содержащим лишь целые степени.

Обозначим степень первого члена через n; так как справа мы имеем множитель $e^{-s}=1-s+\frac{s^2}{2}-\frac{s^3}{6}+\ldots$, то и слева первый член должен быть нулевой степени относительно s. Но $\sqrt{V}$ дает член степени $n/2$, а $\frac{d^2V}{ds^2}$ — член степени $n-2$. Отсюда условие для n:

$$\frac{n}{2}+(n-2)=0,\ \text{т. е. } n=\frac{4}{3}.$$

Следовательно, решение уравнения (27') можно представить в виде:

$$V=a_0s^{4/3}(1+a_1s+a_2s^2+a_3s^3+\ldots).$$

Подставляя этот ряд в уравнение (27') и сравнивая коэффициенты в правой и левой частях, находим значения a_0, a_1, a_2, a_3. Найдя коэффициенты ряда, можно получить для V выражение

$$V=\left(\frac{9bI}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m}{e}}\right)^{2/3}s^{4/3}\left(1-\frac{2}{15}s+\frac{11}{450}s^2-\frac{41}{14\,850}s^3+\ldots\right), \tag{28}$$

[1] Легко видеть, что разумный выбор новой переменной, связанной с r при помощи логарифмической функции, обеспечивает получение решения, удовлетворяющего основному пограничному условию:

$$\left(\frac{dV}{dr}\right)_{r\to b}\to 0.$$

определяющее распределение потенциала между коаксиальными цилиндрическими электродами для случая, когда наружный электрод является катодом. Принимая во внимание, что для $r=a$ (радиус внутреннего цилиндра, в данном случае анода) потенциал V должен принимать заданное значение V_a, находим из (28) зависимость силы тока от приложенной разности потенциалов в виде:

$$I = \frac{2\sqrt{2}}{9b}\sqrt{\frac{e}{m}}V_a^{3/2}s_0^{-2}\left(1 - \frac{2}{15}s_0 + \frac{11}{450}s_0^2 - \frac{41}{14\,850}s_0^3 + \dots\right)^{-3/2}, \quad (28')$$

где

$$s_0 = \ln\frac{b}{a}.$$

Аналогично Богуславский решает задачу и для того случая, когда внутренний цилиндр служит катодом, т. е. когда потенциал V обращается в нуль для $r=a$ и в V_a для $r=b$. При этом он вводит новую независимую переменную $t=\ln\frac{r}{a}$, и уравнение (27) преобразуется к виду:

$$\sqrt{V}\,\frac{d^2V}{dt^2} = 2I'\sqrt{\frac{m}{2e}}\,ae^t. \quad (29)$$

Методом, аналогичным указанному выше, находится решение уравнения (29) в виде:

$$V = \left(\frac{9aI'}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m}{e}}\right)^{2/3} t^{4/3}\left(1 + \frac{2}{15}t + \frac{11}{450}t^2 + \frac{41}{14\,850}t^3 + \dots\right). \quad (30)$$

Сила тока I' из (30), в зависимости от приложенной разности потенциалов V_a, выражается в этом случае так:

$$I' = \frac{2\sqrt{2}}{9a}\sqrt{\frac{e}{m}}V_a^{3/2}t_0^{-2}\left(1 + \frac{2}{15}t_0 + \frac{11}{450}t_0^2 + \frac{41}{14\,850}t_0^3 + \dots\right)^{-3/2}, \quad (30')$$

где $t_0 = \ln\frac{b}{a}$ и I' — сила тока между электродами в том случае, когда катодом является внутренний цилиндр.

Особенностью решений (28) и (30), как это непосредственно видно, является то, что производная от потенциала по координате r (т. е. ток) в том случае, когда мы берем точку на эмиттере, обращается в нуль.

Иными словами, решение Богуславского сразу удовлетворяет основному пограничному условию (без всяких поправочных коэффициентов типа β^2, вводимых Ленгмюром) и строго определяет по (28′) и (30′) величины токов, ограниченных пространственным зарядом. Изящество полученного решения этой задачи несомненно связано с удачным выбором переменных s и t.

4. Парадокс С. А. Богуславского, обнаруженный при сопоставлении решений для двух полярностей

Разделив (28′) на (30′) почленно, получим:

$$\frac{I}{I'} = \frac{a}{b}\left(\frac{1 + \frac{2}{15}\ln\frac{b}{a} + \dots}{1 - \frac{2}{15}\ln\frac{b}{a} + \dots}\right)^{3/2} = \sim\frac{a}{b},$$

или $I=\frac{a}{b}I'$, т. е. когда катодом служит внешний цилиндр, ток слабее в $\frac{a}{b}$ раз, чем при обратном соединении электродов[1]. При изменении отношения $\frac{a}{b}$ отношение токов убывает медленее, чем эта величина. Например, при $\frac{a}{b}=0{,}05$ имеем $I/I'=0{,}17$.

На первый взгляд этот результат кажется парадоксальным.

В самом деле, наложена одна и та же разность потенциалов, движение частиц идет и в том и в другом случае в радиальном направлении, а токи при противоположных полярностях электродов различны!

Суть дела в том, что всегда выбираются те решения, которые соответствуют обращению в нуль градиента потенциала у эмиттера. Когда эмиттером служит внутренний электрод, то исходное поле (в отсутствие эмиссии) велико, и требуется большое количество зарядов, чтобы сделать это поле нулевым.

Если эмиттером является внешний электрод, то исходное поле будет слабым, и потребуется гораздо меньшее количество зарядов, чтобы опять свести поле к нулю.

5. Вольт-амперная характеристика цилиндрического диода

Вольт-амперную характеристику цилиндрического диода принято записывать в форме:

$$i=\frac{2\sqrt{2}}{9}\sqrt{\frac{e}{m}}\cdot\frac{V_a^{3/2}}{r_a\beta^2}.$$

В том случае, когда катодом является внутренний цилиндр, коаксиальный с наружным цилиндрическим анодом, β^2 имеет вид:

$$\beta^2=\gamma^2\left(1-\frac{2}{3}\gamma+\frac{11}{120}\gamma^2-\frac{47}{3300}\gamma^3+\dots\right)^2,$$

если пользоваться рядом Ленгмюра;

$$\beta^2=e^{-\gamma}\left(1+\frac{1}{10}\gamma+0{,}0167\gamma^2+\dots\right)^2,$$

если пользоваться рядом Мотт-Смитса, и

$$\beta^2=\frac{a}{b}\gamma^2\left(1+\frac{2}{15}\gamma+\frac{11}{450}\gamma^2+\frac{41}{14\,850}\gamma^3+\dots\right)^{3/2},$$

если пользоваться рядом Богуславского.

Ряд Мотт-Смитса для малых γ сходится быстрее рядов Ленгмюра и Богуславского, но для больших γ, когда берут более 11 членов, он сходится медленнее даже ряда Ленгмюра [6]. Рядом Мотт-Смитса не пользуются для вычисления значений β при $r_0/r>20$ (в том случае, когда катодом является наружный цилиндр), так как, после того как множитель ряда $e^{-\gamma/2}$ достигает значения $\sqrt{20}$, он значительно увеличивает ошибку от пренебрежения остаточными членами ряда. Ряд Богуславского не обладает таким недостатком и сходится более быстро для этого случая.

---

[1] В работах Ленгмюра это обстоятельство не отмечено.

Для всех этих рядов $\gamma = \ln \frac{b}{a}$ (a — радиус катода, b — радиус анода).

Для сравнения приводятся коэффициенты этих рядов. Коэффициенты рядов Ленгмюра и Мотт-Смитса даны в работе [6], коэффициенты ряда Богуславского даны в [9].

Коэффициенты рядов

	Ленгмюра	Мотт-Смитса	Богуславского
1	$+1,0$	$+1,0$	$+1,0$
2	$-4 \cdot 10^{-1}$	$+1 \cdot 10^{-1}$	$+1,3333 \cdot 10^{-1}$
3	$+9,1667 \cdot 10^{-2}$	$+1,6667 \cdot 10^{-2}$	$+2,4444 \cdot 10^{-2}$
4	$-1,4242 \cdot 10^{-2}$	$+2,4242 \cdot 10^{-3}$	$+3,9237 \cdot 10^{-3}$
5	$+1,6793 \cdot 10^{-3}$	$+2,8723 \cdot 10^{-4}$	$+5,2981 \cdot 10^{-4}$
6	$-1,6122 \cdot 10^{-4}$	$+2,6585 \cdot 10^{-5}$	$+5,9725 \cdot 10^{-5}$
7	$+1,2935 \cdot 10^{-5}$	$+1,7661 \cdot 10^{-6}$	$+5,5474 \cdot 10^{-6}$
8	$-8,8769 \cdot 10^{-7}$	$+6,3329 \cdot 10^{-8}$	$+4,2461 \cdot 10^{-7}$
9	$+5,4619 \cdot 10^{-8}$	$-8,7385 \cdot 10^{-10}$	$+2,649 \cdot 10^{-8}$
10	$-2,9484 \cdot 10^{-9}$	$-1,9384 \cdot 10^{-11}$	$-1,35 \cdot 10^{-9}$
11	$+1,3602 \cdot 10^{-10}$	$+5,7728 \cdot 10^{-11}$	$+9,7 \cdot 10^{-11}$
12	$-7,1101 \cdot 10^{-12}$	$+9,4502 \cdot 10^{-12}$	
13	$+2,6644 \cdot 10^{-13}$	$+4,7012 \cdot 10^{-13}$	
14	$+1,2526 \cdot 10^{-15}$	$-6,5539 \cdot 10^{-14}$	

6. Фокусировка интенсивных пучков заряженных частиц и работа С. А. Богуславского

Богуславским изящно решена задача не только для случая, когда эмиттером является внутренний электрод, но и для случая, когда эмиттирует внешний электрод, а максимальный ток частиц собирается малым внутренним электродом.

В настоящее время одним из основных направлений получения интенсивных пучков является метод Пирса [10], основанный на теории токов, ограниченных пространственным зарядом. Отметим, что при этом Пирс как раз исходит из той же идеи учета объемного заряда при движении частиц, собираемых с большой поверхности на малую. Как мы уже видели, основы решения этой задачи заложил еще в 1923 г. С. А. Богуславский.

О разнообразии методов получения интенсивных пучков можно получить представление из работ [11, 12, 13].

Во всех случаях проблема получения интенсивных пучков не может быть рассмотрена без учета объемных зарядов и, стало быть, без вклада Богуславского в решение этой проблемы.

Заключение

Выражение для «закона три вторых» в случае коаксиальных цилиндров, полученное впервые еще в 1913—1914 гг. Ленгмюром, было известно Богуславскому, который, однако, вновь рассмотрел эту задачу в 1922—1923 гг.

Сопоставление работ обоих авторов показывает, что первый внес весьма существенный вклад в решение этой проблемы. Что же касается второго, то он не только дал более изящное, строгое и простое решение проблемы для случая коаксиальных цилиндров, но и обратил внимание на существенное различие в решениях для двух полярностей, вычислив соответствующее отношение токов.

Значительная разница в величине этих токов приводит к «парадоксу Богуславского», физическая интерпретация которого дана в настоящей статье. Следует отметить и тесную связь между задачей Богуславского для случая внешнего эмиттера с современным развитием теории интенсивных пучков.

Одним из обстоятельств, побудивших к появлению настоящей статьи, является тот факт, что в нашей учебной и монографической литературе не всегда правильно оценивается эта работа С. А. Богуславского[1]. Обычно она либо игнорируется вообще, либо Богуславскому приписывается авторство в открытии «закона трех вторых» для случая коаксиальных цилиндров, либо она вообще неправильно цитируется.

ЛИТЕРАТУРА

1 Богуславский С А О влиянии пространственных зарядов на силу термононных токов «Тр эксперим. эл.-техн ин-та», вып 3, 18, 1924.

2 Радиофизическая электроника, под ред проф. Н. А. Капцова Изд-во МГУ, 1960.

3 Richardson O. W. «Camb. Phil Soc», **11**, 286, 1901

4 Langmuir I. «Phys Rev», **2**, 450, 1913

5 Langmuir I. «Phys Zs.», **15**, 348, 516, 1914.

6 Langmuir I, Blodgett K B «Phys Rev», 22, 347, 1923

7 Langmuir I., Blodhett K. B. «Phys Rev», **24**, 49, 1924

8 Кан В Л ЖТФ, **18**, 483, 1948

9 Капцов Н А. Электроника. М., Гостехиздат, 1953

10 Пирс Дж Р. Теория и расчет электронных пучков М., «Сов радио», 1956

11 Зинченко Н С Курс лекций по электронной оптике Изд-во Харьк ун-та 1961

12 Чернов З С. «Радиотехника и электроника», **3**, 1227, 1958.

13 Игнатенко В. П. УФН, **73**, 243, 1961

[1] Педагогический опыт одного из авторов показывает, что указание слушателям курса электроники на различие токов при двух полярностях позволяет лучше понять природу явления «ограничение тока объемным зарядом»

СОДЕРЖАНИЕ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ПУБЛИКАЦИИ

ИСТОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

Выпуск

III

ФИЗИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1 9 6 5