АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Серия «Популярные произведения классиков естествознания»

МАКС БОРН

РАЗМЫШЛЕНИЯ И ВОСПОМИНАНИЯ ФИЗИКА

СБОРНИК СТАТЕЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

Москва 1977

Макс Борн (1882 — 1970) — выдающийся физик-теоретик XX в., один из создателей квантовой механики, иностранный член Академии наук СССР, лауреат Нобелевской премии. Он широко известен также как мастер популяризации. На русском языке издано несколько его популярных книг. Статьи, включенные в настоящую книгу, на русском языке почти все публикуются впервые.

Ответственный редактор

Э. И. ЧУДИНОВ

Составитель

У. И. ФРАНКФУРТ

Макс Борн

РАЗМЫШЛЕНИЯ И ВОСПОМИНАНИЯ ФИЗИКА

Сборник статей

Утверждено к печати редколлегией серии научно-популярных изданий Академии наук СССР

Редактор издательства Е. М. Кляус. Художественный редактор Ю. П. Трапаков
Технический редактор В. Д. Прилепская. Корректоры Л. В. Лукичева, А. А. Смогилева

Сдано в набор 19/X 1976 г. Подписано к печати 13/IV 1977 г.
Формат $84 \times 108^1/_{32}$ Бумага № 1. Усл. печ. л. 14,91. Уч.-изд. л. 14,9
Тираж 56000 Тип. зак. 1353. Цена 95 коп.

Издательство «Наука». 117485, Москва, Профсоюзная ул., д. 94 а

2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

$Б\frac{20401-022}{054(02)-77}$ 62 — 76 НП

I. ФИЗИКА И ФИЗИКИ

ВОСПОМИНАНИЯ [187][1]

Предисловие

Для развития науки преемственность и традиции столь же важны, как и понимание неизбежности специализации и необходимости взаимодействия разных ее областей. Исключительные успехи физики — с момента открытия Планком дискретности энергии — характерны для всего XX в. Начальные фазы этого развития сейчас отчетливо помнит лишь небольшая группа его активных участников, которые в то же время оценивают с философской точки зрения значение науки в жизни общества. Очень отрадно, что Макс Борн, который был одним из пионеров новой физики и к тому же является прекрасным писателем и глубоким мыслителем, согласился опубликовать свои воспоминания о разных аспектах развития физики, с которой он был так тесно связан. Мне кажется, что для молодого поколения ученых особенно ценным будет то, что на страницах воспоминаний Борна дана картина безвозвратно ушедшей, но исключительно плодотворной атмосферы научного творчества в университетах старого Геттингена и других городов Европы.

Рихард Курант

I. Как я стал физиком

Я родился в 1882 г. в Бреслау [Вроцлаве.—*Ред.*], столице тогдашней прусской провинции Силезии. Мой отец преподавал анатомию в университете, но основные его интересы были связаны с исследованиями по эмбриологии и механике развития (Entwicklungsmechanik). Я вырос в культурной семье, в нашем доме царила научная атмосфера. С ранних лет я и моя сестра приходили к отцу в его лабораторию, полную микроскопов, микротомов и других инструментов

[1] Здесь и ниже цифра в квадратных скобках означает номер в списке трудов М. Борна (с. 267—274 настоящего сборника).— *Прим. ред.*

и приборов. Позднее я получил возможность присутствовать на его дискуссиях с коллегами; некоторые из них стали знаменитыми: Пауль Эрлих, открывший сальварсан и основавший химиотерапию, Альберт Найсер, дерматолог, который открыл гонококки и другие микроорганизмы. Я был маленьким мальчиком, когда умерла моя мать; незадолго до того, как я окончил школу, умер отец. В последние два года жизни он был очень болен, но не прекращал своей работы. Последние его достижения относятся к исследованию желтого тела (corpus luteum) яичников, и мой сын-биолог Густав (носящий имя своего деда) говорил мне, что они предвосхитили важные современные исследования о половых гормонах.

Я учился в обычной немецкой гимназии, в которой основными предметами были латынь, греческий и математика. Я не был особенно увлечен ни одним из них, но вспоминаю, что наслаждался, читая Гомера, и до сих пор помню наизусть первые строки «Одиссеи». Машке, преподававший математику в старших классах, был не только блестящим учителем, но вдумчивым экспериментатором и очень добрым человеком. Он преподавал также физику и химию, и я был заражен его энтузиазмом. В то время стали известны опыты Маркони по беспроволочному телеграфированию, и Машке повторил их в своей маленькой лаборатории; я и еще один мальчик были его ассистентами. Когда нам удалось наладить передачу сигнала из одной комнаты в другую, Машке попросил меня позвать нашего директора, доктора Эккарда, чтобы продемонстрировать это чудо, и я до сих пор помню наше разочарование, когда этот ученый гуманитар остался совершенно равнодушным и спокойным.

Незадолго до смерти отец посоветовал мне не спешить с выбором специальности, а посещать в университете лекции по различным предметам и лишь после этого, через год, принять решение. Поэтому я прослушал не только курсы математики и прочих точных наук, но также философии, истории искусств и по другим предметам. Поначалу я был увлечен астрономией (о своих астрономических занятиях я более подробно рассказал в «Vistas tn Astronomy»; эта статья помещена также в моей книге «Физика в жизни моего поколения» [1844]. Но обсерватория была оборудована бедно, мы ничего не слышали об астрофизике, звездах и туманностях, а занимались бесконечными расчетами эфемерид планет. Вскоре все это мне надоело. Тогда я сосредоточился на математике и получил вполне основательную подготовку. Я признателен профессору Розанесу, который познакомил меня с линейной алгеброй; благодаря этому я приобрел опыт пользования матричным исчислением, сыгравшим позднее большую роль в моих собственных исследованиях.

В те времена немецкие студенты кочевали по университетским городам, проводя лето в каком-нибудь маленьком университете, чтобы насладиться природой и спортом, а зиму — в больших городах с их театрами, концертами и собраниями. Так, я провел одно лето в Гейдельберге, чудесном и веселом городе, расположенном на реке Неккар, а другое — в Цюрихе, вблизи Альп. Гейдельберг мало что дал мне в научном отношении, но там я встретил Джеймса Франка, который стал моим ближайшим другом, а в последующие годы — коллегой по физическому факультету в Геттингене. В Цюрихе я впервые соприкоснулся с первоклассным математиком Гурвицем, чьи лекции по эллиптическим функциям открыли мне дух современного анализа.

Зимние семестры я всегда проводил в Бреслау, в те годы (1910—1914) оживленном городе с бурной социальной и культурной жизнью. Из бесчисленных знакомств, установившихся у меня в тот период, я хочу отметить свою дружбу с Рудольфом Ладенбургом. Многие годы мы были с ним неразлучны и прекрасно проводили время отпусков в Италии и Швейцарии. Он эмигрировал в США еще до прихода к власти нацистов, получил профессуру в Принстонском университете. Двое моих однокурсников стали моими друзьями: это — Отто Теплиц и Эрнст Хеллингер. Они знали математику и математиков гораздо лучше меня. От них я услышал, что Меккой немецких математиков был Геттинген и что там проживают три пророка: Феликс Клейн, Давид Гильберт и Герман Минковский. Тогда я решил совершить паломничество в Геттинген. Вскоре Теплиц и Хеллингер последовали за мной; наша «бреслауская» группа пополнилась четвертым членом —Рихардом Курантом, который позднее стал выдающимся представителем американской математики и возглавил блестящую школу в нью-йоркском университете.

В Геттингене я посещал главным образом лекции Гильберта и Минковского. Они были друзьями (еще со школьных лет в Кенигсберге), людьми замечательными и не только в плане их специальности, но и во всем. Гильберт вскоре предложил мне несколько неопределенную должность приватного ассистента — неоплачиваемую, но для меня бесценную, поскольку она предоставляла мне возможность видеть и слышать его ежедневно. Часто Гильберт и Минковский приглашали меня присоединиться к ним во время их длительных прогулок по лесам. Хотя я и привык к свободным и живым дискуссиям между биологами — друзьями моего отца, на меня произвело глубокое впечатление мировоззрение этих двух великих математиков. Я учился у них не только современной математике, но и более важным вещам: критическому отношению к традиционным государственным и общественным институтам, которые я сохранил на всю жизнь.

Вот два примера из бесчисленных «гильбертовских историй», сохраняемых в памяти его учеников и друзей. Однажды разговор коснулся астрологии; некоторые из собеседников склонялись к мысли, что «в ней что-то есть». Когда у Гильберта спросили об его отношении к этому предмету, он сказал после некоторого раздумья: «Когда вы соберете десять мудрейших людей мира и попросите их назвать глупейшую из существующих вещей, они не смогут найти ничего бессмысленнее астрологии». В другой раз, когда обсуждался суд над Галилеем и кто-то упрекнул его за недостаточную твердость в отстаивании своих убеждений, Гильберт гневно возразил: «Но он не был идиотом! Только идиот может считать, что научная истина нуждается в мученичестве; оно, возможно, необходимо в религии, но научные результаты в свое время сами доказывают свою истинность». Такого рода высказывания направляли мой путь в жизни и науке.

В те годы курс математики включал в себя также и математическую физику. Так, например, существовал семинар, руководимый Гильбертом и Минковским, по электродинамике движущихся тел, на котором обсуждались проблемы, в наши дни относящиеся к области теории относительности. Это было в 1905 г., когда знаменитая статья Эйнштейна была уже опубликована, но имя его еще не было известно в Геттингене.

Мои отношения с Клейном складывались не так удачно. Мне не нравились его лекции; они были слишком безукоризненны, на мой вкус. Он заметил, что я часто отсутствую, и высказал мне свое неодобрение. На семинаре по теории упругости, которым он руководил вместе с Карлом Рунге, профессором прикладной математики, я был вынужден в связи с болезнью однокурсника сделать краткий доклад по одной из задач теории упругости, и, поскольку я не имел времени для того, чтобы штудировать литературу, я изложил свои собственные идеи. Это произвело такое впечатление на Клейна, что он представил мою задачу на ежегодный университетский конкурс и написал мне, что он надеется, что я подготовлю соответствующую статью. Поначалу я довольно легкомысленно отказался, однако, поскольку «великий Феликс» был всесилен в математике, я, конечно, уступил: я решил задачу и получил премию. Но так или иначе, а я надолго попал в немилость к Клейну. Поэтому я не рискнул экзаменоваться у него по геометрии и заменил ее на экзамен по астрономии. Профессором астрономии был Карл Шварцшильд — знаменитый отец знаменитого сына — Мартина Шварцшильда из Принстонской обсерватории. Он помог мне изучить современную астрономию, и таким образом в 1907 г. я получил свою докторскую степень.

Неприятный инцидент с Клейном в конце концов обернулся к лучшему. Поскольку по правилам статья для конкурсной комиссии должна была представляться анонимно, я не мог советоваться с профессорами. Так я обнаружил, что способен к самостоятельной научной работе, и впервые почувствовал радость от сознания, что теория находится в соответствии с данными опыта — одно из самых прекрасных ощущений, которые я знаю.

Обучение физики также было стимулирующим. Теоретическую физику читал Вольдемар Фогт. Я посещал его лекции по оптике и факультативный курс экспериментальный оптики. Они были превосходны и явились прочной основой моих знаний в этой области. Много лет спустя (в 1912 г.), когда я был приглашен Альбертом Майкельсоном для чтения курса лекций по теории относительности в Чикагском университете, я все свое свободное время тратил на работы по спектроскопии — с изумительными дифракционными решетками Майкельсона.

Еще несколькими годами позже, вооруженный этими знаниями, я написал удачный учебник по оптике (по-немецки), а через много лет еще один (на этот раз по-английски, совместно с Э. Вольфом [186]). На этом примере видно, что для того, чтобы написать учебник, нет необходимости быть специалистом по соответствующему предмету, достаточно только овладеть его существом и просто много работать.

Мне никогда не нравилась узкая специализация, и я всегда оставался дилетантом — даже и в том, что считалось моим собственным предметом. Я не смог бы приноровиться к науке сегодняшнего дня, которая делается коллективами специалистов. Философская сторона науки интересовала меня больше, чем специальные результаты. Я слушал лекции по философии, например Эдмунда Гуссерля в Геттингене, но не примыкал ни к его, ни к какой-либо иной школе.

Из многих молодых коллег-студентов, с которыми я встречался, хочу отметить только двоих. Константин Каратеодори, грек по национальности, был блестящим математиком. Мы с ним обсуждали, среди прочих, тот странный факт, что такая довольно абстрактная наука, как термодинамика, была построена на столь технической основе, каковой является тепловая машина,—словно иначе нельзя было обойтись. Несколькими годами позднее Каратеодори развил новый строгий и прямой подход к термодинамике; он опубликовал эту свою работу в «Mathematische Annalen» [2] в исключительно общей и абстрактной форме, но его статья осталась почти незамеченной. Спустя еще 12 лет, я предпринял попытку популяризовать его теорию, представив более простое изложение ее для «Physikalische Zeitschrift» [3], однако без особого успеха. Только теперь по прошествии 50 лет появляются учебники, в которых использовано это простое и ясное изложение.

Вторым человеком, оказавшим влияние на мою научную жизнь, хотя это влияние и носило отрицательный характер, был Иоганн Штарк, получивший позднее Нобелевскую премию за открытие допплер-эффекта в каналовых лучах и расщепление спектральных линий в электрическом поле. Он читал тогда лекции по физике, а также курс по радиоактивности. Я начал было посещать его лекции, но изложение предмета меня, как математика, не удовлетворяло, и я перестал на них ходить. В резуль-

---

[2] *C. Caratheodory.* Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik. Mathem. Ann., 1909, 61, S. 355.

[3] *M. Born.* Kinetische Betrachtungen zur traditionellen Darstellungen der Thermodynamik. Phys. Zs., 1921, 22, S. 218, 249, 282.

тате я никогда не изучал собственно ядерной физики и не мог принять участия в ее развитии. Я опубликовал только одну (не плохую) работу об α-распаде (1929 г.). С другой стороны, следствием этого было и то, что я не был привлечен к работам по расщеплению ядра и его применению в атомной бомбе. Это позволило мне рассматривать этические и политические вопросы, связанные с этой проблемой, с объективной точки зрения.

После получения докторской степени я в течение года пробыл на военной службе и был приписан к кавалерийским войскам в Берлине. Здесь не место для дискуссии о том, как этот жизненный опыт повлиял на мое и без того уже изрядно отрицательное отношение ко всему, что связано с военщиной. Я вспоминаю, что во время ночных дежурств в конюшне правил корректуру своей удостоенной премии диссертации, причем использовал спину лошади вместо стола. После тяжелого приступа астмы, которой я страдал еще в детстве, я был отправлен в военный госпиталь и через некоторое время демобилизован. Годом позднее я был снова призван в кавалерийский полк в Бреслау и был страшно рад, узнав, что начальник госпиталя оказался студентом отца, который знал о моей астме. Таким образом, через несколько недель я был вновь демобилизован.

Чтобы глубже изучить фундаментальные проблемы физики, я отправился в Англию, в Кембридж. Там я в качестве аспиранта посещал экспериментальные занятия и лекции в колледже Гонвилля и Кайуса. Я обнаружил, что лекции Лармора по электромагнитной теории практически ничего не добавили к тому, чему я научился у Минковского. Но лекционные демонстрации Дж. Дж. Томсона были великолепны и впечатляющи. Однако наиболее ценным для меня в то время было, несомненно, общение с людьми: доброта и гостеприимство англичан, жизнь среди студентов, великолепие колледжей и страны.

Через шесть месяцев я вернулся домой в Бреслау и попытался усовершенствоваться как экспериментатор. В Бреслау были два профессора физики — Люммер и Прингсгейм, хорошо известные своими работами по изучению черного тела. Однако от них я немногому научился и вскоре вновь обратился к теории. Я натолкнулся на статью Эйнштейна по теории относительности (1905 г.) и был сразу же увлечен ею. Комбинируя его идеи с математическими методами Минковского, я нашел новый строгий путь для вычисления собственной электромагнитной энергии (массы) электрона и рукопись послал Минковскому.

Большим сюрпризом для меня был его ответ, содержавший приглашение вернуться в Геттинген и ассистировать ему в его работе по теории относительности.

Я приехал в Геттинген в декабре 1908 г. и счастливо работал с Минковским в течение нескольких недель. Но в январе 1909 г. он неожиданно умер после операции аппендицита. Все мои надежды рухнули, и я думал, что сел на мель. Но лекция в математическом обществе по моей работе о релятивистском электроне имела такой успех, что профессор Фогт предложил мне приват-доцентуру.

Так я вторично стал жителем Геттингена. Из очень многих людей, с которыми я встречался в течение последующих лет, я отмечу лишь нескольких. Среди моих коллег-лекторов были Отто Теплиц, Рихард Курант. Всем им я очень многим обязан, но более всего венгру — Теодору фон Ка́рману. В течение нескольких лет мы жили с ним в одном доме — до моей женитьбы (в 1913 г.); мы ежедневно обсуждали физические вопросы и, в частности, эйнштейновскую квантовую теорию теплоемкости твердых тел.

С Эйнштейном я впервые встретился в 1909 г. на научном конгрессе в Зальцбурге (о котором также вспоминает Лизе Мейтнер в своей статье «Оглядываясь назад» [4]); и я переписывался с ним в основном по поводу теории относительности. Он принял квантовую гипотезу Планка и уже в 1905 г., т. е. в том же году, когда была опубликована его первая статья по теории относительности, в другой статье ввел идею о световых квантах, или фотонах, и дал объяснение фотоэлектрического эффекта и других явлений, носившее преобразующий характер. В новом его приложении квантовой теории к тепловым свойствам твердых тел Эйнштейн использовал модель единичных осцилляторов для описания колебаний в кристаллах. Его модель приводила к небольшому расхождению между теорией и экспериментом. Карман и я попытались устранить это расхождение, принимая во внимание весь спектр колебаний решетки. Это было за год до опытов Лауэ (совместно с Фрид-

---

[4] *L. Meitner*. Looking back. Bull. of the Atomic Scientists, 1964, N 11, S. 2.

рихом и Книппингом), в которых была экспериментально доказана как волновая природа рентгеновских лучей, так и решетчатая структура кристаллов. Карман и я основывались на теоретико-групповом рассмотрении Федорова и Шенфлиса, которое показалось нам настолько убедительным, что в нашей второй статье, опубликованной после открытия Лауэ, мы даже не упомянули о нем. Это было, конечно, ошибочным решением. Хорошо известно, что Дебай предвосхитил наши результаты на несколько недель, применив приближенный метод, в котором не были в явном виде использованы представления о структуре решетки. С годами простой метод Дебая завоевал бо́льшую популярность, чем наш.

Вскоре после окончания этой работы Карман и я разделились. Он специализировался в области гидродинамики и аэродинамики, в которых достиг широкой известности, и после своей эмиграции (в 1933 г.) стал ведущей фигурой в США и оказал большое влияние на развитие авиации.

Я продолжал заниматься физикой. Работа по теплоемкости твердых тел определила два основных направления моих последующих исследований — динамика решетки и квантовая теория.

С этого момента я стал физиком.

II. Что я сделал как физик

В 1912 г. я начал работать по большой программе — вывести все свойства кристаллов на основе представления о кристаллической решетке, частицы которой могут быть смещены под воздействием внешних сил. Эта работа заняла несколько лет. Основными ее результатами было объяснение отклонений от соотношений Коши между упругими постоянными, доказательство того, что спектр колебаний состоит из полос двух типов — оптической и акустической, и приложение к динамике решетки превосходной теории П. Эвальда об электромагнитных волнах в кристаллах.

Объем полученных результатов был так велик, что только некоторые из них могли быть опубликованы в виде отдельных статей; я принял решение систематизировать все в виде монографии. Как раз к тому моменту, когда разразилась война 1914 г., я получил профессуру в Берлине, чтобы облегчить Планку бремя его преподавательской деятельности. Мы прибыли в Берлин весной 1915 г. Я начал читать лекции, но очень скоро должен был прервать их, так как был призван в армию. После непродолжительной службы в авиации (по радиосвязи) я был, по просьбе нашего друга Ладенбурга, переведен в артиллерийское исследовательское ведомство. Там я был прикреплен к отделу, который занимался определением местоположения орудий по измерению моментов регистрации звуковых сигналов в разных местах наблюдения. В комнате вместе со мной работало несколько физиков, и вскоре мы, когда это позволяло время, начали заниматься настоящей наукой. Ланде́ и я пытались определить внутреннюю энергию ионных кристаллов и достигли успеха с помощью Маделунга, который разработал метод расчета энергии кулоновых сил в решетках (константа Маделунга). С использованием этих результатов я получил выражение для теплоты образования простых гетерополярных молекул — первый пример определения химической теплоты реакции на основе чисто физических данных. Мне посчастливилось сотрудничать с химиком Фрицем Габером, и работа наша обычно называется теорией Борна — Габера.

В течение мрачных военных дней (когда было трудно добыть необходимое семье пропитание) меня особенно поддерживала дружба с Эйнштейном. Мы очень часто виделись, иногда вместе играли скрипичные сонаты и обсуждали не только научные вопросы, но — при живом участии моей жены — также и военную и политическую ситуацию. Мы резко осуждали политические цели германского правительства и были убеждены, что они приведут к несчастьям. В течение этих лет Эйнштейн закончил разработку своей общей теории относительности и обсуждал ее со мной. Я находился под таким впечатлением от величия его идей, что решил никогда не работать в этой области. Но я защищал эйнштейновскую теорию от нападок и вскоре попытался популяризировать ее — написал книгу, которая недавно была издана в переработанном виде в США [159, 173].

Вместе мы пережили военное поражение, революцию в Берлине и провозглашение Германской Республики. Поскольку руководство ею осуществлялось из Веймара, а не из Потсдама, мы надеялись на мирное будущее.

В это время Макс фон Лауэ (франкфуртский профессор) написал Планку, что мечтает жить в Берлине, рядом со своим любимым учителем. Он предложил мне поменяться с ним местами, и, поскольку оба университета были согласны с этим, я был переведен во Франкфурт. Там я получил в свое распоряжение небольшой институт, оснащенный оборудованием для экспериментальных исследований; кроме того, в помощь мне был предоставлен механик. Моим первым ассистентом стал Отто Штерн; он незамедлительно — и с большой пользой — реализовал наши экспериментальные возможности. Он разработал методику молекулярных пучков для изучения свойств атомов и использовал ее прежде всего для экспериментальной проверки закона максвелловского распределения молекул газа по скоростям, а затем с помощью Герлаха (ассистента экспериментального отдела, возглавлявшегося Вахсмутом)— для исследования странного результата квантовой теории, известного под названием «пространственного квантования». Эксперимент Штерна и Герлаха справедливо считается одним из фундаментальных доказательств того, что классическая механика неприменима к атомным размерам и что она должна быть заменена новой квантовой механикой.

Я тоже попытался приобщиться к экспериментальной работе. Со своим вторым ассистентом, госпожой Борманн, я разработал метод определения длины свободного пробега пучка атомов серебра в воздухе. Эта работа была позднее продолжена моим учеником (Ф. Бильцем) в Геттингене с более отработанной методикой и недавно была усовершенствована в нескольких лабораториях для определения сил взаимодействия между атомами и молекулами (например, К. Г. Бенневитцем и Д. П. Теннисом в Бонне).

А. Ланде, позднее профессор в Колумбусе (штат Огайо), работал в моем отделе в качестве гостя. Именно здесь он с помощью искусных численных расчетов нашел свои знаменитые формулы для тонкой структуры мультиплетов в линейчатых спектрах и так называемого аномального эффекта Зеемана, которые стали одним из краеугольных камней квантовой механики.

Сам я продолжал работу по энергии решетки и ее химическим приложениям. Профессор физической химии Р. Лоренц обратил мое внимание на аномалии подвижностей одновалентных ионов (ионы, бóльшие по размерам, оказываются более подвижными, чем меньшие). Я дал объяснение этого явления в рамках более общего исследования, которое можно было бы назвать спектрогидродинамическим — по аналогии с современной магнитной гидродинамикой. Наличие механического эффекта молекулярных электрических диполей было затем экспериментально подтверждено мною в сотрудничестве с П. Лерте: было показано, что стеклянная колба, наполненная непроводящей жидкостью, приводится во вращательное движение с помощью быстро вращающегося электрического поля.

После двух лет пребывания во Франкфурте я был приглашен на должность директора физического отделения (как теоретического, так и экспериментального) в Геттинген — в качестве преемника Питера Дебая. Несмотря на несколько моих попыток заниматься экспериментом, я не чувствовал себя вправе руководить большой лабораторией, которая в мои студенческие годы состояла из двух независимых отделов. Мне удалось убедить министра образования вновь разделить институт и пригласить в Геттинген моего старого друга Джеймса Франка. В результате образовалось три института. Их возглавили трое профессоров: Роберт Поль (который к тому времени уже был экстраординарным профессором), Джеймс Франк (по экспериментальной физике) и я сам (по теоретической физике). Такая перестройка оказалась очень удачной. Мы имели объединенный коллоквиум, на котором по очереди председательствовали. Вскоре подтвердилась правильность моего предложения о приглашении в Геттинген Франка: он и Густав Герц были удостоены Нобелевской премии за работу по возбуждению спектров, подтвердившую боровскую квантовую теорию атома (1925 г.).

Итак, третий период моего пребывания в Геттингене начался в 1921 г. при добрых предзнаменованиях. В течение первых нескольких лет я продолжал работать вместе с моими учениками по динамике решетки. При этом было начато исследование в новом направлении — по термодинамике кристаллов, которое я проводил в сотрудничестве с молодым, исключительно способным венгром Э. Броди (позднее погибшим в фашистском концентрационном лагере). Зоммерфельд, редактор физической части «Математической энциклопедии», предложил мне написать статью об атомной теории твердых тел. Работа над ней заняла у меня много времени; статья появилась позднее (см. также книгу «Атомная теория твердого состояния» [161]). Мой учитель Фогт для вывода свойств кристаллов использовал представления о симметрии, которые были эквивалентны теории групп. У меня возникла идея приложить эту теорию к молекулам; эта работа была проведена моим голландским учеником К. Ж. Брестером и опубликована им в качестве докторской диссертации в Утрехте. Последняя статья явилась предтечей вигнеровского приложения теории групп к электронной структуре атомов.

Мои основные интересы вскоре обратились к квантовой теории. В лице своих первых двух ассистентов — Вольфганга Паули и Вернера Гейзенберга — я имел энергичнейших и исключительно квалифицированных сотрудников, каких только можно себе представить. Мы начали, конечно, с теории электронных орбит Бора, но сконцентрировали внимание на слабых сторонах этой теории, когда она не находилась в согласии с экспериментальными данными. Так мы начали исследования новой «квантовой механики». Прежде всего мы попытались заменить дифференциальные операции конечно-разностными, содержащими постоянную Планка; мой ученик П. Иордан и я получили весьма обнадеживающие результаты, относящиеся к радиационной формуле и другим вопросам. Затем в 1925 г. Гейзенберг порадовал нас новой идеей: исходя из того принципа, что нельзя пользоваться ненаблюдаемыми величинами (такими, как размеры и частоты электронных орбит), он ввел некое символическое исчисление и получил ряд многообещающих результатов, относящихся к простым системам (линейный и нелинейный осцилляторы). После представления его работы к печати я думал о гейзенберговском формализме и обнаружил, что он идентичен матричному исчислению, хорошо известному математикам. В сотрудничестве с П. Иорданом нами были установлены простейшие свойства «матричной механики» [5]; затем мы втроем систематически развили эту теорию. Ее результаты были настолько удовлетворительными, что не оставалось сомнений в ее правильности [6].

---

[5] *M. Born, P. Jordan.* Zur Quantenmechanik. Zs. Phys., 1925, 34, S. 858.

[6] *M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan.* Zur Quantenmechanik, II. Zs. Phys., 1926, 35, S. 557.

Спустя короткое время, Дирак (Кембридж), также стимулируемый первой работой Гейзенберга, независимо разработал подобную же теорию, используя более общее исчисление некоммутирующих величин.

Затем начали появляться работы Шредингера по волновой механике (1926 г.). Казалось, что теперь имеются две совершенно независимые теории, но вскоре сам Шредингер продемонстрировал их математическую эквивалентность. Он рассматривал электрон не как частицу, но как некоторое распределение плотности, которое давалось квадратом его волновой функции $|\psi|^2$. Он считал, что следует полностью отказаться от идеи частиц и квантовых скачков и никогда не сомневался в правильности этого убеждения.

Я, напротив, имел возможность каждодневно убеждаться в плодотворности концепции частиц, наблюдая за блестящими опытами Франка по атомным и молекулярным столкновениям, и был уверен, что частоты не могут быть просто упразднены. Следовало найти путь к объединению частиц и волн. Я видел связующее звено в идее вероятности. В нашей статье, написанной втроем, был раздел (гл. III, § 2), принадлежащий одному мне [7]. В нем фигурировал вектор x с компонентами x_1, x_2, x_3..., на который действуют матричные операторы. Ему не придавалось какого-либо смысла; я думал, что он имеет отношение к распределению вероятности. Но лишь после того, как стала известна шредингеровская работа, я смог показать, что эта догадка была правильной и что вектор x есть непрерывное представление волновой функции ψ, так что $|\psi|^2$ — плотность вероятности в конфигурационном пространстве. Эта гипотеза была подтверждена описанием процессов соударений в терминах рассеяния волн и другими методами. В несколько иной форме теория столкновений была независимо разработана Дираком.

Все эти работы были прерваны во время моего визита в Америку (зимой 1925/26 г.), где я читал лекции в Массачузетском технологическом институте (MIT) по теории кристаллов и квантовой механике. Маленькая книга, вышедшая под названием «Проблемы атомной механики» (был издан и немецкий ее вариант [162]), написанная на основе этих лекций, была, насколько я знаю, первой кни-

---

[7] Kapitel III, § 2 «Anwendung auf Störungstheorie».

гой по квантовой механике. В сотрудничестве с Норбертом Винером (прославившимся в связи с кибернетикой, основоположником которой он является) я пытался распространить матричную теорию непрерывного энергетического спектра на случай более общих систем (свободные частицы) с прерывным спектром; мы развили операторное исчисление, которое очень близко примыкало к шредингеровскому методу, в то время нам неизвестному. Моя статистическая интерпретация ψ-функции была только первым шагом в нашем понимании взаимоотношений частицы-волны в атомной физике. Наиболее важным вкладом в уяснение этой идеи были соотношения неопределенностей Гейзенберга и принцип дополнительности Бора. Хотя подавляющее большинство физиков присоединились к этому толкованию, некоторые его отклонили, причем среди них были такие крупнейшие ученые, как Планк, Эйнштейн, де Бройль и Шредингер, которые были лидерами на первом этапе развития квантовой теории Этим можно объяснить то, что за свою работу я получил Нобелевскую премию лишь 28 лет спустя (в 1954 г.).

После возвращения из США мой отдел стал центром притяжения для физиков-теоретиков из Америки, а также и из многих других стран; среди этих ученых многие позднее добились выдающихся результатов. Это было волнующее время. Независимо от официальных коллоквиумов мы устраивали частные дискуссии по вечерам у меня дома. Мне, уже немолодому человеку, было очень трудно находить общий язык с молодежью. Я работал с большим напряжением, и это привело к нервному расстройству (в 1928 г.), так что я был вынужден прекратить исследовательскую работу и преподавание примерно на один год и в дальнейшем быть более осторожным. В это время пониженной научной активности я начал записывать свои лекции по оптике. Но вместо того, чтобы написать короткий учебник, как я предполагал, лекции вылились в том устрашающих размеров; о нем я уже упоминал.

Тем временем закончились сравнительно мирные 20-е годы, и после финансовой катастрофы в Америке (разразившейся около 1930 г.) стало усиливаться влияние Гитлера и нацистов. Мы с возрастающим ужасом следили за их восхождением. После того как Гитлер стал государственным канцлером, мы поняли, что не остается никаких надежд. И действительно, вскоре наступил день, когда я нашел в газетах свое имя среди отстраненных от работы по расовым соображениям. Мы покинули Германию (май 1933 г.) и свое первое убежище обрели в итальянском южном Тироле. Мы были так очарованы красотой весны в Доломитах, что почти забыли о бедствиях и ненадежности нашей жизни. Очень скоро из разных стран на мое имя стали поступать приглашения на работу: одно из них — в Кембридж, в Англию, я принял, так как знал язык и страну.

Нет худа без добра. Ибо ничто не действует на человека столь целительным и освежающим образом, как если он оказывается с корнем вырванным из привычной обстановки и окружения. Даже моя жена, которая вдали от родины страдала гораздо больше, чем я, рассматривала позднее нашу вынужденную эмиграцию как своеобразный выигрыш. Впрочем, это характерно для большинства людей с интернациональными связями. Многие мои родственники и друзья погибли в концентрационных лагерях или покончили с собой. В Кембридже я и моя жена уделяли значительную часть нашего времени, пытаясь помочь людям эмигрировать. Нам был оказан в Кембридже очень дружественный прием. Помимо моего старого колледжа Гонвилля и Кайуса, я был принят в колледж св. Джона, в котором работал Дирак. Университет присудил мне степень магистра искусств. Было большой радостью оказаться в Кавендишской лаборатории рядом с Резерфордом, Вильсоном, Астоном, Чадвиком, Фаулером, Олифантом, Кокрофтом и многими другими первоклассными физиками.

Я читал лекции и работал над идеей, которая пришла мне в голову, когда я в одиночестве находился в Доломитах, а именно, о нелинейной модификации максвелловской теории электромагнитного поля, в которой собственная энергия (электромагнитная масса) точечного заряда конечна. Эта идея могла возникнуть примерно двадцатью годами ранее, но тогда она могла бы направить теоретические исследования по ложному пути — в сторону от квантовой механики, хотя и могла бы дать им ощутимый толчок. Эту работу я проводил в сотрудничестве с Леопольдом Инфельдом из Польши. В конечном счете так называемая теория Борна — Инфельда сошла на нет, поскольку ее нельзя было согласовать с квантовой механикой. В течение этого кембриджского периода я опубликовал учебник «Атомная физика» [167], который выдержал уже семь изданий, а также популярную книжку, названную мною «Беспокойная Вселенная».

Когда в 1936 г. истек срок моего пребывания в Кембридже [8], я получил приглашение от сэра Вената Рамана, главы Индийского института науки в Бангалоре. Я принял его и провел в Индии полгода вместе с женой. Это было впечатляющим событием, однако мне нечего сказать о научных результатах этого периода.

После нашего возвращения в Кембридж я получил письмо от П. Капицы с предложением хорошего места в Москве; это предложение мы серьезно обсуждали. Но немного позднее мой друг — Чарльз Галтон Дарвин, профессор натурфилософии в Эдинбурге (это понятие в Шотландии соответствует физике), написал мне, что покидает университет, чтобы возглавить колледж в Кембридже, и переслал мне предложение от университета стать его преемником.

Мы отправились в Шотландию и прожили там 17 лет — даже дольше, чем в Геттингене. Мы полюбили чудесный старый город, страну, самих шотландцев, и были там счастливы. Однако я не могу подробно останавливаться на этом и скажу только несколько слов о моей работе. Как обычно, я переходил от одного вопроса к другому и привлекал к их решению необходимых учеников и сотрудников. Я назову лишь нескольких из них. Первый, Рейнгольд Фюрт, профессор немецкого университета в Праге, который эмигрировал в Англию перед самым началом войны, оказал мне большую помощь в работе с моими учениками по термодинамике кристаллов и в других областях. Другой — Клаус Фукс — очень талантливый человек, который никогда не скрывал того, что он — коммунист, после начала войны и непродолжительного интернирования в качестве иностранца, прибывшего из вражеской страны, присоединился к британской работе по исследованию ядерного деления. Третьим был Герберт Сидней Грин, ныне профессор в Аделаиде (Австралия), с которым я работал по кинетической теории конденсированных газов и жидкостей. Наши работы были собраны в небольшую книгу [169]. Работа по кристаллам, которую мы проделали, относилась в основном к опре-

---

[8] М. Борн был приглашен в Кембридж на ограниченный срок.— *Прим. пер.*

делению колебательных спектров решетки по данным о диффузном рассеянии ретнгеновских лучей и раман-эффекту; международный конгресс, состоявшийся недавно (в 1963 г.) в Копенгагене, показал мне, что эти задачи вновь оказались в центре внимания физики твердого тела, так как использование нейтронов вместо рентгеновских лучей обеспечило получение гораздо большего количества и лучших экспериментальных данных. Мы также продолжали в различных направлениях работу над идеей, принадлежащей мне и названной принципом взаимности (principle of reciprocity). Ее целью было объяснение существования и свойств элементарных частиц, но она не привела ни к чему, так как экспериментальный материал в то время был слишком скудным. Мне кажется теперь, что эти идеи могли бы быть приложены к вновь открытым короткоживущим частицам и резонансам.

Среди моих студентов было четверо очень талантливых китайцев; с одним из них, Кун Хуаном, ныне профессором в Пекине, я написал новую книгу о динамике кристаллической решетки, в которой систематически использована квантовая механика [170].

Для всей этой деятельности я располагал поначалу только двумя (а позднее тремя-четырьмя) комнатами в полуподвальном помещении, а мой бюджет никогда не превышал нескольких сотен фунтов в год (в Геттингене он был равен нескольким тысячам марок). Мы всегда были окружены людьми, поскольку число студентов было довольно значительным; среди них было мало шотландцев, большинство же составляли люди со всего света. Административные обязанности и чтение более элементарных курсов было поручено моим сотрудникам Р. Шлаппу и А. Нисбету. В течение последних лет штат сотрудников был пополнен Э. Вольфом, с которым мы написали вторую большую книгу по оптике («Принципы оптики» [172]).

В 1948 г. меня пригласили прочесть вайнфлетовские лекции в колледже св. Магдалины в Оксфорде. Они были опубликованы под названием «Натуральная философия причины и случая» [14] и переизданы теперь в Америке. В этой книге я попытался сформулировать философские идеи о науке, которые я развивал как физик всю свою жизнь.

Я хотел бы рассказать о многих моих друзьях и коллегах-профессорах, но вынужден ограничиться нескольками. Кафедру экспериментальной физики возглавлял Баркла, известный как исследователь характеристического поглощения рентгеновских лучей различными элементами. Главой математического отдела был Эдвард Уиттекер, который часто помогал мне в моей работе. Философ Кемп-Смит был моим ближайшим другом и учил меня, как стать шотландцем, с сомнительным, впрочем, успехом.

В Эдинбурге работа по оказанию помощи эмигрантам продолжалась, но ее вела в основном моя жена, которая вступила в общество квакеров. Эта организация, а также и многие другие, ей подобные, спасли сотни людей от концентрационных лагерей и газовых камер. Годы войны в Эдинбурге были так же мрачны и угнетающи, как и повсюду, но, как это ни странно, на город не совершались большие воздушные налеты.

После войны жизнь стала ярче, особенно тогда, когда в Эдинбурге начали проводиться фестивали музыки и драмы, получившие вскоре всемирную известность. Появилось много старых друзей, которых мы не видели долгие годы, среди них —пианист Артур Шнабель и другие музыканты. Мы также получили возможность посетить континент, а когда Геттинген предложил мне, Франку и Куранту «почетное гражданство», мы приняли это предложение после некоторых колебаний. За этим первым визитом в Геттинген последовали другие, и когда в конце 1953 г. я достиг предельного возраста, мы решили вернуться на родину. Я не могу обсуждать здесь причины, побудившие нас принять это решение, но хотя некоторые из моих друзей, в частности и Эйнштейн, отвергали их, мы не сожалеем о предпринятом шаге. Мы выбрали небольшой курорт Бад-Пирмонт в очаровательной сельской местности неподалеку от Геттингена, но все же на достаточном расстоянии от него, чтобы быть вдали от шумной толпы. Здесь я нашел для себя новую область деятельности. Но, прежде чем я скажу о ней несколько слов, я хочу заметить, что не оставил физику и продолжил изучение ее философских основ.

При уходе с эдинбургской кафедры я получил юбилейный сборник, изданный в мою честь, содержащий статью Эйнштейна, в которой он представил сжатые, но четкие аргументы против статистической интерпретации квантовой механики, основанные на его концепции физической реальности [9]. Я не мог с ними согласиться и, более того, считал, что математическая сторона в рассмотренном им примере неудовлетворительна. Я написал ответ, где пытался обосновать свою статистическую точку зрения, показывая, что требования классической механики о детерминированности неоправданны, поскольку они основываются на предположении о том, что абсолютная точность данных имеет физический смысл, а как раз это я считал абсурдным. Таким образом, я развил статистическую формулировку классической механики. Затем я дал строгую квантовомеханическую обработку примера, предложенного Эйнштейном, и показал, что в классическом пределе он точно приводит к результату, полученному ранее из моей статистической формулировки классической механики.

Эйнштейн ответил, что я неправильно его понял, поскольку его возражения имеют отношение к концепции реальности, а не детерминизму. Последующая переписка изобиловала примерами взаимного непонимания. Паули, который как раз в то время находился в Принстоне, пытался выступить в качестве посредника и откровенно сказал мне, что я был плохим слушателем, когда дело касалось точек зрения других людей. Думаю, что он был прав. Но он помог мне пересмотреть мою статью, и ее окончательный вариант, который был опубликован на страницах номера «Transactions» Датской академии, посвященного 70-летию Бора, заслужил полное одобрение Паули [10]. Хотя дискуссия с Эйнштейном была довольно резкой, она не оказала влияния на нашу дружбу [11].

---

[9] «Scientific papers presented to Max Born». Edinburgh, Oliver a. Boyd, 1953. Эту статью Эйнштейна («Элементарные соображения по поводу интерпретации квантовой механики») см. в кн.: *А. Эйнштейн.* Собрание научных трудов, т. 3. М., «Наука», 1966, с. 617.

[10] Proc. of the Danish Academy, 1955, 30, N 2. *M. Born.* Continuity. Determination and Reality.

[11] Дискуссия между М. Борном и А. Эйнштейном опубликована в юбилейном сборнике, посвященном 70-летию со дня рождения Эйнштейна. Соответствующие статьи переведены на русский язык: *М. Борн.* Статистические теории Эйнштейна [184]; *А. Эйнштейн.* Автобиографические заметки.— Собрание научных трудов, т. 4. М., «Наука», 1967; Замечания к статьям.— Там же. Элементарные соображения по поводу интерпретации основ квантовой механики (опубликована в сборнике, посвященном М. Борну: «Papers, presented to Max Born». Edinburgh, 1953; см. русский перевод в кн.: *А. Эйнштейн.* Собрание научных трудов, т. 3. М., «Наука», 1966).

В Бад-Пирмонте я продолжал работу в этом направлении. В конечном итоге она привела к публикации статьи (совместно с В. Людвигом [12]), в ней была выведена формула, которая описывает движение свободного (например, вращающегося) тела во всех случаях — от квантовой области с дискретными состояниями до классической области непрерывности.

Теперь я подхожу к моим основным занятиям в Германии в течение последних лет. Они связаны с социальными, экономическими и политическими аспектами науки, прежде всего с атомной бомбой, но включают в себя и другие патологические симптомы науки нашего века — такие, как ракеты, космические путешествия, перенаселенность и т. д. Когда я приехал в ФРГ (в 1954 г.), в ней не проявлялось особого интереса к этим вопросам. Теперь здесь создано общество, названное V. D. W. (Vereinigung Deutschen Wissenschaftler — Объединение немецких ученых), которое активно занимается этими проблемами — не без влияния на правительство. Появился журнал «Atomzeitalter» («Атомный век»), подобный «Бюллетеню ученых-атомщиков».

Эти мои заметки вряд ли можно назвать биографией, поскольку они содержат большей частью результаты профессиональной стороны моей жизни и почти не касаются ее человеческих сторон, моей семьи, моего отношения к литературе, искусству, музыке. Тех, кто хотел бы проверить то, что я сказал о своих работах, можно адресовать к изданию, явившемуся большой честью для меня и предпринятому Геттингенской академией, опубликовавшей два тома моих избранных работ [13].

Ниже приводится список выдающихся ученых, которые работали в институтах теоретической физики во Франкфурте и Геттингене в те годы, когда я был их директором

---

[12] *M. Born, W. Ludwig.* Zur Quantenmechanik des kräftefreien Teilchen. Zs. Phys., 1958, **150**, S. 106.

[13] *M. Born.* Ausgewählte Abhandlungen. Herausgegeben von der Akademie der Wissenschaften in Göttingen. Bd. 1—2. Göttingen, Vandenhoeck u. Ruprecht, 1963. 1-й том избранных работ М. Борна содержит 46 статей по механике, теории относительности, термодинамике, теории кристаллической решетки и теории атомов, молекул и жидкостей; во 2-м томе собрано 47 статей по квантовой механике и теории поля; в это число входит и 16 мемориальных статей (о Гильберте, Абрагаме, Зоммерфельде, Лоренце, Эйнштейне и других выдающихся физиках).

Ассистенты: Отто Штерн (Нобелевский лауреат), В. Паули (Нобелевский лауреат), В. Гейзенберг (Нобелевский лауреат), Е. Гюккель, Ф. Хунд, В. Гейтлер, Л. Нордхейм, Л. Розенфельд.

Получившие докторскую степень (в стенах институтов): П. Иордан, Ф. Хунд, В. Эльзассер, М. Дельбрюк, Р. Оппенгеймер, Мария Гепперт-Майерт (Нобелевский лауреат).

Сотрудники: А. Ланде, И. Сугиура, В. Фок, Э. Хиллерос, Н. Винер, Ю. Румер, Д. Майер.

Гости (участники коллоквиумов или моих частных дискуссионных вечеров; некоторые из них приняли участие в исследованиях, проводившихся в институтах): Д. Е. Леннард-Джонс, Е. У. Кондон, О. Клейн, П. Дирак (Нобелевский лауреат), Э. Ферми (Нобелевский лауреат), Я. И. Френкель, И. Е. Тамм (Нобелевский лауреат), Н. Мотт, Ф. Лондон, Л. Полинг (Нобелевский лауреат), И. фон Нейманн, Э. Теллер, Е. П. Вигнер (Нобелевский лауреат) [14].

ГИЛЬБЕРТ И ФИЗИКА [49]

В 1905 г. заседания геттингенского физико-математического семинара, которым сообща руководили Минковский и Гильберт, посвящались электронной теории. Импульс — углубиться в эту теорию,—отвлекший обоих друзей-математиков от непосредственной области их работы, исходил от Минковского, которого увлекли тайны и загадки лоренцевской электродинамики. Он увидел в ней благодарное поле приложения своих геометрических и алгебраических способностей. Автор этих строк, которому посчастливилось принимать участие в этом семинаре в качестве студента, вспоминает об увлекательных и волнующих часах, заполненных обсуждением фитцджеральдовского сжатия, лоренцевского местного времени и других, казавшихся тогда еще фантастическими, положений электродинамики; Гильберт участвовал в дискуссии, внося ясность и требуя ясности. Эти часы учебы стали знаменательными, ибо здесь

[14] Глава III настоящей работы опущена.— *Прим. ред.*

оба математика получили начальные толчки к тем работам, которыми каждый в свое время внес свой вклад в развитие теории относительности.

Достижения Минковского в этой области достаточно хорошо известны. К тому времени, когда появилась первая знаменитая работа Эйнштейна, содержавшая представление об относительности времени, Минковский уже открыл математическую структуру полевых уравнений эфира, дал их представление в четырехмерном пространственно-временно́м мире и осознал значение инвариантности законов природы относительно группы преобразований Лоренца. Но лишь в 1908 г. он предал гласности свои мысли, после того как ему удалось вывести из принципа относительности уравнения поля для движущихся весомых тел.

В то время Гильберт с сочувствием, доходящим порой до восхищения, следил за работами своего друга, ибо в нем жила вера в простоту и ясность природы, чувство, обычное для естествоиспытателя, но не всегда свойственное математикам. В результатах Эйнштейна и Минковского он видел подтверждение этой веры. Но с собственными физическими работами он пока не выступал, даже после того как в 1909 г. Минковский внезапно умер, оставив множество нерешенных задач. Это было время, когда Гильберт доводил до завершения свою теорию интегральных уравнений и квадратичных форм с бесконечным числом переменных. Но если даже эти исследования занимали его полностью, не позволяя творчески вступить на указанный Минковским путь, с того времени он никогда не переставал интересоваться физическими проблемами. Учение об интегральных уравнениях было тоже тесно связано с методами классической теоретической физики, прежде всего с краевыми задачами, появляющимися в теории потенциала и многих дифференциальных уравнениях физики. Физики-теоретики развили здесь два существенно различных метода решения: метод рядов по примеру рядов Фурье и метод функции Грина. Эти методы можно понять на примере теплопроводности тонкого стержня: либо мы рассматриваем распределение температуры как суперпозицию простых гармонических синусоидальных температурных волн (разложение в ряд Фурье), либо мы представляем себе во всех точках стержня бесконечно малые источники тепла, определяя их так, чтобы совместное действие всех источников обеспечивало фактическое распределение температуры (интегральное уравнение, ядром которого является функция Грина). Гильберт в самом общем виде установил отношение этих подходов к линейным интегральным уравнениям второго рода; на этом пути ему не только удалось объединить разнообразные теории дифференциальных уравнений физики, но и заполнить многие пробелы, которые болезненно докучали математикам, а именно, установить теоремы о существовании решений и сходимости рядов, на трудность которых физики, жадные до добычи, обычно просто не обращают внимания. Сегодня, например, все задачи о колебаниях в механике и физике представляются как перенос теории «главных осей эллипсоида» на случай «бесконечно мерного пространства», т. е. многообразия всех функций, разлагающихся в ряд со счетным числом коэффициентов (степенные ряды, ряды Фурье и т. д.).

Хотя таким путем были достигнуты цельность, строгость и ясность, тем не менее физикам применение интегральных уравнений редко оказывало помощь в расчетах. Для практических целей старые методы дифференциальных уравнений оказывались в большинстве случаев более удобными; а недавно Куранту удалось очень наглядным способом прямо обосновать теоремы существования и сходимости методами вариационного исчисления и дифференциальных уравнений. Если вернуться к физическому происхождению математического уравнения, то в качестве первичного выражения опытных фактов и гипотез иногда встречаем дифференциальное уравнение, иногда — интегральное; в учении об электрическом равновесии, например, допущение о существовании сил дальнодействия, подчиняющихся закону Кулона, прямо ведет к интегральному уравнению для плотности распределения зарядов; наоборот, в тех теориях, в которых действие распространяется от точки к точке и которые со времен Фарадея и Максвелла господствуют в учении об электромагнитном поле, начальным является дифференциальное уравнение (Пуассона). Математически оба подхода эквивалентны, если дифференциальное уравнение снабжено правильными начальными и граничными условиями. Но существуют и такие области физики, где выбора нет и где реальные физические понятия однозначно ведут к интегральному уравнению как выражению фактов. Гильберт нашел подобную область сначала в кинетической теории газов, и свое собрание работ по интегральным уравнениям (издательство Тойбнера, 1912 г.) он завершил изложением именно этой теории, очевидно весьма обрадованный мощью предложенного им аналитического метода, применяемого здесь для объяснения действительно до тех пор темного места в логической структуре молекулярной физики.

Максвелл и Больцман следующим образом выразили в одном уравнении гипотезы кинетической теории газов. Пусть x, y, z — координаты, а ξ, η, ζ — компоненты скорости молекул; число молекул, находящихся в элементе объема $dxdydz$ с компонентами скорости в области $d\xi d\eta d\zeta$, будет $Fdxdydzd\xi d\eta d\zeta$, где «функция распределения» F зависит, кроме $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, еще и от времени. Если F известно, то можно вычислить средние значения всех наблюдаемых величин, например видимую среднюю скорость, по формуле

$$\frac{\int F\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,d\xi d\eta d\zeta}{\int F d\xi d\eta d\zeta}.$$

Для определения F нужно себе представить, что общее изменение функции F во времени под действием ускоряющей силы с компонентами X, Y, Z

$$D(F)=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}\xi+\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial z}\zeta+\frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{X}{m}+\frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{Y}{m}+\\+\frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{Z}{m},$$

вызвано взаимными столкновениями, вследствие которых одни молекулы выбрасываются из рассматриваемой области, в то время как другие входят в нее. В предположении совершенно беспорядочного молекулярного движения результирующее изменение является интегралом $J(F)$, подынтегральное выражение которого зависит квадратично от F; отсюда получается интегродифференциальное уравнение $D(F) = J(F)$, являющееся точной основой для всех газокинетических следствий.

Эти следствия были получены ранее Максвеллом, Больцманом и другими, и оказалось, что законы макроскопического движения теплового равновесия в газах были установлены качественно правильно. Но цепь математических заключений была неоднозначной и несколько произвольной; в некоторых местах необходимо было прибегать к образованию средних значений, так как строгий расчет казался невозможным, и этим вводилась неопределенность в расчете характеристик газа (например, коэффициентов теплопроводности и трения). А ведь однозначное определение этих констант как раз и было главной целью теории. Именно тут в дело включился Гильберт. Он заметил, что принятый физиками приближенный метод решения основного уравнения может быть представлен как разложение в ряд по степеням некоторого параметра, соответствующего в старой теории средней длине свободного пробега. При этом первое приближение известным образом дает законы для покоящегося газа (прежде всего для F — максвелловское распределение), а высшие приближения являются линейными интегральными уравнениями второго рода с симметричным ядром. К последним применима общая теория интегральных уравнений, дающая с неизбежностью и без произвола не только механические и тепловые законы газов, но и однозначные правила расчетов, по которым можно определить численное значение констант, как только известны законы действующих при соударениях сил притяжения и отталкивания. И наоборот, впервые стало возможным делать определенные заключения о молекулярных силах по экспериментальным данным относительно констант газов. Подобные расчеты были между тем выполнены Чепменом и Энскогом (с несколько модифицированным методом Гильберта). Полученным при этом материалом смог воспользоваться Дебай, когда ему понадобилось проверить на опыте свою электрическую теорию молекулярных сил. Так придуманные Гильбертом математические методы косвенно обогатили современное учение об атоме.

Развитый Гильбертом для решения основного газокинетического уравнения метод имеет всеобщую значимость и оказался плодотворным и в других областях. Его можно описать кратко следующим образом: при последовательных приближениях первое уравнение однородно, а остальные — неоднородны с той же левой частью; например, в теории газов

$$J(F_0)=0, \qquad J(F_1)=D(F_0),\ldots$$

Если теперь первое уравнение имеет решение, то второе имеет его не всегда, а лишь тогда, когда правая часть удовлетворяет определенным требованиям. Эти условия существования решения, которым должны удовлетворять входящие в F_0 параметры (плотность, температура, компоненты средней скорости), как раз и дают макроскопические законы движения и потока тепла.

Эти соображения дают общий способ неизбежного, без произвольного образования средних значений, получения простого уравнения для немногих измеримых величин из запутанных законов огромного числа переменных молекулярного мира. Некоторые ученики Гильберта успешно применили описанный метод к проблеме движения ионов в электролитах и движения электронов в металлах. Особенно оправдал себя метод в кинетической теории твердых тел, и автор настоящей статьи посвятил Гильберту свою книгу по динамике кристаллической решетки. Он счел это лучшим выражением признания заслуг учителя в достигнутых им успешных результатах.

Гильберт открыл и второй случай, где физическая задача прямо ведет к интегральному уравнению, а именно *элементарную теорию излучения.* Под этим понимаются те установленные впервые Кирхгофом законы, которые определяют геометрическое и энергетическое поведение излучения в термодинамическом равновесии. Наиболее известный из этих законов обычно формулируется так: отношение испускательной способности к поглощательной в случае чисто теплового излучения является универсальной функцией температуры и длины волны, т. е. оно не зависит от природы и остальных характеристик состояния тела. Вместо применявшихся Кирхгофом интегральных понятий «испускательной и поглощательной способности» Планк ввел относящиеся к единице объема величины «коэффициент испускания» ε и «коэффициент поглощения» α; он показал, что в новых терминах закон Кирхгофа можно выразить в следующей форме: образованная из ε, α и скорости света q величина $q^2\varepsilon/\alpha$ не зависит от природы вещества, а является универсальной функцией температуры и частоты. Первая работа Гильберта имела целью обосновать этот закон без тех упрощающих допущений, которые делались физиками (однородные, с простыми границами тела и т. д.). Для этого он рассматривает ε, α, q как произвольные функции места и показывает, что требование энергетического равновесия для каждого отдельного цвета приводит для ε к однородному интегральному уравнению, единственным решением которого является

$$\varepsilon = \frac{a}{q^2} \text{const}.$$

По поводу этой в высшей степени математически изящной работы между Гильбертом и физиком Э. Прингсгеймом возникла мало радующая полемика. Прингсгейм упрекнул Гильберта в том, что, подчеркивая недостаточность всех прежних доказательств закона, он взял в качестве исходной предпосылки для своего доказательства именно тот факт, который как основополагающий особенно тщательно рассматривался Кирхгофом и остальными физиками и вывод которого составлял главную часть работы Кирхгофа. Имеется в виду то, что излучение каждой длины волны находится в равновесии и нет никакого обмена энергией между различными спектральными интервалами. Этот упрек вполне обоснован, и Гильберт, после того как обратили его внимание на этот недостаток, развил свои соображения в требуемом направлении. При этом он воспользовался аксиоматическим изложением, будучи убежден, что только этим путем можно внести ясность в клубок физических предпосылок и математических заключений. Против такого оборота Прингсгейм энергично протестовал, и на этом примере особенно интересно проследить различия в физическом и математическом мышлении. Физик исходит из того, чтобы исследовать, как обстоят дела в природе; эксперимент и теория являются лишь вспомогательными средствами для достижения цели. В сознании бесконечной сложности сущего, с которой он встречается в каждом эксперименте, физик сопротивляется тому, чтобы считать какую-либо теорию окончательной. Поэтому он ненавидит слово «аксиома», которому в обычном словоупотреблении приписывается окончательная истина; здоровое чувство подсказывает ему, что догматизм является злейшим врагом естествознания. Математик же имеет дело не с реальными фактами, а с логическими взаимосвязями, и на языке Гильберта аксиоматическая трактовка некоторого предмета вовсе не означает выдвижение определенных аксиом в качестве вечных истин; это просто методическое требование: в начале своих рассуждений назови предпосылки, придерживайся их и исследуй, не являются ли эти предпосылки частично лишними или даже взаимно противоречивыми. Эта логическая последовательность несомненно является идеалом любой области познания, но чем дальше мы отходим от чистой математики, тем менее чувствуется (или чувствителен) этот идеал, и даже в точной физике довольно часто в середине изложения находим предложения типа: «если теперь допустить, что...» Возражения Прингсгейма, вполне обоснованные в подчеркивании физически важного, стреляли мимо цели как по форме, так и в оценке намерений Гильберта. Он не только недооценивал смысл аксиоматического способа изложения, который мы только что пояснили, но и упрекал Гильберта в ошибке. Последний при доказательстве невозможности получения формулы Кирхгофа — Планка из допущения равновесия общей энергии всех длин волн принял величины q и α равными 1 независимо от λ. Прингсгейм считал это недопустимым, поскольку в природе не существуют тела, которые бы поглощали ($\alpha = 1$), но не обладали бы дисперсией. С тем же правом можно было бы сказать, что доказательство Лобачевским невозможности вывода аксиомы параллельности из остальных аксиом геометрии неверно, ибо использованная при этом неевклидова геометрия в действительности не существует. Гильберт мог по праву отвергнуть этот упрек Прингсгейма как недоразумение.

Прингсгейм выдвинул против работы Гильберта и другие, менее важные возражения, например, что не были учтены рассеяние и отражение. В обобщающей работе 1914 г. Гильберт тогда показал, что ход его доказательства остается правильным и при учете всех этих явлений. Эта последняя статья Гильберта по элементарной теории излучения всегда будет считаться наиболее строгим и ясным изложением этой теории.

Тем не менее работа не привлекла особого внимания физиков. Причина заключалась главным образом в том, что более глубокие проблемы теории излучения, прежде всего закон распределения энергии в спектре черного тела, полностью завладели физиками. Тут уже обнаруживались связи с теми принципами физики, которые как раз сегодня находятся в стадии изменения благодаря исследованию законов излучения. Гильберт сам никогда не переоценивал значение кирхгофовской геометрии лучей; уже после первого знакомства с идеями современной физики он видел центр тяжести постановки вопроса в статистике и квантах. В течение нескольких лет он тратил много времени и труда, чтобы силой своей логики проникнуть в эти области и прояснить их, но никогда не публиковал полученных результатов, ограничиваясь ознакомлением с ними своих учеников при чтении лекций. Гильберт начинал с лекции о той структуре, которую он придал кинетической теории газов, и заканчивал серией лекций по молекулярной теории, статистической механике, тепловой теореме Нернста, квантовой теории и др. Замечательное применение, которое классическая механика Гамильтона — Якоби нашла в квантовой теории, позволяло перебросить мост к прежним знаменитым лекциям Гильберта по вариационному исчислению и высшей механике. Одновременно Гильберт, придерживаясь традиции последних лет Минковского, стал направлять занятия руководимого им семинара главным образом на проблемы теоретической физики. Эти семинары по теме «Строение материи» продолжаются до сих пор. Роль Минковского взял на себя физик Дебай, который, одинаково проявив себя и как экспериментатор, и как теоретик, сумел внести в эти занятия живой пульс физического исследования.

Конечно, в дискуссиях на семинаре значительное место всегда занимала теория относительности; с большим вниманием следили за работами Эйнштейна, постепенно пришедшего к своей общей теории гравитации. Одновременно изучались работы Абрагама, Нордстрема и Ми, которые стремились к той же цели; особенно приковали к себе внимание идеи Ми, пытавшегося построить «теорию материи» на основе принципа относительности. Ми удалось так обобщить максвелловские уравнения электромагнитного поля, что они потеряли свой линейный характер; он задался целью вывести существование материальных прочастиц, в особенности электрона, из уравнений поля. Понятно, что для такого математика, каким был Гильберт, эта задача была особенно привлекательной, ибо основы теории Ми не только поддавались очень ясной математической формулировке, они требовали для полного выполнения программы серьезного применения сложного математического аппарата. Но Гильберт видел дальше основателя этой теории, открыв мост к мыслям Эйнштейна об общей относительности и гравитации.

Тогда, в 1914 г., Эйнштейн понял, что его принцип эквивалентности инертности и тяжести при последовательном проведении с необходимостью должен был привести к отказу от a priori заданного евклидового пространства и абсолютного времени в пользу четырехмерного пространственно-временнóго мира в римановском смысле, причем метрическая мера задается квадратичной формой. Десять коэффициентов этой дифференциальной формы должны определить гравитацию, и, смотря по обстоятельствам, справедливые для них законы находятся из требований инвариантности и соответствия гравитационной теории Ньютона. Вначале попытки Эйнштейна приблизиться к этим законам были тщетными, затем он избрал окольный путь; Гильберт шел к решению проблемы совершенно независимо и по другому пути. Случаю было угодно, чтобы оба ученых пришли к цели почти одновременно: Эйнштейн представил свои две основополагающие работы «К общей теории относительности» Берлинской академии 11 и 25 ноября 1915 г., а Гильберт — свою заметку «Основа физики» Геттингенскому научному обществу 20 ноября того же года. Но это замечательное совпадение никогда не приводило к спорам о приоритете между ними; наоборот, переписка по научным вопросам привела затем к личному знакомству и дружескому общению. Гильберт всегда ясно сознавал — и это он неоднократно подчеркивал в своих докладах и статьях,— что основное полностью заключалось в замечательной физической идее Эйнштейна. Подобно тому как для вишеровского «Auch einer» «моральное всегда само собой разумеется», так и для такого человека, как Гильберт, «математическое» всегда присутствует, когда речь идет — как в теории относительности — о высших геометрических абстракциях. Впрочем, далеко не сразу стало очевидным, что подходы Эйнштейна и Гильберта равноценны или хотя бы, что они взаимно совместимы. Эйнштейн надстраивал свои гравитационные законы индуктивно; он не делал никаких предположений о сущности материи, создающей гравитационное поле, а характеризовал это поле тензором энергии—импульса натяжения.

Его гравитационные формулы предсказывают, что этот тензор материи повсюду пропорционален «свернутому тензору кривизны», т. е. некоторой ковариантной величине, образованной из коэффициентов фундаментальной дифференциальной формы и ее первых двух производных. Гильберт начал с идей, лежащих в основе «теории материи» Ми; при этом материя рассматривалась как электрический феномен, который характеризуется математически «четырехмерным потенциалом». Четыре компонента этого потенциала вместе с десятью компонентами поля тяготения описывают состояние мира в каждой точке. Для определения этих 14 неизвестных функций служит — опять по примеру Ми — принцип инвариантности. Но если у Ми инвариантность существует только по отношению к преобразованиям Лоренца, т. е. специальной теории относительности, то у Гильберта инвариантность всеобща. Отсюда следует, что между 14 дифференциальными уравнениями для 14 искомых функций существует 4 тождества. Именно в этих 4 тождественных отношениях между законами тяготения и законами электромагнитного поля (уравнениями Максвелла) Гильберт видел вершину своего труда: установление связи между всеми видами полей, которые до тех пор существовали независимо друг от друга. По некоторым местам этой заметки, особенно по полному энтузиазма заключению, ясно видно, что от своих уравнений поля он ожидал еще большего, а именно, достижения цели, поставленной Ми: вывода электрона и атома из уравнений поля. Но эти надежды не сбылись. В тайну материи и ее квантовой структуры нельзя проникнуть этим формальным путем. Тем не менее первая заметка Гильберта остается историческим документом: вместе с обеими одновременными работами Эйнштейна она означала зарождение общей теории относительности. За исключением самого Эйнштейна, немногие сразу это признали, так как работа Гильберта написана исключительно сложно, а для физиков она вообще недоступна. Клейну принадлежит заслуга быстрого подхвата идей Гильберта и их более ясного и простого изложения. Он нашел для обеих заметок Гильберта и работ Эйнштейна адекватную форму, подчиняющую их математическое содержание общим идеям, которые Клейн сформулировал несколько десятилетий назад (1872) в своей знаменитой *эрлангенской программе*. Основной идеей этой работы является признание того факта, что здание геометрии или любой замкнутой ее части (топология, проективная геометрия, сферическая геометрия) можно построить как инвариантную теорию определенной группы преобразований. С этой точки зрения риманова геометрия проявляется как инвариантная теория относительно всех тех непрерывных преобразований трех пространственных координат, которые преобразуют квадратичную дифференциальную форму в самое себя. А отсюда до эйнштейновской общей относительности остается один шаг, состоящий в добавлении к трем пространственным координатам четвертой координаты времени. Так математики были подготовлены к быстрому восприятию учения Эйнштейна, и совершенно понятно, что ведущие математики эпохи Гильберт и Клейн приняли живое участие в развитии теории. Идеи Эйнштейна казались им столь естественными, что они совершенно не могли понять то сопротивление, которое встречала теория относительности не только среди профанов, но и среди физиков. Те аргументы, которые выдвигались против теории относительности, никогда не поднимались выше примитивного уровня, и для тех, кто был воспитан на трудах Гаусса, Римана, Гельмгольца, они выглядели просто смешными.

Упомянутая выше вторая заметка Гильберта содержит, кроме некоторых математических следствий из уравнений поля, еще и обстоятельное обсуждение отношения принципа причинности к общей теории относительности. В общепринятом понимании этот принцип требует, чтобы по состоянию мира в настоящем и прошлом закон природы однозначно и с необходимостью определял его состояние в будущем [1]. В общей теории относительности нужно прежде всего точно определить, что собственно следует понимать под «состоянием мира», ибо значения каких-то физических параметров меняются при переходе к другой системе отсчета, а следовательно, их нельзя считать определяющими состояние системы. Гильберт точно указывает, как следует определять состояние, чтобы оно имело «физический смысл», и показывает, что тогда принцип причинности остается справедливым в полном объеме. Этот вопрос был позже освещен Клейном с его общей, теоретико-групповой точки зрения.

Со своим пониманием теории относительности Гильберт знакомил слушателей в нескольких лекциях, причем каждый раз он добивался все большей ясности изложения. В последнем летнем семестре он даже прочитал популярный курс лекций перед огромной аудиторией, доказав, что только тот, кому логическая структура сложной области

---

[1] Среди философов, составляющих в этом смысле исключение, особенно следует отметить Больцано, первым давшего строгое обоснование теории действительных чисел.

совершенно ясна, может излагать ее неискушенной публике наглядно, живо и одновременно строго.

Еще со времен Гаусса и Вебера в Геттингене стало традицией, что математика и физика развиваются не параллельно, а вместе. Клейн особенно энергично охранял эту традицию, расширив ее привлечением технических наук. Его идеалом было освобождение высшего математического исследования от его изоляции, связывая его применение с практикой, с техникой, оплодотворяя ее и одновременно оплодотворяясь и социально защищаясь ею. Гильберт в значительной мере действовал в геттингенском духе, но его интересы были направлены не столько на практику, сколько на сами принципы познания природы, почему он и поставил свои математические способности на службу современной физике. Чем ему физика обязана, об этом говорит все изложенное в настоящей статье.

1922

СЭР ДЖ. ДЖ. ТОМСОН [106]

В своем жизнеописании, которое Томсон опубликовал под названием «Воспоминания и размышления», он подчеркивает то обстоятельство, что период, начинающийся его рождением (18 декабря 1856 г.) и ограниченный текущим днем, был одним из самых насыщенных событиями за всю историю человечества: в политике, экономике, науке и технике произошли изумительные изменения. Его собственная жизнь, однако, никак не отразила этого революционного характера окружающего мира, но протекала скорее в обычном темпе, лишенная волнующих событий, за исключением тех, которые происходили в той сфере, в которой были сосредоточены его интересы.

Он отмечает, что его отец, продавец книг Манчестерского пригорода Чэтем, хотел, чтобы он стал инженером. Четырнадцатилетним мальчиком Томсон был послан в колледж Оуэна — институт, основанный в 1846 г. неким манчестерским купцом; позднее колледж был преобразован в теперешний Манчестерский университет. Во главе этого учреждения стояли блестящие ученые; достаточно назвать двух из них: Осборна и Рейнольдса (прикладные науки) и Т. Роскоу (химия). Эти люди пробудили у Томсона интерес к науке. Но только после смерти отца он окончательно решил отказаться от карьеры инженера.

Вплоть до середины XIX в. в университетах не было исследовательских лабораторий. Профессора проводили свои эксперименты в собственных домах. В 1869 г. рассматривался первый план об организации физической лаборатории в Кембридже, которая была официально открыта в 1874 г.; ее возглавил Джемс Клерк Максвелл. Преемником Максвелла, умершего молодым, стал лорд Рэлей, вышедший в отставку в 1884 г. И вот произошло удивительное событие: молодой математик Томсон, который только начал экспериментальные исследования в Кавендише, был избран кавендишским профессором и директором лаборатории. Это был смелый выбор, но, как вскоре стало очевидным, и чрезвычайно удачный. Потому что Томсон отдался новой работе со всей энергией и беспристрастностью своего ума; его лаборатория сделалась одним из самых крупных исследовательских центров, который привлекал учеников со всего мира. Список сотрудников Томсона включает ряд блестящих имен, представителей многих наций, а его ученики сегодня возглавляют многие знаменитые кафедры в Великобритании и других странах. Я сам был его учеником в 1907 г. и на своем примере почувствовал все обаяние его личности.

Он не был блестящим лектором в прямом понимании этого слова, но его лекции впечатляли кристальной ясностью, с которой он давал объяснения, а также простотой и красотой лекционных демонстраций.

О частной жизни Томсона многого не скажешь. Несколько раз он бывал в Соединенных Штатах и Канаде; в течение первой мировой войны играл большую роль, будучи советником правительства по техническим вопросам. В 1918 г. он вышел в отставку в Кавендише и стал главой Тринити-колледжа. Его преемником стал лорд Резерфорд. В Тринити-колледже прошли пожилые годы Томсона, наполненные миром, но и отмеченные печатью активности, ибо он никогда не прекращал исследовательской работы. Наибольшее удовлетворение ему несомненно принес тот день, когда его сын был удостоен Нобелевской премии — один из редких случаев, когда отец и сын, независимо друг от друга, получили столь высокое признание.

Если мы теперь обратимся к его работам, то увидим несколько замечательных их особенностей. Об одной из них я уже упоминал: Томсон начинал свою деятельность в качестве математика, а продолжил ее — после столь стремительного поворота в его судьбе — искусным экспериментатором. Обратный процесс не так уже редок: мы знаем несколько примеров того, как люди, начинавшие в качестве экспериментаторов, работавшие в узкой области, которая под влиянием их исследований чрезвычайно расширилась, шаг за шагом бывали вынуждены использовать все более глубокие математические методы, чтобы систематизировать и усваивать свои собственные результаты. Заметим, что если Томсон и стал ведущей фигурой в экспериментальной физике, это не означало, что сам он был исключительно силен в непосредственной экспериментальной технике. И действительно, своими собственными руками он делал довольно мало. Он размышлял об экспериментальных возможностях, находил наиболее прямую методику, конструировал в уме аппаратуру, а практическое ее воплощение предоставлял своим искусным ассистентам и механикам.

Работы Томсона характерны для концепции науки XIX в. Наблюдение и собирание фактов, их математическая обработка в то время еще основывались на принципах, установленных Ньютоном. Это был тот тип несофистической натуральной философии, который и составлял фундамент исследовательской деятельности Томсона. То обстоятельство, что его результатам наряду с результатами его великих современников — Герца, Беккереля, Рентгена, супругов Кюри, Резерфорда — суждено было послужить основой натуральной философии нового типа, который мы характеризуем словами «теория относительности» и «квантовая теория», не связано с мотивировкой его исследований и его устремлениями.

Одна из первых статей Томсона, его диссертация на звание стипендиата, занимающегося исследовательской работой в Тринити-колледже, была посвящена обобщению хорошо известной «теоремы обращения» в динамике на более общие случаи, которые встречаются в химии и физике. Один из них заключался в утверждении: «Если намагниченность железа спадает с возрастанием температуры, то теорема устанавливает, что железо будет нагреваться, если уменьшится его намагниченность». В физике и химии можно назвать бесконечно много явлений такого типа.

Областью основных интересов в физике того времени была теория электричества и магнетизма. Томсон находился под сильным влиянием трудов Максвелла, особенно его «Трактата об электричестве и магнетизме». Последняя книга самого Томсона, появившаяся под названием «Новые исследования», представляет собой некоторым образом продолжение работы Максвелла. Но — и это очень странно — основная деятельность Томсона развертывалась в направлении, в котором центральным объектом интереса были не поля, а заряды. Это — открытие и исследования атомов электричества, или электронов, которые принесли Томсону славу. Он, конечно, не начал свое странствование по путям науки, уже имея эту идею готовой в своем уме. Он просто следовал традиции своего времени, которая заключалась в том, чтобы исследовать явления всякого рода, электрические, имеющие место в газах. Стимулом для этой работы явилось убеждение, что свойства газов более просты в сравнении с теми, которые характерны для более плотных видов материи, и хорошо описываются в рамках кинетической теории.

Томсон посвятил исключительно много усилий работе по наблюдению и измерению прохождения тока через газы и собрал результаты этих исследований в знаменитой книге, которая и по сегодня остается образцовой в этой области. Он нашел, что газ под действием рентгеновских лучей обретает способность проводить электричество за счет ионизации. Вопрос об истинной природе катодных лучей был также предметом оживленных дискуссий в течение целого ряда лет. Мнения по этому поводу разделялись. Германские физики, за примечательным исключением Гельмгольца, рассматривали их как волны того же типа, что и световые, английские физики, без исключения, считали, что эти лучи представляют собой отрицательно заряженные частицы.

В 1894 г. Томсону удалось измерить скорость этих лучей с помощью вращающегося зеркала; он нашел, что она составляет $^1/_{2000}$ часть скорости света. Этот результат чрезвычайно затруднял возможность трактовать их каким-то образом в качестве лучей световых. Затем Перрен показал, что цилиндр, помещенный на пути катодных лучей, приобретает под их действием отрицательный заряд, а Томсон распространил этот вывод и на тот случай, когда катодные лучи отклонялись магнитным полем.

Этим путем было окончательно продемонстрировано, что катодные лучи представляют собой отрицательно заряженные частицы электричества. Последнее препятствие было преодолено, когда Томсон раскрыл причину, по которой опыты Герца по отклонению лучей электрическим полем оказались неудачными: причина коренилась в том, что Герц работал в условиях недостаточно высокого вакуума. Это приводило к тому, что возникала экранировка за счет пространственного заряда ионов, так что внешнее поле не достигало луча.

Природа катодных лучей была установлена в серии экспериментов, в которых Томсон одновременно использовал как электрическое, так и магнитное поля. Удельный заряд частиц, как было показано в процессе исследований, не зависел от природы газа и от материала катода, а его величина в 2000 раз превосходила соответствующее значение для иона водорода, определенное из данных по электролизу.

В Кавендише также была поставлена проблема абсолютной величины заряда. Метод, использованный для ее решения, связан с именем Ч. Т. Р. Вильсона, который довел его до высочайшей степени совершенства в своей замечательной «туманной камере» (камера Вильсона). Результатом этих работ было доказательство того, что существует минимальный электрический заряд, который остается одним и тем же для ионов любого типа и любого происхождения — и при любых обстоятельствах. Отсюда необходимо было сделать вывод, что заряды частиц, составляющих катодные лучи, и ионов водорода должны быть равны друг другу. Следовательно, результат Томсона означал, что частица катодных лучей должна иметь массу, примерно в 2000 раз меньшую, чем масса атома водорода.

Когда Д. Д. Томсон сообщил об этом неожиданном результате на лекции, которую он читал в Королевском институте, ему было ясно, к каким далеко идущим следствиям это поведет. Он посвятил бо́льшую часть своих исследований тому, чтобы показать, что эти частицы, получившие позднее название электронов, идентичны, независимо от того, откуда они возникают, т. е. вне зависимости от материала катода или типа газа, заключенного в трубку. Он пришел к выводу, что атом не является неделимым — в противоречие со своим названием, но что им обнаружен субатом — первоначальный элемент, который в качестве составной части входит во все атомы.

Таким образом, открытие электрона впервые поставило на эмпирический фундамент вопрос о первоначальном элементе; тем самым был открыт путь к проблеме — как «сконструировать» атом из электронов. Здесь, однако, возникла трудность: все электроны имеют отрицательный заряд, а атом в целом — нейтрален, в таком случае, откуда берется положительный заряд? Сегодня мы знаем определенный ответ на этот вопрос, ответ, основанный на экспериментальных фактах. Но до того как он был получен, имелось обширное поле для спекулятивных рассуждений. Сам Томсон также сформулировал атомную модель, которая была очень продуманной и позволяла сделать некоторые, вполне удовлетворительные предсказания о поведении реальных атомов. Он предположил что положительное электричество непрерывно и равномерно распределено внутри сферы и что в нейтральном атоме электроны «плавают» в такой положительно заряженной сфере под совместным действием центральной силы притяжения и их взаимного отталкивания. Он доказал, что каждый из электронов благодаря взаимодействию между ним и им подобными образует некую правильную конфигурацию — такую, как круги, тетраэдры и т. д., по отношению к которым он совершает гармонические колебания. Возможные расположения электронов имеют замечательное сходство с периодической системой элементов, а колебания — по крайней мере правильный порядок величины для случая оптических частот в линейном спектре.

Истинное решение проблемы о природе положительных зарядов в атоме явилось результатом не рассуждений, а пришло из данных эксперимента. Резерфорд, который позднее стал преемником Томсона на его посту директора Кавендишской лаборатории, открыл новые методы для разрешения этой проблемы: бомбардировку атомов лучами радиоактивных элементов и наблюдение ее влияния. Результатом исключительно эффективного взаимодействия теории и эксперимента явилось построение модели атома по Резерфорду—Бору. Томсон также способствовал успешному решению проблемы в экспериментальной части соответствующих работ. Оставался вопрос о числе электронов в атоме, и он был существен как для томсоновской, так и в равной степени и для резерфордовской модели. Имелись различные методы счета электронов, причем все они использовали рассеяния налетающих на атом лучей. Томсон рассматривал рентгеновские лучи и показал, что отношение интенсивности рассеянных лучей к налетающим пропорционально числу электронов в атоме; множитель пропорциональности оказался зависящим лишь от универсальных констант: заряда электрона и скорости света. Формула Томсона для рассеяния попрежнему остается основой для всех современных обобщений. Его результат, базировавшийся на данных измерений Баркла, сводился к тому, что число электронов примерно равно порядковому номеру атома в периодической таблице элементов. Этот вывод был подтвержден определением заряда ядра (Резерфорд и Чадвик), который должен был быть равен суммарному заряду электронов. Впечатляющее здание современной атомной теории базируется на этих работах двух ныне покойных директоров Кавендишской лаборатории.

Однако и с построением этой теории электронной структуры атома фундаментальная проблема первоначальной частицы все еще не была решена, и это связано с тем, что каждый атом имеет свое собственное ядро, а число атомов велико. В этом плане пока еще не была достигнута ясность. Томсон также сыграл главную роль в решении этой проблемы. Решение это было подготовлено открытием ряда эффектов, относящихся к природе радиоактивности. Содди высказал предположение, что среди нестабильных, взрывающихся атомов встречаются и такие, ядра которых имеют различающиеся массы, но одинаковый заряд —так называемые изотопы. Отсюда возникал вопрос, нет ли изотопов и среди остальных, совершенно не радиоактивных атомов? И снова методы, с помощью которых можно было ответить на этот вопрос, были развиты Томсоном. Он показал, как, отклоняя атомные лучи в электрическом и магнитном полях, можно в пучке разделять атомы разного сорта, т. е. атомы, обладающие соответствующей массой и зарядом. Таким образом он открыл существование изотопов неона, а позднее хлора. Этот метод, несколько модифицированный, был доведен до невероятной степени совершенства Астоном.

Вот такими путями Томсон неизменно играл решающую роль в наиболее значительных достижениях по упрощению нашей концепции строения материи. Во многом это было связано с непосредственностью и простотой его экспериментальной аппаратуры, но вместе с тем в определенной степени и с его математическим даром.

Томсон был в научном отношении замечательным примером одновременно революционера и консерватора. Он ничего не принимал на веру, но он держался и за классические идеи. У него был свой математический образ мышления, который он усвоил в дни своей юности, и он не был обеспокоен приобщением к новым методам. Он оценил эйнштейновскую теорию относительности и ее далеко идущие следствия, но предпочитал рассматривать ее не как некий новый закон, а как внутреннее свойство максвелловских уравнений электромагнитного поля. Он продолжал считать эфир тем основным фоном, на котором разыгрываются электромагнитные явления, и использовал понятие об эфире так, словно он был столь же реален, как и любой другой вид материи.

Что касается квантовой теории, то точка зрения Томсона была характерна для скептически настроенного наблюдателя. Но он изменил это свое отношение, когда его сын экспериментально подтвердил волновой характер движения электрона. Это замечательный факт — то, что отец и сын дали наиболее разительные свидетельства явно противоречивых свойств электрона: отец, доказав «частицеподобные» свойства, а сын — волновые. Современная квантовая теория показала, что оба эти свойства соответствуют двум аспектам одного и того же явления и зависят от различного типа наблюдений; иначе говоря, они не противоположны друг другу, а друг друга дополняют. Томсон необычайно гордился успехами своего сына, старался усвоить эти новые результаты и пополнить ими запас своих старых убеждений.

Как отмечалось выше, я был учеником Томсона в 1909 г., и его лекции произвели на меня глубокое впечатление. Я не видел его в течение того времени, когда война образовала такую глубокую пропасть между европейскими учеными. Примерно в 1924 или в 1925 г. я снова приехал в Кембридж и встретился с сыном Томсона, который примерно был моим сверстником. Мы поехали с ним в Кавендиш, и он настоял, чтобы я повидался с его отцом.

И вот мы вошли в темную комнату, заваленную всевозможными физическими приборами и принадлежностями — трубками, проводами, насосами; все это находилось там в устрашающем количестве. В комнате стоял старый человек. Он следил за какой-то яркой картиной, разыгрывавшейся на его глазах в электронной трубке. Его сын представил меня: «Отец, вот твой бывший ученик, который хотел с тобой повидаться...» Джи-Джи, как мы, включая даже и сына, называли Томсона, обернулся к нам: «Здравствуйте! Посмотрите, вот это спектр...» Так он сразу же заговорил о вещах, занимавших его ум, пренебрегая всеми личными или историческими обстоятельствами, которые разделяли нас в течение многих лет.

Автобиография Томсона включает в себя много примеров, свидетельствующих о том, что он был мастером устного рассказа. Особенно он любил сравнивать современную жизнь кембриджского студенчества со временем своей молодости и проводил это сравнение не в пользу наших дней! Однажды он обратил внимание моей жены на деталь, которая казалась ему особенно угнетающей. «В мое время,— сказал он,— считалось признаком плохого тона спрашивать у портного о стоимости костюма, если вы его заказали. Вы просто платили — или не платили. Цены устанавливались так, что не имело значения, если некоторая часть людей не оплачивала своих долгов. Но сегодня они не только спрашивают о цене, они даже уходят из одного магазина, чтобы сделать покупку в более дешевом!» Однако сам он был чрезвычайно скромен — прямая противоположность дэнди. Когда я жил в Кембридже, он был глубоко взволнован судьбой жены и дочерей великого Генриха Герца, которые должны были покинуть Германию. Он сделал для них — и для очень многих других — все, что мог.

Томсон проявлял большой интерес к людям. В течение своей долгой жизни он встречался с огромным числом лиц разного сорта, и его «Воспоминания» содержат живые впечатления не только о современных ему ученых, но также и об очень многих людях других профессий. Он дал привлекательные портреты некоторых из своих предшественников на посту главы колледжа, а также многих других знаменитых людей из Тринити; среди них были люди с мировой известностью — такие, как индийский математик Рамануян и поэт Хоусман, а также ряд других, имена которых хорошо известны в Англии. Томсон любил свой колледж, и я думаю, что последние годы, которые он провел в квартире главы Тринити-колледжа, были столь же счастливыми, как любые другие в его длинной жизни. Он умер в возрасте 83 лет и был похоронен 4 сентября 1940 г. в Вестминстерском аббатстве.

1941

ПИТЕР ЗЕЕМАН, ПОЧЕТНЫЙ ЧЛЕН КОРОЛЕВСКОГО ЭДИНБУРГСКОГО ОБЩЕСТВА [118][1]

Питер Зееман — сын лютеранского священника — родился 25 мая 1865 г. в Зоннемере — деревне на голландском острове Шоувене, расположенном непосредственно на север от Бевеланда. Довольно поздно, уже 27 лет, он поехал в Лейденский университет, чтобы изучать там математику и физику. В Лейдене он испытал на себе влияние Каммерлинг-Оннеса и еще более сильное — Г. А. Лоренца, защитил докторскую диссертацию и занимал должность приват-доцента вплоть до 1897 г., когда получил приглашение в Амстердам — для чтения лекций.

В 1900 г. он был выдвинут на должность заведующего кафедрой экспериментальной физики в Амстердаме и занимал ее вплоть до достижения предельного для преподавания возраста — 70 лет. Он умер 9 октября 1943 г. и был похоронен в Гарлеме.

Перечень оказанных ему почестей и перечисление отличий, которыми он был отмечен, производят внушительное впечатление. Он был кавалером нескольких рыцарских орденов на континенте Европы. Он был Нобелевским лауреатом (1902 г.) и награжден многими медалями ученых обществ, включая медаль Румфорда Королевского общества, иностранным членом которого он состоял. Восемь раз ему присуждалась степень почетного доктора, и он был членом дюжины европейских академий. В 1933 г.

---

[1] Статья написана совместно с Р. Шлаппом.— *Прим. ред.*

он был избран иностранным членом Королевского общества в Эдинбурге.

Открытие «эффекта Зеемана» было сделано в начале его научной карьеры — в 1896 г.

Предположение о том, что магнитное поле должно оказывать влияние на испускание или поглощение света, было сделано Фарадеем (а также и Тэтом), однако оно не получило никаких экспериментальных доказательств. Зееман повторил эксперименты и получил положительный результат. Он поместил пламя, подкрашенное небольшой добавкой натриевой соли, между полюсами мощного электромагнита и наблюдал свет пламени в спектроскоп. Когда магнит был включен, замечалось едва заметное расширение желтой линии натрия; когда пламя рассматривалось в направлении магнитного поля сквозь отверстие в одном из полюсных наконечников магнита, края линии были циркулярно поляризованы в противоположных направлениях.

Этому незначительному эффекту суждено было сыграть роль одного из важнейших ключей, с помощью которых была раскрыта запутанная картина сложных спектров и атомной структуры. Изучением этих вопросов Зееман занимался до конца своих дней.

Эти исследования пришлись на время, особенно благоприятное для их последующего развития. Спектроскопическая техника была чрезвычайно продвинута благодаря открытию Роуландом вогнутых решеток (80-е годы), и эшелонный спектроскоп и интерферометр были усовершенствованы Майкельсоном.

В области теории Лоренц развил идею о том, что электрические и магнитные явления следует объяснять в терминах движения маленьких электрически заряженных частиц определенной массы, в последующем получивших название электронов. Доказательство того, что электромагнитное излучение, испускаемое колеблющимся распределением зарядов (данное Герцем), является, по существу, излучением световым, показало Лоренцу, что вся оптика подчинена этой же схеме, и он немедленно предложил теорию нового эффекта.

Картина явления, данная теорией Лоренца, состояла примерно в следующем. В атоме содержится заряженная частица, привязанная к своему положению равновесия силами, пропорциональными отклонению от этого положения; естественные колебания таких частиц являются причиной испускания света определенной частоты.

Поскольку различные атомы в пламени колеблются в различных направлениях, свет, который они испускают, является в целом неполяризованным. Когда на атом действует магнитное поле, возникает сила, действующая на движущийся заряд, составляющая прямой угол с направлениями поля и движения. Поэтому ясно, что магнитное поле будет вызывать колебание, в результате чего и будет испускаться свет.

Действительная орбита заряженной частицы под влиянием возмущающего поля перестает быть плоской; однако колеблющиеся системы обладают хорошо известным свойством, согласно которому наиболее сложное колебание может быть построено за счет суперпозиции определенных гармонических колебаний, которые называются нормальными модами. Характерное свойство нормальной моды заключается в том, что если система начинает таким образом колебаться, то она продолжает этот вид колебания. Легко видеть, что в этом случае число нормальных мод равно трем, а именно, в одной из них заряженная частица колеблется в направлении поля с постоянной частотой, а в двух других описывает круги в противоположных направлениях относительно направления поля. Из этих последних двух колебаний одно обладает частотой несколько большей, а другое — несколько меньшей, чем частота колебаний в отсутствие поля; это зависит от знака колеблющегося заряда; изменение частоты для данной величины магнитного поля определяется величиной отношения заряда к массе. В соответствии с этой теорией вначале неполяризованному свету отвечала одна линия, вызванная испусканием излучения группой помещенных в пламя атомов. В магнитном поле эта линия расщепляется в триплет, причем каждая компонента триплета обладает определенной поляризацией — в зависимости от направления, в котором свет наблюдается с помощью усовершенствованной аппаратуры. Зееман и его сотрудники нашли линии, которые, будучи полностью разделены друг от друга, оказались триплетами, с поляризацией, соответствовавшей той, которую предсказывала теория Лоренца. Это явление получило название «нормального эффекта Зеемана». На основе того факта, что знак заряда, определенный из наблюдений, оказался отрицательным, и того обстоятельства, что найденное отношение заряда к массе этих электрических частичек находилось в хорошем согласии с этой же величиной, полученной к тому времени Дж. Дж. Томсоном и Вихертом для катодных лучей, было сделано заключение об идентичности колеблющихся частичек в атомах и электронов — в катодных лучах.

Вскоре, однако, стало ясно, что «нормальное» расщепление спектральных линий в триплет было скорее исключением, чем правилом: обычно расщепление оказывалось гораздо более сложным; соответствующее явление было названо «аномальным эффектом Зеемана». Так, например, в случае умеренной разрешающей способности спектрометра желтая линия натрия, наблюдаемая в отсутствие магнитного поля, оказалась дублетом, состоящим из двух близко расположенных линий. Одна из этих линий расщепляется в магнитном поле на четыре, а другая — на шесть компонент; подобный же эффект наблюдался и в случае других мультиплетных линий. В пределе очень сильных полей, однако, мультиплеты обычно дают картину, очень похожую на обычный триплет, каждый компонент которого «содержит» в себе следы мультиплетной структуры. Переход от аномального эффекта к такому псевдонормальному типу с ростом величины силы поля, после того как он был открыт, получил название «эффекта Пашена—Бака».

Теория Лоренца оказалась недостаточной для объяснения этих явлений; в отсутствие адекватной теории в первое десятилетие нашего века было сформулировано несколько эмпирических правил, чтобы объяснить их; это было сделано Престоном, Рунге и др.

Дальнейшее развитие этой области может быть намечено лишь бегло. Фундаментальное открытие спектроскопией существования термов, их интерпретация как уровней энергии, а линий — как результата излучательных переходов между этими уровнями, управляемых квантовым соотношением между энергией и частотой,— все это во втором десятилетии века привело к большому успеху в систематизации аномального эффекта Зеемана и вместе с тем — к более глубокому пониманию атомной динамики. Это развитие достигло кульминационной точки в замечательной работе Ланде (1920). Окончательное разъяснение эффекта пришло лишь после открытия вращающегося электрона (спин) и появления волновой механики. В новой теории первоначальная картина колеблющегося точечного заряда была отвергнута; она была заменена математической схемой, которую гораздо более трудно себе представить и дать ей конкретное изображение. Ее существенной особенностью является, однако, то, что необходимо принять во внимание два типа движения электронов: орбитальное и спиновое, которые в большей или меньшей степени связаны друг с другом и по-разному реагируют на магнитное поле.

Интересно отметить, что работы Штерна и Раби (которые недавно стали Нобелевскими лауреатами), посвященные ядерным моментам, и, в частности, замечательный «резонансный» метод Раби, непосредственно вытекают из зеемановской работы, выполненной полвека тому назад. Основываясь на той же самой определяющей идее о влиянии магнитного поля на движущийся заряд, или, как сказали бы сегодня, на магнитное расщепление термов, но используя для выявления переходов несравненно более чувствительную технику детектирования, чем та, которая применяется в спектроскопических наблюдениях в оптической области, можно заключить, что в понимании проблемы архитектуры ядер эти исследования сыграют роль, сравнимую с выпавшей на долю зееман-эффекта в приложении к атомной структуре.

Помимо магнитооптики, Зееман внес заметный вклад в развитие других областей физики, таких, как оптика движущихся сред и т. д. Но его величайшее открытие с неизбежностью умаляет эти исследования, поскольку оно без сомнения является одним из наиболее основательных и плодотворных в истории атомной физики, где всегда будут помнить имя Зеемана.

1943

МАКС КАРЛ ЭРНСТ ЛЮДВИГ ПЛАНК (1858—1947) [144][1]

Почти полстолетия прошло со времени открытия кванта действия Максом Планком — время, достаточное, чтобы оценить его значение для науки и более общо — для развития человеческой мысли. Несомненно, это открытие явилось событием первостепенной важности, сравнимым с научными революциями, осуществленными Галилеем и Ньютоном, Фарадеем и Максвеллом. Подобно тем революциям, эта изменила облик физики и оказала глубокое влияние на смежные науки — от химии до биологии. Ее философские импликации выходят далеко за рамки собственно эпистемологии науки в глубины метафизики.

Каким же был человек, положивший начало этому великому движению? Среди его многочисленных работ, статей и книг мы имеем «Научную автобиографию», которая во многом помогает понять мотивы его деятельности и его реакцию на окружающее. Кроме того, в «Naturwissenschaften» опубликованы, в связи с шестидесятилетием со дня рождения Планка, статьи, среди которых и работа Зоммерфельда биографического характера. Все эти ценные материалы будут использоваться и цитироваться при последующих попытках охарактеризовать личность Планка. Но наибольшую помощь мне должны оказать воспоминания о годах личного общения и дружбы, которые оставили незабываемое впечатление.

Планк происходил из старинной семьи юристов, должностных лиц и ученых. Один из его предков был министром в Швабии, а позднее — профессором богословия в Геттингене. Один из внуков этого человека — знаменитый юрист, профессор права в Геттингене, активно участвовавший в создании Германского гражданского кодекса (Deutsches Bürgerliches Gesetzbuch). Улица Планка, на которой я впоследствии прожил несколько лет, была названа в его честь. Он в молодости потерял зрение, и я помню почтенную фигуру слепого старого «превосходительства» по моим студенческим годам. Он и отец Макса Планка были кузенами; последний — также известный юрист и профессор права Кильского университета. В 1867 г. его

---

[1] Статья публикуется с некоторыми сокращениями.— *Прим. ред.*

пригласили в Мюнхен, и он, говорят, пользовался доверием коллег и играл важную роль в руководстве университетом.

О происхождении Планка, о всех этих людях — прекрасных, достойных, неподкупных, благородных и великодушных, отдавших себя служению церкви и государству — необходимо помнить каждому, кто захочет понять характер Макса Планка и истоки его успеха. И его деятельность отмечена теми же чертами, которые сочетались с искренней верой в простоту природы и с полным доверием к логическим выводам из фактов.

Макс Карл Эрнст Людвиг Планк родился 23 апреля 1858 г. в Киле. Здесь он провел раннее детство. Когда ему исполнилось девять лет, семья переехала в Мюнхен. Он стал учеником Максимилианской гимназии, где впервые его посетило научное вдохновение благодаря его учителю математики Герману Мюллеру, человеку изобретательному и остроумному, который знал, как продемонстрировать законы физики на простых убедительных примерах.

В автобиографии Планк так говорит о начале своей деятельности: «С юности меня вдохновило на занятие наукой то — вовсе не очевидное — обстоятельство, что наши законы мышления подчинены закономерностям, имеющим место в процессе получения впечатлений от внешнего мира, и, таким образом, предоставляют каждому возможность получать информацию об этих закономерностях при помощи чистого мышления. Наиболее важно здесь то, что внешний мир представляет собой нечто независимое от нас, абсолютное, чему мы противостоим, а поиск законов, которые управляют этим абсолютным, казался мне самым заманчивым занятием в жизни».

Такие представления характерны для отношения Планка к науке, а Мюллер был тем, кто поддержал его и помог ему в их развитии.

Принцип сохранения энергии был принят Планком «как евангелие», как первый из этих «абсолютных» законов

Когда же пришло время выбрать профессию, то проявились другие, конкурирующие интересы. Он хотел заняться классической филологией. Он пытался применить свои музыкальные способности в композиции, но пришел к выводу, что они недостаточны для создания оригинальных произведений.

В конце концов физика победила. Музыка, однако, занимала заметное место в его жизни. Он стал прекрасным пианистом и находил в игре глубокую радость и отдохновение.

Планк занимался три года в Мюнхенском университете. В то время не было кафедр теоретической физики, поэтому он посещал лекции по математике Густава Бауэра и Людвига Зейделя, а по физике — Ф. фон Жолли. Они дали Планку основательные знания, но только в Берлине, где он проучился год под руководством Гельмгольца и Кирхгофа, перед ним раскрылись широкие горизонты науки. Однако, как пишет Планк, *это произошло* не благодаря их лекциям. Гельмгольц никогда как следует не готовился к лекциям, он импровизировал, прибегая к помощи записной книжки, и делал ошибки у доски, так что студенты чувствовали, что ему столь же все надоело, как и им самим. Лекции же Кирхгофа были всегда тщательно отработаны, каждая фраза продумана, но все было скучно и монотонно. *Это произошло*, когда Планк обратился к их трудам, которые его восхитили. Принцип сохранения энергии все еще представлялся ему наиболее интересным. Вскоре он обнаружил новый источник знаний — публикации Клаузиуса, которые произвели на него глубокое впечатление благодаря ясному языку и прозрачности объяснений. Из них он впервые узнал о различии между двумя основными теоремами в формулировке Клаузиуса. С этого времени исходными для всех его научных размышлений являются концепции термодинамики.

Докторская диссертация Планка (Мюнхен, 1879) — первая из его статей, посвященных второй теореме. Он не был удовлетворен определением Клаузиуса необратимости, именно, что процесс необратим, если он не может протекать в обратном направлении подобно теплопроводности. Планк считает его неудовлетворительным из-за того, что такое определение не исключает возможности обращения результата процесса непрямым путем, что сразу же должно быть исключено. Поэтому он предлагает называть процесс необратимым или, как он предпочитал говорить, «естественным», если он не может быть сделан полностью обратимым без компенсации. Энтропия есть мера «предпочтения», которое природа оказывает конечному состоянию, и она возрастает во всех «естественных» процессах.

Надежда Планка на благоприятный прием своей статьи не осуществилась. Гельмгольц не проявил никакого интереса, Кирхгоф возражал против того, что энтропию можно измерить лишь в обратимых процессах и потому ее нельзя применять к необратимым процессам. Попытка установить личные контакты в Бонне с Клаузиусом не удалась, а переписка с Карлом Нейманом из Лейпцига ни к чему не привела.

Но Планк не терял мужества. Он продолжил исследования по термодинамике в ряде статей 1880—1892 гг., первая из которых была использована как диссертация для назначения на должность приват-доцента Мюнхенского университета, которую он и получил в 1880 г.

Если прочитать эти статьи сегодня, то возникает ощущение, что встречаешься со старыми знакомыми. Все кажется известным — определения, доказательства, даже обозначения. Причина в том, что мы все воспитаны на книге Планка по термодинамике, в которой он собрал результаты своей предшествующей работы. Столь систематичен был его ум, столь хорошо взвешено каждое слово, каждая формула, написанная им, что было бы трудно что-либо изменить в окончательном варианте. Эта книга, «Лекции по термодинамике», впервые появилась в 1897 г. и с тех пор выдержала много изданий.

Физические интересы Планка всегда имели философское происхождение и коренились в его глубокой убежденности, о чем уже говорилось выше, в том, что человеческий ум может проникать в тайны природы с помощью мышления вследствие гармонии между законами мышления и законами природы. Поэтому он всегда предпочитал дедуктивный, иногда даже аксиоматический метод. Это вполне очевидно из его термодинамики. Так, он был убежден в общности и универсальности закона возрастания энтропии и пытался вывести как можно больше следствий из него. Равновесие тогда характеризуется максимумом энтропии или, что равносильно, экстремальными значениями других термодинамических потенциалов. Эти экстремальные принципы термодинамики образовали, таким образом, фундамент работ Планка в противоположность обычным методам физико-химиков, предпочитавших метод циклов. Планк не знал в то время, что его экстремальные принципы уже открыты и применены Виллардом Гиббсом, и вполне естественно, что он испытал некоторое разочарование, когда обнаружил это. Планк был еще приват-доцентом Мюнхенского университета и с некоторым нетерпением ожидал приглашения на должность профессора. Однако шансы на это были невелики, поскольку теоретическая физика не была признанным академическим предметом.

Планк, чтобы сделать свое имя более известным в научном мире, решил принять участие в конкурсе на соискание премии философского факультета Геттингена за 1887 г.; требовалось подать сочинение о сущности энергии. До того как была закончена эта статья, Планку предложили место экстраординарного профессора теоретической физики в университете Киля — городе, где он родился. В автобиографии Планк рассказывает, что день, когда он получил это приглашение, был одним из счастливейших в его жизни; хотя ему хорошо жилось у родителей, он тосковал по независимости и собственному дому. И теперь для него стало целью оправдать доверие, оказанное ему коллегами из Киля. Планк быстро закончил работу для Геттингена, и хотя ему было отдано предпочтение перед двумя другими соискателями, он все же получил только вторую премию. В отчете факультета содержался параграф, в котором критиковалось отношение Планка к закону электродинамического взаимодействия Вебера. Вильгельм Вебер, тогда профессор физики в Геттингене, был вовлечен в острую дискуссию с Гельмгольцем. Планк был на стороне Гельмгольца в этом споре, что стоило ему первой премии в Геттингене. Но вскоре он был вознагражден тем интересом, который берлинские физики проявили к нему, молодому ученому.

Теперь Планк вернулся к своему любимому предмету и написал четыре больших статьи под общим названием «О принципе возрастания энтропии» (1887, 1891). В первой из них, где вновь вместо «необратимых» используется термин «естественные» процессы, вводятся термодинамические потенциалы и выводятся их экстремальные свойства, уже упомянутые выше. Планк называет выражение $w = u + pv - Ts$ «функцией Масье», которое сейчас известно как потенциал Гиббса. Обсуждается равновесие различных фаз и дается общий набросок теории химического равновесия. Последующие статьи заполнили эту схему деталями. Чтобы получить конкретные результаты, необходимо знать выражения для термодинамических потенциалов. Планк делает простые и естественные предположения, например, что в разбавленном растворе термодинамический потенциал есть линейная функция концентрации растворенных частиц. Таким путем он развил формальный аппарат, который применил для сравнения с наблюдаемыми фактами.

Это было время, когда во вновь возникшей науке, физической химии, в изобилии совершались открытия и создавались теории. Закон действия масс был установлен Гульдбергом и Вааге; свойства разбавленных растворов изучены Вант-Гоффом, а электролитов — Аррениусом. Планк получил многие эти результаты из своих принципов, иногда независимо, а иной раз и раньше химиков. Он дал термодинамическую теорию диссоциации газов, осмотического давления и понижения точки замерзания растворов. Обсуждая наблюдаемые значения точки замерзания многих растворов солей, он пришел к выводу, что соли в растворе должны диссоциировать. Он увидел в этом результате термодинамическое обоснование теории электролитической диссоциации, которую примерно в то же время развивал Сванте Аррениус, опираясь на большой экспериментальный материал. Аррениус, однако, отверг термодинамическую аргументацию Планка, так как полагал, что его (Аррениуса) гипотеза относится к ионам. Планк же настаивал на том, что термодинамические законы одинаково применимы как к заряженным, так и к нейтральным частицам, что совершенно верно. Все же действительный вид законов может зависеть, как показали современные исследования (Дебай и Хюкель), и от заряда. Сегодня мы можем, следовательно, сказать, что никто из участников дискуссии не был вполне прав. Хотя Планк и был задет непониманием своей работы, это не нашло отражения в его публикациях. Его радует совпадение выводов, полученных столь различными методами, и он видит в этом подтверждение своей веры в фундаментальный характер второго закона термодинамики.

В 1889 г. после смерти Кирхгофа Берлинский философский факультет, очевидно под влиянием Гельмгольца, пригласил Планка на кафедру теоретической физики, сначала экстраординарным, а с 1892 г. ординарным профессором. Планк описывает последующие годы как наиболее важный период, когда расширился его научный кругозор благодаря установлению, впервые в его жизни, личных контактов с ведущими физиками. Гельмгольц, чьими работами Планк восхищался и раньше, своей простотой, достоинством и доброжелательностью сумел завоевать прямо-таки благоговейное отношение к себе. Даже простая похвала из его уст делала Планка счастливым. У Планка были прекрасные личные отношения и с преемником Гельмгольца А. Кундтом, а позднее тесная дружба связала его с Г. Рубенсом.

В первый свой период жизни в Берлине Планк оставил термодинамические исследования ради другой задачи, которая затрагивала его музыкальные интересы.

Большая фисгармония с многими регистрами, выполненная, по предложению Гельмгольца, в нетемперированной настройке, была в то время передана департаменту физики. Планк научился играть на этом сложном инструменте и изучил действие нетемперированной настройки в сравнении с темперированной, введенной Бахом; он обнаружил неожиданный эффект и сообщил о нем в статье (1893), а именно, что наше ухо предпочитает темперированные гаммы.

В то время возникла руководимая Вильгельмом Оствальдом школа «энергетиков», которые провозгласили, что закон энергии является достаточной основой для того, чтобы вывести из него всю физику и химию. Больцман принял вызов и вскоре оказался вовлечен в острую дискуссию с этой группой. Планк поддержал его в статье 1896 г., в которой впервые обнаружился его полемический дар. Оствальд различал три вида энергии соответственно трем измерениям пространства: зависящую от расстояния, поверхностную и объемную. Планк ответил, что есть случаи, где не существует объемной, в смысле Оствальда, энергии, как, например, в случае идеального газа, энергия которого зависит лишь от температуры, а вовсе не от объема. Другим пунктом разногласий была несостоятельность энергетической школы в понимании второй теоремы Клаузиуса. Они сравнивали поток энергии от более высокого уровня температуры к более низкому с падением груза, не принимая в расчет необратимость процесса. Эта искусственная аналогия была отвергнута Планком. Хотя принцип сохранения энергии был верен и для Планка являлся основным, он ясно понимал, что только одного этого принципа недостаточно для построения механики и что необходим значительно более универсальный принцип, такой, как принцип наименьшего действия. В термодинамике он защищал различие между обратимыми и необратимыми процессами, введенное Клаузиусом.

В автобиографии Планк жалуется, что в этом случае, как и во многих других, он не добился успеха и не переубедил коллег с помощью доводов, которые представлялись ему хотя и теоретическими, но совершенно обоснованными. В действительности же поражение энергетической школе в конце концов нанесла атомистическая теория Больцмана, которую в то время Планк не принимал безоговорочно.

Исследования Больцмана по кинетической теории газов привели его к конструированию некоторой величины H, зависящей от распределения молекул по скоростям, которая, как он смог доказать, непрерывно уменьшалась со временем. Идентифицируя $-H$ с энтропией, он дал кинетическую интерпретацию второго закона Клаузиуса. Эта атомистическая концепция необратимости произвела глубокое впечатление и стала общепринятой.

Планк подчеркивает, что вначале он не только был безразличен, но иной раз даже сомневался в правильности статистического подхода Больцмана. Причина в том, что Планк рассматривал закон возрастания энтропии как общий и свободный от ограничений, подобно закону сохранения энергии, в то время как в теории Больцмана он выступал только как вероятностный закон: величина H могла иной раз возрастать, а энтропия уменьшается.

Э. Цермело, молодой и темпераментный ученик Планка, атаковал статистические идеи Больцмана, используя теорему Пуанкаре, согласно которой любая механическая система является квазипериодической; как в таком случае могла величина, определенная через механические переменные, подобно больцмановской H, постоянно уменьшаться? Для Больцмана не представляло труда опровергнуть этот аргумент, показав, что определение его функции H включает вероятность и, следовательно, теорема об уменьшении ее должна пониматься статистически. Спор с обеих сторон велся на достаточно высоких нотах; Больцман проявил здесь свой саркастический ум, задевая также Планка, который поддерживал своего ученика. С этого времени отношения между ними были не слишком дружественными, пока Больцмана не смягчил атомистический вывод Планком закона излучения. Фактически никто не сделал больше для принятия и распространения идей Больцмана, чем Планк; его теория излучения полностью на них построена и смоделирована аналогично им, а одним из основных его результатов было определение, из данных по излучению, постоянной k в фундаментальном соотношении Больцмана $S = k \log P$ между энтропией S и вероятностью P.

Обсуждая этот вопрос в автобиографии, Планк выразил некоторое недоумение принятым названием для k — «постоянная Больцмана», отмечая, что Больцман ни ввел ее, ни даже не собирался определять ее значение, оставив это своему коллеге Лошмидту. Это свидетельствует о том, что спор с Больцманом оставил свой след в его памяти, и отголоски спора давали еще о себе знать в старости, когда Планк писал эти строки.

Интерес Планка к проблеме теплового излучения возник под влиянием экспериментальной работы по изучению спектрального распределения излучения «черного тела», выполненной в Государственном физико-техническом институте (Берлин — Шарлоттенбург). Исследования здесь проводили две группы выдающихся физиков — Люммер и Прингсгейм, Рубенс и Курльбаум. Благодаря их измерениям Планк обратил внимание на теоретические исследования Кирхгофа свойств излучения «черного тела», т. е. излучения в полости с идеально отражающими стенками, которая заполнена произвольно излучающими и поглощающими телами. Он показал, что равновесие устанавливается в течение времени, за которое все тела приобретут одну и ту же температуру, и излучение по своим свойствам, включая спектральное распределение (энергия на единицу длины волны), не зависит от тела, а только от температуры. Этот так называемый нормальный спектр является, следовательно, чем-то «абсолютным» и потому чрезвычайно привлекательным для Планка, философский склад ума которого всегда стремился исследовать «абсолютное». С этого времени объяснение закона стало его целью, которой он начиная с 1896 г. с поразительным упорством, всегда в контакте с параллельными экспериментальными исследованиями, проводившимися в институте, старался достичь. Серия статей (1897—1901), посвященных исключительно этой проблеме (поиски решения закончились полным успехом), свидетельствует не только об искусстве и изобретательности Планка, но также и о его характере — непреклонной воле и неустанном трудолюбии, осторожной настойчивости в сочетании с величайшей смелостью. Он от природы был консерватором; у него ничего не было от революционера, и он весьма скептически относился к спекулятивным рассуждениям. Но его вера в непреодолимую силу логического объяснения, основывающегося на фактах, была столь сильна, что он не уклонился от провозглашения самой революционной идеи, которая когда-либо потрясала физику.

К этому времени электромагнитная теория света Максвелла начала завоевывать континент. Планк ее принял и использовал для своей цели. Так как, по Кирхгофу, излучение черного тела не зависит от природы излучающих и поглощающих тел, то Планк находит простую модель, а именно, линейные осцилляторы с разными, присущими им частотами и малым затуханием. Он предполагал, что обмен энергии при излучении и поглощении автоматически приведет к окончательному равновесному состоянию в согласии с результатами Кирхгофа. Первый шаг в этом направлении состоял в подсчете излучения и поглощения осциллятора, находящегося в данном поле излучения. Для описания последнего компоненты электромагнитного поля разлагались в ряд Фурье с произвольными амплитудами и фазами. Теперь это стандартный метод теоретической физики и столь хорошо известен, что немногие физики могут представить те усилия, которые были необходимы чтобы его создать. Эти усилия еще заметны в книге Планка по теории излучения, которая появилась много позже и содержит расчеты в сжатом виде. Главный результат состоял в установлении связи между средней энергией осциллятора u с заданной частотой ν и средней плотностью энергий ρ окружающего его излучения в стационарном (статистическом) равновесии: $\rho = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} u$. Это соотношение не зависит от затухания осциллятора — факт, который заметно упрощает задачу; таким образом, задача сводится к изучению системы осцилляторов, каждый из которых обладает только одной степенью свободы.

С другой стороны, первоначальная надежда Планка на то, что осцилляторы могли бы осуществлять обмен энергией между различными частотами и, таким образом, привести сразу к установлению нормального спектра, не оправдалась, поскольку оказалось, что каждый осциллятор заметно реагирует только на излучение с собственной частотой.

И вновь разгорелась дискуссия с Больцманом. Последний отрицал, что взаимодействие осцилляторов с излучением необратимо и отметил, что каждый отдельный процесс, рассматриваемый Планком, может протекать также и в обратном направлении даже в случае распространения от осциллятора сферической волны, потому что в стационарном состоянии каждой уходящей волне соответствует приходящая волна, которая передает энергию осциллятору. Формально это верно, но тем не менее Планк был совершенно прав. Он продемонстрировал более глубокое понимание статистической физики, чем даже Больцман. Как в случае газа механическая обратимость может быть трансформирована в термодинамическую необратимость лишь при введении гипотезы о молекулярном беспорядке (т. е. при замене точных выражений усредненными), так в случае излучения необходимо введение соответствующего предположения, которое Планк назвал гипотезой о «естественном излучении». Она состоит в усреднении фаз и амплитуд простых гармонических волн, на которые излучение может быть разложено. Таким образом, этот спор был не бесполезен, а привел Планка к более ясному пониманию собственной методики.

После неудачной первой попытки Планк занялся поисками другого подхода и нашел его в использовании термодинамических концепций и, наконец, в применении статистических методов, разработанных его противником Больцманом.

Планк надеялся, что он может получить простые результаты, исследуя отношение энергии U к энтропии S, а не к температуре T. Для системы в фиксированном объеме имеет место термодинамическая формула $TdS = dU$, из которой легко получить

$$\frac{d^2S}{dU^2} = \frac{-1}{T^2\frac{dU}{dT}}.$$

Если энергия U — известная функция от температуры, то правую часть можно рассматривать как заданную функцию U; таким образом, мы имеем дифференциальное уравнение для определения $S(U)$.

В это время В. Вин опубликовал закон для спектрального распределения излучения в виде $U(T) = Ae^{-B/T}$ (B — величина, пропорциональная частоте), который был интересен тем, что был подобен закону статистического распределения Больцмана, а также хорошо описывал эксперимент в широкой спектральной области. Если подставить его в предыдущую формулу, найдем

$$\frac{d^2S}{dU^2} = -\frac{1}{BU}.$$

Этот результат столь удивительно прост, что вначале Планк считал его всеобщим. В данном случае тесная связь Планка с экспериментаторами института была решающей. Благодаря измерениям Люммера и Прингсгейма, а еще более — Рубенса и Курльбаума постепенно становилось ясно, что закон излучения Вина, хотя и вполне удовлетворителен для коротких волн и низких температур, не согласуется с данными для длинных волн и высоких температур, где он должен быть заменен другим законом, а именно таким, чтобы энергия, приходящаяся на частотный интервал, была пропорциональна температуре: $U(T) = CT$. Этот закон известен теперь как закон Рэлея—Джинса. Фактически лорд Рэлей показал примерно в это же время, в 1900 г., что такой закон является необходимым следствием обычной статистической механики для случая излучения; и эта точка зрения была вновь подтверждена в 1909 г. Джинсом. В этом случае

$$\frac{d^2S}{dU^2} = -\frac{C}{U^2};$$

и вновь — удивительно простой результат.

Таким образом, Планк должен был обдумать оба предельных случая. Описывая этот период, он говорит, что судьба была добра к нему. Его часто огорчало отсутствие интереса у коллег к его работе; но теперь это обернулось для него преимуществом; никто еще не пришел к мысли рассматривать энтропию как решающую величину, и это позволило ему осуществить свой план, не опасаясь помех или конкуренции. Следующей проблемой было объединение двух выражений в одно, чтобы они оказались предельными случаями для больших и малых значений U. Планк сразу же отметил, что это достигается, если к величине, обратной d^2S/dU^2, прибавить два выражения:

$-BU$ и $-U^2/C$; снова беря обратное выражение, он пришел к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2S}{dU^2} = \frac{-C}{U(U+BC)}.$$

Это сложение оказалось одной из наиболее важных и значительных интерполяций за всю историю физики; так обнаружилась почти сверхъестественная физическая интуиция Планка. Пятью годами позже все это стало заметно понятнее и интереснее благодаря интерпретации Эйнштейна, данной в той же статье, в которой он связал закон Планка с фотоэффектом; Эйнштейн заметил, что величина, обратная d^2S/dU^2, имеет простой физический смысл — это среднее квадратичное флуктуации энергии $\overline{\Delta U^2}$; а хорошо известно, что средние квадратичные флуктуаций обладают свойством аддитивности, если они вызываются независимыми причинами. Этот аргумент был использован Эйнштейном для указания на независимое существование световых квантов; однако рассмотрение этого выходит за рамки данной статьи.

Теперь объединенную формулу, содержащую две постоянные, можно было проинтегрировать, что сразу приводит к новой формуле для излучения, о которой Планк доложил в Берлинском физическом обществе 19 октября 1900 г.

Он рассказывает нам, что на следующее утро его коллега Рубенс пришел к нему и сообщил, что в ту же ночь, после заседания, он сравнил формулу Планка со своими измерениями и обнаружил всюду удовлетворительное согласие. Люммер и Прингсгейм вначале считали, что отклонения были, но вскоре обнаружили, что это вызвано ошибкой в расчете. Впоследствии было проведено много опытов для проверки формулы Планка, и их результаты показали, что по мере улучшения методов измерения достигается все более полное совпадение теоретических и экспериментальных данных.

Все же это была только интерполяция и было необходимо найти физический смысл полученного результата. Для понимания этого Планк обратился к фундаментальному соотношению Больцмана между энтропией и вероятностью: $S = k\log P$. Так, он исследовал вопрос, можно ли то выражение для P, которое получаем, если подставить для S значение, соответствующее найденному из нового закона излучения, интерпретировать как вероятность. В докладе, прочитанном в Немецком физическом обществе 14 декабря 1900 г., он объявил, что такая интерпретация действительно возможна. Кроме постоянной k, которая была отождествлена с абсолютной газовой постоянной, отнесенной к грамм-молекуле, появилась новая константа размерности (энергия $\times$ время), которую он назвал «элементарным квантом действия» и обозначил через h. Теперь h всегда называют постоянной Планка. Планк увидел существенную особенность своего открытия в этом «кванте действия». Его современников более всего волновали «квант энергии» $\varepsilon_0 = h\nu$ и утверждение Планка, что энергия, излучаемая и поглощаемая осцилляторами «атомарна», всегда кратна ε_0. Это было тем предположением, которое привело Планка к выражению для средней энергии системы осцилляторов. Используя больцмановский закон распределения, имеем

$$u = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\varepsilon_0 e^{-n\varepsilon_0/kT}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n\varepsilon_0/kT}} = \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/kT} - 1}, \qquad \varepsilon_0 = h\nu,$$

и с помощью предыдущего результата Планка о связи между излучением и осцилляторами находим выражение для плотности излучения

$$\rho = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} u = \frac{\frac{8\pi h}{c^3}\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Эта формула включает в себя все ранее известные законы излучения: закон Стефана—Больцмана для общего излучения, закон смещения Вина и, конечно, два предельных закона: Рэлея—Джинса — для больших T и Вина — для малых T. Из известных постоянных, фигурирующих в этих законах, Планк вычислил значения двух постоянных — k и h. Зная k, он нашел число N атомов в грамм-молекуле (число Авогадро или Лошмидта), а с помощью закона Фарадея — элементарный электрический заряд e; его результаты были значительно достовернее, чем все известные к тому времени, и позднее получили подтверждение многими другими методами.

Планк совершенно ясно сознавал важность своего открытия. Мы имеем не только свидетельство его жены, но также сообщение его сына Эрвина, переданное профессору Бавинку, который об этом и рассказал. Это было в 1900 г., когда Планк, на прогулке в Грюневальде, около Берлина, сказал сыну: «Сегодня я сделал столь же важное открытие, как и открытие Ньютона». Конечно, Планк никогда не говорил ничего подобного публично. Он сдержанно и неохотно говорил о своей работе, и это производило впечатление, будто сам он не вполне уверен в собственном результате. Поэтому распространилось мнение, особенно вне Германии, будто Планк, «по-видимому, не понимал, что же в действительности он сделал», не представлял масштаба своего открытия. Насколько это ошибочно, ясно свидетельствует его автобиография: хотя написана она им в старости, у нас нет причин сомневаться в том, что в ней правильно отражены его размышления в годы, последовавшие за этим открытием. Планк сообщает, как упорно пытался он ввести квант действия в систему классической теории, но безуспешно. Затем он продолжает: «Но эта величина [постоянная h] оказалась строптивой и сопротивлялась всем подобного рода попыткам. До тех пор пока ее можно считать бесконечно малой, т. е. при больших энергиях и более продолжительных периодах, все было в полном порядке. Но в общем случае то там, то здесь возникала зияющая трещина, которая становилась тем более заметной, чем более быстрые колебания рассматривались. Провал всех попыток перекинуть мост через эту пропасть не оставил вскоре никаких сомнений в том, что квант действия играет фундаментальную роль в атомной физике и что с его появлением началась новая эпоха в физической науке, ибо в нем заложено нечто, до того времени неслыханное, что призвано радикально преобразить наше физическое мышление, построенное на понятии непрерывности всех причинных связей с того времени, как Лейбниц и Ньютон создали исчисление бесконечно малых».

Общеизвестно, что год 1900-й действительно отмечает начало новой эпохи в физике. Однако в первые годы нового столетия мало что изменилось. Я был тогда студентом и помню, что об идее Планка неохотно упоминали на лекциях, а если и говорили, то как о предварительной «рабочей гипотезе», которую, конечно, следовало бы исключить. Сам Планк занялся другими вопросами. Но, как показывают изданные в 1906 г. его «Лекции по теории теплового излучения», которые произвели глубокое впечатление ма́стерским описанием последовательных шагов, приведших к квантовой гипотезе, он никогда не забывал о своих квантах.

Годом раньше появилась уже упоминавшаяся статья Эйнштейна, в том же знаменитом томе «Annalen der Physik» (1905), где были помещены и две другие фундаментальные работы Эйнштейна: одна — по теории относительности, другая — о броуновском движении. Эйнштейн показал, что кванты являются особенностью не только теплового, но любого излучения, и привел экспериментальные и теоретические соображения в пользу корпускулярной интерпретации света. Ряд явлений, таких, как фотоэлектрический эффект, возникновение рентгеновских лучей при бомбардировке электронами мишени, стоксово правило флуоресценции, могут быть легко объяснены с помощью «световых квантов» $h\nu$. Теперь пробужден интерес экспериментаторов, и прогресс становится заметнее.

С момента зарождения теории решающий шаг был вновь сделан Эйнштейном в 1907 г., когда он применил формулу Планка для средней энергии u системы осцилляторов к колебаниям атомов, молекул и твердых тел, объяснив, в частности, отклонение от классического закона Дюлонга и Пти удельной теплоты твердых тел. Он положил начало многим экспериментальным изысканиям, например исследованиям Нернста и его школы по удельной теплоте при очень низких температурах. Но я не могу проследить историю квантовой теории в общем, так как это значило бы коснуться большей части современной физики. Я должен ограничиться вкладом самого Планка в теорию.

В 1910 г. Планк опубликовал работу, в которой подытожил полученные результаты. Он обсудил ряд статей Дж. Дж. Томсона, Лармора, Штарка и Эйнштейна, которые применили квантовую гипотезу для объяснения различных явлений; он, однако, проявил большу́ю осторожность по отношению к возврату Эйнштейна к корпускулярной теории света. Главным аргументом является существование электростатических полей, которые, с точки зрения Эйнштейна, были бы чем-то совершенно отличным от полей излучения. Может ли кто-нибудь отказаться от унификации всех электромагнитных полей, проведенной Максвеллом, в свете существующих фактов? Его вывод состоит в том, что электродинамика, по всей вероятности, верна, а физическая статистика, возможно, неверна.

В докладе, прочитанном на Сольвеевском конгрессе 1911 г., Планк предпринял решительную попытку развить вариант статистической механики, предполагая, что фазовое пространство Гиббса разделено на конечные ячейки размера h для каждой пары сопряженных переменных p, q. В это же время он меняет свое предположение относительно поглощения и испускания: поглощение происходит непрерывно, а испускание — дискретно (1911 г.). Эта странная гипотеза казалась ему единственно возможной, для того чтобы избежать выбора между квантовыми явлениями и электромагнитной теорией. Многие физики, особенно более молодые, считали «вторую квантовую теорию» Планка неубедительным компромиссом. Сегодня вряд ли стоит обсуждать все за и против. Но нельзя забывать, что она привела к наиболее важному результату, именно, что при абсолютном нуле энергия осциллятора равна $h\nu/2$. Формально следует из разложения формулы Планка для энергии резонатора при высоких температурах, что

$$u = \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/kT} - 1} = kT - \frac{\varepsilon_0}{2} + \ldots,$$

где члены, изображенные точками, исчезают при $T \to \infty$. Это выражение показывает, что формула Планка не сходится точно к величине kT (что соответствует формуле Рэлея—Джинса для ρ), а отличается от нее на $\frac{1}{2}\varepsilon_0 = \frac{1}{2}h\nu$. Новая статистика Планка приводит к значению для u, большему, чем приведено выше, на $\frac{1}{2}\varepsilon_0$, и, следовательно, при $T \to \infty$ сходится точно к kT. Таким образом он нашел новый подход к теореме Нернста и к вопросу об абсолютной энтропии газов (1916 г.). Последующие исследования показали реальность нулевой энергии, например вследствие ее влияния на рассеяние рентгеновских лучей в кристаллах. Сам Планк считал свою вторую квантовую гипотезу столь важной, что положил ее в основу второго издания книги «Тепловое излучение», появившегося в 1913 г. Другая модификация теории содержалась в ряде статей (1915, 1917), в которой он заменил осцилляторы ротаторами. Здесь он воспользовался методом, впервые введенным Эйнштейном в его теории броуновского движения, а позднее улучшенным и примененным к излучению Фоккером. В этом методе изменения во времени и пространстве распределения частиц, подвергающихся малым иррегулярным толчкам, описываются с помощью дифференциального уравнения в частных производных, коэффициенты которого — средние смещения и средние квадратичные смещения для заданного малого интервала времени. Эту формулу теперь обычно называют уравнением Фоккера—Планка; область ее применимости представляется еще не исчерпанной.

Год 1913-й отмечен как поворотный пункт в квантовой теории, поскольку тогда появилась первая статья Нильса Бора по квантовой теории электронной структуры атомов. Планк принял активное участие в развитии теории, которая привела к современной квантовой механике. Планк обращался также ко многим другим проблемам, краткий обзор которых необходимо дать.

Исследования Планка по излучению убедили его в том, что электромагнитному полю присущи статистические черты, подобные тем, что имеют место для газа; амплитуды и фазы элементарных волн произвольны и могут быть распределены случайным образом. На этом пути он пришел к теории «естественного», или «белого», света (1902), которой впоследствии занимался его ученик Макс фон Лауэ. Позже он проявил интерес к обычной оптике, в частности к теории дисперсии Друде. Он ввел в нее представление о радиационном затухании осциллятора (1902, 1903, 1904, 1905). Планк рассчитал затухание света в оптически однородной среде с нормальной дисперсией и сравнил свои результаты с прежней теорией лорда Рэлея о распространении света в вакууме, в котором рассеяны многочисленные непроводящиеся частицы. Он пришел к тому же закону для коэффициента поглощения, что и Рэлей, хотя закон дисперсии был разным в этих двух моделях. Опыты, проведенные Хагеном и Рубенсом по исследованию оптических свойств металлов, привели Планка к теоретическому изучению этого предмета (1905).

Планк вернулся к теории газов и обобщил метод Больцмана таким образом, чтобы он мог включить поправки

Ван-дер-Ваальса, связанные с конечностью объема молекул.

Однако предметом, завладевшим воображением Планка более, чем что-либо другое, оказалась эйнштейновская теория относительности, опубликованная в 1905 г. В научной биографии Планка есть примечательная страница, где он объясняет, как его поиски «абсолютного» —основного источника его научной деятельности — согласуются с интересом его к принципу относительности. «В этом можно усмотреть противоречие... Такое суждение основано на принципиальной ошибке, ибо само «относительное» предполагает нечто «абсолютное»; оно только и имеет смысл, если ему противопоставляется нечто «абсолютное». Часто произносимая фраза «все относительно» тоже вводит в заблуждение, потому что она бессмысленна. Таким образом, в основании так называемой теории относительности лежит нечто абсолютное, а именно, определение меры пространственно-временнóго континуума; и наиболее привлекательная задача — обнаружить то Абсолютное, что придает данному Относительному смысл...» В теории относительности его привлекал поиск тех инвариантов, которые представляют «абсолютное». Скорость света, которая в классической физике имела лишь относительный смысл, становится в теории относительности абсолютным инвариантом. Другой важный инвариант — интеграл действия механики; законы движения могут быть получены из принципа наименьшего действия в теории относительности.

Планк впервые применил эту идею к точке (1906) и нашел релятивистскую форму уравнений механики несколько раньше, чем Минковский. Он проанализировал измерения Кауфмана по отклонению β-лучей с точки зрения их связи с принципом относительности (1906, 1907). В 1908 г.[1] он опубликовал большую статью по общей динамике движущихся систем, в которой подробно изложил диссертацию своего ученика К. фон Мозендейля (опубликованную Планком в 1907 г. после преждевременной смерти молодого автора).

---

[1] Статья М. Планка «К динамике движущихся систем» впервые опубликована в отчетах о заседаниях Берлинской академии наук за 1907 г. В 1908 г. она появилась в журнале «Annalen der Physik» (26, p. 1—34).— *Прим. пер.*

Так как теория относительности учит, что масса пропорциональна энергии, и так как энергия тела зависит от содержащегося в нем тепла, то разделение механики и термодинамики невозможно. Планк развивает объединенную теорию, основанную на релятивистской инвариантности принципа наименьшего действия, и получает законы преобразования для энергии, количества движения, энтропии и температуры. С их помощью могут быть получены выражения для этих величин в зависимости от скорости, если известны их значения в покоящейся системе. Если предположить, что эти выражения, выведенные для равномерного движения, также применимы и к движению с ускорением, то можно записать уравнения движения. В этой статье есть весьма примечательный раздел (§ 18), где он предвидит возможность использования «атомной энергии». Для него совершенно ясно, что каждое тело в состоянии покоя обладает колоссальным количеством «скрытой» энергии: «Хотя фактический выход такого «радикального» процесса, вероятно, показался бы чрезвычайно малым еще десять лет назад, сейчас это перешло в область возможного благодаря открытию радиоактивных элементов и их превращений. И действительно, наблюдаемое постоянное выделение тепла радиоактивными веществами является прямым доказательством предположения, что источник этого тепла не что иное, как скрытая энергия атомов».

Прусская академия благодаря в основном инициативе Планка, Нернста и Габера открывает специальную кафедру для Эйнштейна, что позволило ему следовать своим наклонностям, не отвлекаясь на повседневную и педагогическую работу. С этого времени в течение многих лет Планк и Эйнштейн встречались регулярно в Берлинской академии; между ними возникли дружеские отношения, которые вышли далеко за рамки обсуждения только научных идей. И все же трудно представить себе людей более разных в отношении к жизни... Однако что́ значили все различия, когда у них было столько общего — захватывающий интерес к тайнам природы, сходные философские убеждения и глубокая любовь к музыке. Они часто исполняли камерную музыку — Планк играл на фортепиано, Эйнштейн — на скрипке; оба, совершенно поглощенные музыкой и счастливые. Планк был превосходным пианистом и по просьбе мог сыграть почти любую пьесу классической музыки, в большинстве на память. Он любил также импровизировать либо на заданную ему тему, либо на темы старых немецких народных песен, которые нежно любил.

Сотрудничество Планка и Эйнштейна сделало Берлин в годы, предшествовавшие первой мировой войне, самым значительным центром теоретической физики в мире. Мне также посчастливилось быть приглашенным в Берлин. Планк хотел освободиться от части своих обязанностей по преподаванию и убедил министра образования Пруссии открыть новую (экстраординарную) профессуру в Берлинском университете. Ее предложили мне, увы, в день мобилизации, 2 августа 1914 г. В течение следующих четырех военных лет у меня было мало времени для преподавательской деятельности и мирных исследований, однако я подолгу бывал в Берлине и часто встречался с Эйнштейном и Планком. Короткая прогулка — и я от своего дома доходил до виллы Планка в пригороде Грюневальд. Я помню его кабинет: стены, заставленные книгами, простая обстановка, большая доска (подобные доски можно найти в старых конторах), которой он пользовался, чтобы работать стоя.

Я никогда не был учеником Планка и даже не посещал его лекций. Я читал его статьи и книги, видел издали на научных заседаниях и, возможно, обменялся несколькими словами с ним. В то время Планк был уже знаменит, и я приближался к нему с некоторой робостью. Но доброта Планка, его любезность, гостеприимство его дома помогли быстро забыть о большой разнице в возрасте и положении. У нас проходили интереснейшие дискуссии по вопросам физики и на злободневные темы. У Планка были устоявшиеся взгляды, и выражал он их откровенно, но никогда это не оскорбляло. Та же систематичность, аккуратность и ясность, которые отличали сочинения Планка, характеризовали и его отношения к малым и большим вопросам повседневной жизни.

За годы войны он очень изменился: печаль омрачила дружелюбное выражение его лица. Причиной этого были не только общее страдание, катастрофический финал войны, которые больно задели его патриотические чувства, но и ужасные личные потери. Первая жена Планка, Мария Мерк, умерла в 1909 г. Он вновь женился на Марго фон Гесслин. Трое из четырех детей от первого брака умерли за годы войны. Его старшего сына Карла убили в сражении близ Тиамона во Франции в 1916 г. Две его дочери, Эмма и Маргарет, были близнецами. Одна из них вышла замуж за профессора Фердинанда Фелинга; она умерла во время родов в 1917 г. Ее сестра взяла на себя заботу об осиротевшем ребенке, а позднее вышла замуж за вдовца. Годом позже то же случилось и с ней: она умерла после первых родов, а ребенок остался жив. Оба ребенка получали образование также и в доме деда. Остался только один сын от его первой жены — Эрвин и младший сын Герман, от второго брака. Но Планка ожидало еще большее несчастье.

Несмотря на все тревоги и горести, Планк продолжал научную работу, вернувшись к своей квантовой теории, которой столь долго пренебрегали. Благодаря статьям Бора 1913 г. она неожиданно оказалась в центре внимания физиков. Метод квантования Бора был чрезвычайно удачным для одноэлектронной задачи; как можно его обобщить на многоэлектронную систему? Эту задачу почти одновременно решили Зоммерфельд, Эпштейн и Планк (1915, 1916). Методы отличались по форме, но привели во всех практических случаях к одинаковым по существу результатам. В то время как Зоммерфельд рассматривает многократно периодические системы, для которых возможно разделение гамильтониана на независимые пары координат и импульсов, метод Планка состоит в разбиении общего «фазового пространства» координат и импульсов на ячейки с помощью пар поверхностей на расстоянии nh ($n = 1, 2, \ldots$), которые являются интегральными инвариантами уравнений движения. Так он получил, например, энергию через квантовые числа для ротатора, симметричного волчка, обычного и релятивистского кеплеровского движения и т. д. Он даже взялся за асимметричный волчок. Затем он применил полученные результаты к оптической проблеме — вращательным спектрам молекул (1917). Здесь ему пришлось преодолеть специфическую трудность, связанную с его методом квантования; для каждого набора квантовых чисел допускаются малые, но конечные области фазового пространства, между тем как наблюдения дают более резкие линии. Способ, каким Планк устранил явное противоречие, представляет сегодня лишь исторический интерес, подобно всем работам, выполненным в то время. Поэтому достаточно упомянуть о нескольких статьях, из которых видно, что он всегда пытался рассматривать наиболее интересные для своего времени задачи. Он подсчитал теплоту диссоциации молекулы водорода в соответствии с «кольцевой моделью», предложенной Бором и Дебаем (1919). Он пытался разрешить парадокс Гиббса статистической механики путем точного определения свободной энергии молекул газа при произвольном распределении их по скоростям (1922). В нескольких статьях под разными названиями Планк рассматривает вопрос о флуктуации энергии в излучении черного тела (1923, 1924). Он обсудил трудность, относящуюся к определению свободной энергии атомарного водородного газа.

Как уже отметил Бор, функция, взятая по различным состояниям, расходится в этом случае, так как значения энергии стремятся к нулю, как $-n^{-1}$. Решение Планка заключается по существу в обрезании дискретного спектра, когда радиус орбиты соизмерим с линейными размерами полости. Он, однако, не пренебрегает остатком, а показывает, что в этих состояниях электрон можно считать свободной частицей.

В статье «Новое статистическое определение энтропии» (1925) содержится общая формулировка статистического выражения Больцмана и Гиббса энтропии $S = k \log P$ для квантовых систем; Планк определяет P как число стационарных состояний, энергия которых не должна превышать данного значения E (вместо того, чтобы взять сумму по всем состояниям в данном узком энергетическом интервале), и показывает, что это приводит к правильному выражению для системы осцилляторов и для одноатомного газа.

По окончании войны я уехал из Берлина. Макс фон Лауэ, блестящий ученик Планка, захотел вернуться в Берлин и работать рядом с учителем. Поэтому он обратился ко мне с предложением обменять мою профессуру в Берлине (экстраординарную) на его полную профессуру во Франкфурте-на-Майне, и так как Планк был согласен, я принял предложение Лауэ. С 1919 г.Берлин стал местом пребывания созвездия трех наиболее блестящих физиков-теоретиков — Планка, Эйнштейна, фон Лауэ; вскоре к ним присоединился Шредингер. В 1926 г. Шредингер опубликовал статью по волновой механике, которая на всех сразу же произвела впечатление даже большее, чем открытие Планка в 1900 г. Физики были подготовлены к этому работой, проводившейся в течение предшествовавших двадцати пяти лет, и особенно публикациями де Бройля и Геттингенской школы.

Вполне естественно, что, когда Планку в 1928 г. исполнилось семьдесят лет и он должен был оставить кафедру, Шредингер стал его преемником. Планк, однако, не удалился от дел. Он остался непременным секретарем отделения математической физики Берлинской академии и продолжал вести научную работу и писать статьи, освобожденный от бремени читать лекции студентам.

У Планка никогда не было научной школы, как у Зоммерфельда в Мюнхене, и число учеников, писавших под его руководством диссертации, невелико. Я уже упоминал о К. фон Мозенгейле, Э. Цермело и М. фон Лауэ. Учениками Планка были также Макс Абрагам, известный благодаря своей книге по теории электричества Максвелла, Ф. Райхе, который написал одну из первых книг по квантовой теории, Э. Ламла, Г. Кальман и некоторые другие. Лизе Мейтнер длительное время была ассистентом Планка.

Но много студентов посещали его лекции и учились по его книгам. Курс лекций Планка опубликован в пяти томах в 1930 г., соответствуя пяти учебным семестрам ($2^1/_2$ года). В первых четырех томах рассмотрены механика точки и твердых тел, механика сплошных сред, электричество и магнетизм, оптика; в последнем томе дается сжатое изложение термодинамики, теории излучения и квантовой теории. Они послужили прототипом аналогичных лекционных курсов, читавшихся во всех немецких университетах. Благодаря английскому переводу расширилась сфера влияния этих лекций. Планк издал книги и лекции Клаузиуса и Кирхгофа. В 1910 г. он опубликовал цикл из восьми лекций, прочитанных им годом ранее в Колумбийском университете (Нью-Йорк); в 1922 г.— книгу, озаглавленную «Physikalische Rundblicke», и недавно, в 1943 г., сборник своих речей и адресов в двух томах — «Wege zur physikalischen Erkenntnis».

Последний период научной деятельности Планка связан с квантовой механикой. То, что он ожидал от работы своего преемника, проявилось в приветствии, с которым он, в качестве секретаря академии, обратился к Шредингеру после его вступительной лекции (1929). Планк приветствовал волновую механику как решение кризиса, потрясающего физику, выразившегося в скептическом отношении к всеобщей применимости закона причинности.

Я процитирую последние слова этого обращения: «Вы были первым, кто показал, как пространственно-временные процессы в атомной системе могут быть фактически полностью детерминированы, хотя и при предположении, что элементами системы считаются не движения частиц, а движения волн материи; и как загадочные дискретные собственные значения энергии системы можно вычислить с абсолютной точностью из вашего дифференциального уравнения при естественных граничных условиях, между тем как вопрос о физическом смысле волн можно оставить нерешенным».

Как видно из многочисленных популярных статей и приветствий Планка, этот кризис причинности очень занимал его мысли. Прежде чем об этом говорить, необходимо упомянуть, что в конце своей долгой жизни он продолжал публиковать статьи по специальным вопросам, в основном по тем, которые он разрабатывал в более ранние периоды. К ним относится ряд статей (1930, 1931, 1933) о граничных слоях разбавленных электролитов, одна — о принципе Ле Шателье и Брауна (1934), одна — о возникновении электричества в электролитах. Особенно примечательны три статьи под общим названием «Попытка синтеза волновой и корпускулярной механики», написанные в 1940 г., когда Планку было уже более восьмидесяти лет. В них проведено тщательное рассмотрение перехода от волновой механики к механике частиц через предельный процесс $h \to 0$. Планк показывает, что для осуществления такого перехода должно выполняться дополнительное условие, и он предполагает, что это условие строго выполняется, в отличие от обычных граничных условий уравнения Шредингера. В переводе на язык оптики это означает, как отметил Вессель, исключение всех решений, которые соответствуют дифракционным явлениям. Я не разделяю надежду Планка на то, что его «модификация волновой механики» ликвидирует брешь между квантовой и классической физикой, но она ясно показывает, как глубоко беспокоили Планка логические трудности, которые его собственная работа навязала физикам. В связи с этим я коротко остановлюсь на философских сочинениях Планка, число которых становилось все больше по мере того, как Планк старел, а в последний период его жизни они численно преобладали.

Почти невозможно отнести исследования Планка к какой-либо одной из традиционных философских систем; его работы связаны с рационализмом, идеализмом, эмпиризмом. Но существует одно направление, которое он решительно и постоянно отвергал,— позитивизм. Его оживленная дискуссия с Эрнстом Махом ещё заслуживает чтения. Планк начал ее в 1909 г. в статье «Единство физической картины мира», опубликованной в «Physikalische Zeitschrift». В следующем томе (1910) этого журнала опубликованы чрезвычайно ироничный ответ Маха и заключительная статья Планка, не менее острая и едкая. Мах защищает свою идею о том, что вся наука обязана принципу экономии мышления, который сам может быть понят только в свете биологической теории Дарвина; и он провозглашает, что надо, таким образом, найти основу для науки, свободную от любой метафизики. Основное возражение Планка сводится к тому, что этот принцип экономии мышления сам метафизичен. Существует и много других точек расхождения. Мах скептически относился к существованию атомов, считая кинетическую теорию Больцмана и даже абсолютный нуль температуры недоказуемой гипотезой; он критиковал концепцию Ньютона абсолютного вращения, предвосхитив в некоторой степени общую теорию относительности Эйнштейна. Только в этом пункте был прав Мах, по всем же остальным спорным вопросам дальнейшее развитие физики подтвердило физическую интуицию Планка.

В 1930 г. Планк пересмотрел свою критику антиметафизической школы в лекции «Позитивизм и реальный внешний мир», в которой он представляет свои аргументы менее язвительным, но наиболее убедительным образом. Я процитирую параграф, в котором заключено существо этой статьи: «База, данная позитивизмом физике, хотя и хорошо обоснована, но слишком узкая и должна быть расширена за счет дополнительного утверждения, важность которого состоит в следующем: он освобождает, насколько это возможно, науку от случайностей, связанных с индивидуумом. И это достигается фундаментальным шагом в метафизику, навязываемым не формальной логикой, а здравым смыслом; именно, через гипотезу, что наш личный опыт не создает физический мир, но что он служит нам только для передачи сообщения от другого мира, который находится вне нашего опыта и который не зависит от него; другими словами, что существует реальный внешний мир». Та же идея встречается во многих философских лекциях и статьях Планка. Их общая тенденция — показать, что наука есть не что иное, как развитый и утонченный здравый смысл.

Между тем собственное детище Планка, квантовая теория, превзошла все ожидания и теперь господствовала во всей физике. Но она развивалась в направлении, противоположном основным убеждениям Планка. Причинность и строгий детерминизм становятся проблематичными, Планк обсуждал эти вопросы в многочисленных публикациях, всегда сохраняя существо своих принципов неизменным и пытаясь согласовать их с физическими фактами. Некоторые из этих статей являются кульминационными при рассмотрении парадоксов, связанных с концепцией свободной воли в детерминистическом мире. Вывод Планка следующий: детерминизм действует без исключения, и мы можем использовать его для предсказания не только событий в неорганической природе, но даже для предсказания поведения других человеческих существ, хотя никогда — нашего собственного поведения. Размышляя о своих возможных решениях, мы влияем на них и не можем поэтому предсказать их. Таким образом, не существует противоречия между верой в свободу воли и строгой причинностью. Изложение идей Планка на английском языке можно найти в Гутрианской лекции, прочитанной им в 1932 г. в Лондонском физическом обществе. Называется она «Концепция причинности» и опубликована в «Proceedings of Royal Society» и обсуждена в «Nature» (1932, р. 45).

Планк был религиозным человеком, и несколько его статей посвящены вопросу о связи между наукой и религией (1930, 1947). Он считал, что наука может внести вклад не только в экономический прогресс, но также и в моральное и духовное совершенствование человечества. Он не видел существующего разрыва между своими научными и религиозными убеждениями.

Планк сохранил хорошее здоровье до старости. Это объяснялось простотой и регулярностью его жизни, а также его привычкой по-настоящему использовать отпуск. Чаще всего он проводил его в Альпах, живя несколько недель в уединенных горных деревушках, расположенных вблизи высоких вершин, а затем в своем небольшом имении вблизи Тегерзее. Он любил горы и был тренированным и закаленным альпинистом. Я навестил его однажды в Трафуа, когда ему было уже далеко за шестьдесят; он только что вернулся после восхождения на Ортлер (высота 12 000 футов).

Вскоре я встретился с ним опять в Южном Тироле при других обстоятельствах. После роспуска в апреле 1933 г. парламента Гитлером моя семья и я сразу же выехали из Германии и поселились в маленьком домике в Доломитах, который мы сняли на лето. Планк проводил лето в соседней долине. Я навестил его там. Он рассказал мне тогда, что как президент института кайзера Вильгельма он должен был нанести визит Гитлеру и попытался, воспользовавшись этим случаем, вступиться за своего коллегу Фрица Габера, без применения метода которого — получения азота из воздуха — первая мировая война была бы проиграна Германией в самом начале... Но Гитлер вошел в такой раж, что Планку ничего не оставалось, как молча все выслушать и удалиться. Позднее, в 1947 г., Планк описал эту сцену в «Physikalische Blätter». После провала своей попытки воззвать к разуму и сдержанности Планк, по-видимому, оставил всякие надежды изменить ход событий и сохранял видимый мир с власть имущими. Однако не было никаких сомнений в его истинных чувствах, и нацисты знали об этом.

Планк продолжал служить в Академии, в институте кайзера Вильгельма и других общественных учреждениях в надежде спасти немецкую науку от полного уничтожения... Я думаю, он надеялся, что нетерпимость и гнет со временем утихнут и все вернется к нормальному положению. Он не видел, что необратимый процесс шел дальше.

Планк бывал в Великобритании по своим делам и приобрел здесь много друзей. В 1937 г. он приехал в Шотландию для получения почетного звания в Глазго и почетного членства Эдинбургского королевского общества. Он с женой остановился в моем доме. Мы обсуждали тогда научные, политические и личные вопросы в последний раз. Когда мы встретились после войны на ньютоновских торжествах в Королевском обществе в 1946 г., он был лишь тенью прежнего Планка, выглядел усталым и болезненным, и только его добрая улыбка осталась неизменной. Дом Планка в Грюневальде был разрушен во время одного из больших воздушных налетов на Берлин, и он потерял все, включая библиотеку. Его сын Эрвин, единственный оставшийся в живых из четырех детей от первого брака, занимал высокий пост в правительстве; он был вовлечен в июльский заговор 1944 г. против Гитлера и казнен нацистами.

Я мало знаю о жизни Планка во время войны. Он с женой нашел прибежище в имении друга в Рогетце на Эльбе, близ Магдебурга. Здесь они оказались между отступающей немецкой армией и наступающими войсками союзников; сражения бушевали вокруг них много дней. Поль, физик из Геттингена, узнав о их положении, обратился к американцам с просьбой послать за ними военную машину и переправить их для безопасности в Геттинген.

Планк, покорившись судьбе, переносил свои многочисленные невзгоды спокойно и стойко. Возможно, наряду с религией этому способствовала и его детерминистская философия.

Последние годы он провел в Геттингене, но предпринимал длительные и утомительные путешествия, когда получал приглашение выступить с докладом.

Во время одной из таких поездок он серьезно заболел в Бонне, но, несмотря на свои восемьдесят восемь лет, ему удивительным образом удалось избавиться от двустороннего воспаления легких. Поэтому можно было надеяться, что он доживет до девяностолетней годовщины, к широкому празднованию которой готовились. Однако за несколько месяцев до этой даты Планк начал терять силы и 4 октября 1947 г. умер в Геттингене. Планировавшееся празднование дня рождения Планка было заменено панихидой, которая состоялась 23 апреля 1948 г. На ней присутствовали представители многочисленных научных институтов Германии и многих других стран.

Список тех учреждений, которые отдали должное заслугам Планка, присудив ему степень или избрав его своим членом, слишком длинный, чтобы его приводить здесь. Можно упомянуть лишь о немногих из них. Он имел немецкие звания почетного доктора естественных наук, почетного доктора техники, почетного доктора медицины, а также почетные звания нескольких британских университетов, включая Кембридж. Он был членом всех немецких и австрийских академий (Берлина, Мюнхена, Дрездена, Геттингена, Вены) и многих других (Англии, Голландии, Греции, Венгрии, Дании, Ирландии, Италии, СССР, УССР, США, Финляндии, Швеции). Лондонское королевское общество избрало его своим иностранным членом в 1926 г.

Он получил Нобелевскую премию в 1919 г. Одна из малых планет была «подарена» ему астрономами в день его восьмидесятилетия и названа Планкианой. В 1930 г. он становится президентом, а в 1946 г.— почетным президентом Института кайзера Вильгельма, который сейчас переименован в институт Макса Планка.

Немецкое физическое общество учредило медаль Макса Планка, и он был первым, кто ее получил. Ему была присуждена премия Гете города Франкфурта-на-Майне в 1946 г., и он был избран почетным членом и «рыцарем» (knight) американского общества Марка Твена.

Таким образом, величие Макса Планка было признано его современниками. Согласится ли потомство с этим утверждением? Мы — свидетели гигантского преобразования науки, которое произвело его открытие менее чем полвека назад,— не сомневаемся, что так и будет.

1948

ВОСПОМИНАНИЯ О ГЕРМАНЕ МИНКОВСКОМ [150]

Когда весной 1904 г. я окончил третий курс факультета математики, физики и астрономии, один, более опытный друг посоветовал мне переселиться в Геттинген, где преподавали три выдающихся математика — Феликс Клейн, Давид Гильберт и Герман Минковский. В то время в Германии было обычным, что студенты часто меняли университеты. Того же обычая придерживался и я, и из шести семестров только четыре я провел в своем родном городе Бреславле. Один летний семестр я провел в Гейдельберге, другой — в Цюрихе. Там я слушал блестящие лекции Гурвица, и после этого то, что преподносилось в Бреславле, показалось мне довольно бездарным. Вот я и решил последовать совету моего друга и отправиться для окончания своего обучения в Геттинген. Моя мачеха была родом из Кенигсберга и знала там Минковского. Она дала мне рекомендательное письмо к нему, которое я и принес к Минковским.

Однако сначала я не посещал лекций Минковского, а предпочитал Гильберта, который в то время создавал свою теорию интегральных уравнений и квадратичных форм от бесконечно многих переменных и излагал в своих курсах теорию, которой позднее суждено было сыграть очень большую роль в физике, особенно в квантовой механике. По заведенному тогда обычаю один из студентов брал на себя обработку лекции. Проверенная профессором рукопись передавалась затем в читальный зал как вспомогательный материал для студентов. Для выполнения этой обязанности Гильберт выбрал из группы кандидатов меня, и таким образом, будучи еще совсем молодым, я сблизился с великим математиком и лично.

Я еще совсем мало прожил в Геттингене, когда был приглашен Минковским на обед. Так я впервые лично познакомился с ним, увидел его прекрасное широкое лицо, его темные выразительные глаза и услышал его низкий, немного грубоватый голос. Меня представили его жене и двум маленьким дочерям. Кроме меня, был там еще только один гость, Константин Каратеодори, молодой грек, который раньше служил в Турции инженером, работал в Египте и Месопотамии, а затем посвятил себя чистой математике и теперь был приват-доцентом в Геттингене. Мы вскоре стали близкими друзьями. Он был замечательным математиком и умер в Мюнхене несколько лет назад, будучи уже профессором.

После обеда появился Гильберт со своей женой, и мы все вместе совершили прогулку к руинам древнего замка в Плессах. Эта прогулка осталась для меня незабываемой не только из-за красоты гор и лесов. Беседа обоих друзей была фейерверком ума; проникнутая шуткой и юмором, она в то же время оставалась глубоко серьезной. Я сам вырос в атмосфере, которой не были чужды оживленные блестящие дискуссии и острая критика. Друзья моего отца, большей частью исследователи-врачи, как и он сам, тоже любили остроумные непринужденные беседы. Но врачи ближе к обыденной жизни и по своей человеческой натуре проще, чем математики, мозг которых работает в сфере высшей абстракции. Во всяком случае, мне еще никогда не приходилось слушать такую откровенную, независимую продуманную критику всевозможных событий в жизни, науке, искусстве, политике.

С тех пор я горячо заинтересовался обоими этими людьми и их деятельностью.

Я узнал, что Гильберт был уроженцем Кенигсберга, а Минковский родился 22 июня 1864 г. в России в Алексотах (Минской губернии), но еще мальчиком приехал в Кенигсберг. Его отец, еврейский купец, хотел избежать гнета, от которого страдали евреи в царской России, и переселился в Кенигсберг. Там Герман с октября 1872 г. посещал Альтштадтскую гимназию. Он был настолько одаренным, что перешагнул через несколько классов и уже в 15 лет сдал экзамен на аттестат зрелости.

С 1880 г. он пять семестров проучился в Кенигсберге, затем три семестра — в Берлине у Куммера, Кронекера, Вейерштрасса, Гельмгольца и Кирхгофа. Его дружба с Гильбертом началась еще в первые студенческие годы и продолжалась до преждевременной смерти Минковского.

Памяти друга Гильберт посвятил в 1910 г. взволнованную речь, из которой я заимствовал здесь сведения о жизни обоих. Гильберт рассказывает, что Минковский, еще будучи студентом первого курса, получил за решение одной математической задачи денежную премию, но отказался от нее в пользу бедного соученика и всю эту историю утаил от своей семьи. Это только лишь один пример его доброты и скромности, о которых знали все люди, которые с ним соприкасались.

Первой высокой оценкой в научной деятельности Минковского была «большая премия математических наук», объявленная Парижской академией весной 1881 г.; нужно было исследовать разложение целых чисел на пять квадратов.

Минковский представил свою работу 30 мая 1882 г., но вопреки условиям конкурса — на немецком языке. Однако академия, признавая ценность труда, прошла мимо этого формального нарушения и присудила ему полную премию. Минковский разобрал проблему с позиции наиболее общей теории чисел. Парижская шовинистическая пресса обрушила на него, иностранца, совершенно необоснованные нападки и подозрения, но великие французские математики без колебания приняли его сторону и стали его друзьями.

Бо́льшая часть работ Минковского посвящена теории чисел, но я не считаю себя вправе о них рассказывать. Я прочитал, и как раз перед приездом в Геттинген, только один из его арифметических трудов под названием «Диофантовы приближения», связанные с его лекциями, прочитанными зимой 1903/04 г. В нем, как и в большом произведении Минковского «Геометрия чисел», арифметические теоремы были получены из геометрических соображений; именно здесь и, в частности, с помощью сетки точек с целочисленными координатами на плоскости. Это представление о числовой решетке принесло мне известную пользу для динамической теории кристаллической решетки.

В 1885 г. Минковский получил докторскую степень в своем родном университете в Кенигсберге. В 1887 г. он становится приват-доцентом в Бонне. Там состоялась его встреча с Генрихом Герцем, побудившая его заняться физикой; в 1886 г. он написал работу по гидродинамике, которую Гельмгольц представил Берлинской академии. В 1893 г. Минковский был назначен экстраординарным профессором Боннского университета.

Между тем в Геттингене Феликс Клейн заботился о расцвете математики. Ему удалось настоять на приглашении в Геттинген и Гильберта, который до того был профессором в Кенигсберге. Было также выполнено желание Гильберта иметь Минковского своим преемником в Кенигсберге. Но Минковский оставался там недолго: в 1896 г. его пригласили в Федеральный политехникум в Цюрихе. Там он работал вместе с Гурвицем до 1902 г.; как раз в этот период он женился на Августе Адлер из Страсбурга.

Среди его учеников был один, имя которого вскоре стало упоминаться вместе с именем Минковского, когда умы взволновала специальная теория относительности; речь идет, конечно, об Эйнштейне. Но Минковский его особенно не выделял. Позднее, в 1909 г., когда я уже был сотрудником Минковского по проблемам теории относительности, он сказал мне как-то: «Ах, Эйнштейн..., да ведь он всегда отлынивал от лекций, ему я этого никогда не доверил бы».

Совместными усилиями Клейна и Гильберта удалось, наконец, учредить в Геттингене третью профессуру по чистой математике, на которую и был приглашен Минковский. С тех пор двое друзей оставались вместе, Геттинген переживал расцвет не только в математике, но и в смежных науках. Прикладная математика была представлена Карлом Рунге, который известен также и как физик своими исследованиями законов спектральных серий. Четверо математиков были связаны между собой не только специальностью, но и дружбой, и каждый четверг в три часа дня они встречались, чтобы совершить очередную прогулку на Гейнберг, во время которой обсуждались вопросы науки, университета и повседневной жизни.

На второй год моего пребывания в Геттингене я стал личным ассистентом Гильберта. Каждое утро я должен был находиться у него, чтобы обсуждать предстоящие лекции и семинарские занятия. Часто приходил и Минковский, он принимал участие в наших разговорах или возбуждал новые вопросы. Для меня это было чудесное время учебы не только в области науки, но и в делах человеческой жизни. Я уважал и любил их обоих, и они никогда не давали мне почувствовать, сколь велика разница в званиях и жизненном опыте между ними и мной; напротив, они обращались со мной, как с более молодым коллегой. Когда Минковский возвращался домой, он брал меня в качестве попутчика и начинал какой-нибудь разговор по существу нашей науки или о товарищах по специальности, с которыми он непосредственно переписывался, или о философских, социальных, политических вопросах. Иногда мы прогуливались довольно долго, прежде чем вернуться домой.

В то время как главный интерес Минковского лежал в области теории чисел, которой он и Гильберт с усердием служили, лекции он читал из разнообразных областей математики. Я сам слушал многие из них. В одной из них он изложил «линейную и шаровую геометрию» в представлении Плюккера. Минковский не был блестящим преподавателем, но он увлекал простотой и ясностью своего изложения, часто оживляемого остроумными замечаниями. Создавалось впечатление, что то, о чем он рассказывал, было только что создано им в процессе изложения. Во многих случаях так оно и было. Это я могу показать, сославшись на случай, который произошел на лекции по «Analisis situs», как тогда называлась область, именуемая ныне топологией,— науке о наиболее общих отношениях взаимосвязанности геометрических образов, инвариантных относительно всех непрерывных преобразований (искривлений). Минковский начал с того, что он хотел бы пояснить нам основные понятия этой дисциплины на примере так называемой проблемы четырех цветов. При изготовлении географических карт выяснилось, что для закраски любой карты так, чтобы две соседние страны были различны по цвету, необходимо и вполне достаточно иметь четыре цвета. Он добавил: «К сожалению, этого не удалось доказать. Но этим занимались только математики третьего ранга. Я надеюсь это доказательство получить». И здесь он начал свои дедукции. Прошло две-три недели, дело все осложнялось; и даже через три-четыре недели решения не было видно. Когда мы однажды утром собрались в аудитории, разразилась сильная гроза, сверкали молнии, лил дождь. В тот момент, когда Минковский входил в аудиторию, последовал страшный удар грома. Минковский спокойно прошел к кафедре и сказал совершенно серьезно: «Небо гневается на мою дерзость: мое доказательство проблемы четырех цветов тоже неверно». Затем по его лицу пробежала улыбка, и он приступил к чтению лекции.

Больше, чем на лекциях, я узнал от него на семинаре по электродинамике движущихся тел. Этим семинаром Гильберт и Минковский руководили совместно. Это было в 1905 г., в том самом году, когда появилась знаменитая работа Эйнштейна «Электродинамика движущихся тел», содержащая его обоснование теории относительности. Но об этом в Геттингене еще ничего не было известно, и имя Эйнштейна упомянуто не было. Дискуссии ограничивались только попытками объяснить опыт Майкельсона и Морли, а идея относительности обсуждалась в той форме, как она была развита Г. А. Лоренцем и Анри Пуанкаре. Я вспоминаю, что Минковский попутно намекал на то, что он занимается преобразованиями Лоренца и уже напал на след новых взаимосвязей. На меня произвели сильное впечатление семинарские дискуссии, и я намеревался тему моей докторской диссертации выбрать из этой области.

Но этого не случилось. Как раз в это время происходил второй семинар по теоретической физике, руководимый Клейном и Рунге; в нем обсуждалась теория упругости. Я принимал в нем участие, и, хотя тема меня не очень интересовала, я должен был не только приготовить реферат, но и расширить его, по настоянию Клейна, до докторской диссертации. Как я при этом вступил в конфликт с «великим Феликсом» (так мы называли математического диктатора Геттингена) — очень забавная история, но к делу она не относится. Во всяком случае, я должен был целый год заниматься проблемами упругости, и у меня совершенно не было времени для интересующей меня работы.

После того как я получил докторскую степень, я покинул Геттинген и отправился в Кембридж, чтобы там у Лармора и Дж. Дж. Томсона глубже изучить электродинамику. Затем я вернулся в свой родной город Бреславль. Там я познакомился с братом Минковского, Оскаром, который был врачом и прославил свое имя исследованиями диабета. Он локализовал причину этой болезни в поджелудочной железе и тем подготовил путь, следуя которому Лангерганс вскоре обнаружил в этой железе инсульные клетки, а затем Бантинг и Бест изготовили лекарство инсулин. Сын Оскара Минковского, Рудольф, изучал позднее в Геттингене физику, слушал мои лекции и в конце концов стал астрономом и почетным членом маунт-вильсоновской обсерватории.

В Бреславле я впервые услышал имя Эйнштейна. Там была группа молодых физиков, которые усердно следили за новейшими открытиями. Среди них были Фриц Рейхе, ученик Планка, и поляк Станислав Лориа[1]. Однажды они спросили меня, знаком ли я с диссертацией некоего физика по имени Эйнштейн по теории относительности, опубликованной в «Annalen der Physik». Рейхе добавил, что Планк придает ей очень большое значение. Мы решили вместе изучить эту работу, и с этого момента я посвятил себя исследованию проблем относительности. Я начал размышлять о частных релятивистских проблемах и вскоре столкнулся с трудностями. Так как в Бреславле никакой помощи и руководства не было, я вспомнил о замечаниях Минковского на геттингенском семинаре и написал ему, прося совета.

---

[1] Рейхе стал позднее профессором теоретической физики в университете в Бреславле. В гитлеровское время он эмигрировал и преподавал в нью-йоркском университете. После второй мировой войны Лориа стал первым польским профессором теоретической физики и ректором восстановленного поляками университета в Бреславле (теперь Вроцлав).

Его ответ был для меня радостной неожиданностью. Моих частных вопросов он вовсе и не касался, но говорил, что работает в той же области и с удовольствием имел бы молодого сотрудника, который разбирается в физике, особенно в оптике. Он спрашивал, не хотел ли бы я вернуться в Геттинген, и намекнул, что это, возможно, станет началом моей научной деятельности. В заключение он предлагал, чтобы я приехал в Кельн на годичное собрание Немецкого общества естествоиспытателей и врачей. Там он мог бы ответить на мои частные вопросы и обсудить со мной план совместной работы.

Разумеется, я принял его предложение и поехал в Кельн. Там 21 сентября 1908 г. я услышал знаменитый доклад Минковского «Пространство и время», который начинается словами: «Взгляды, которые я хочу перед вами развить, возникли на экспериментально-физической основе. В этом заключается их сила. Их тенденция радикальна. Отныне пространство само по себе и время само по себе низводятся до роли теней, и лишь некоторый вид соединения обоих должен еще сохранить самостоятельность».

Минковский проводит здесь идею об объединении трех измерений пространства и времени в одно четырехмерное пространство, в котором справедлива псевдоевклидова геометрия. Как обычная трехмерная евклидова геометрия характеризуется тем, что квадрат расстояния между двумя точками, равный сумме квадратов разности координат, инвариантен, т. е. независим от системы координат, так нечто соответствующее имеет место и в четырехмерном пространстве Минковского, названного им четырехмерным миром, элементы которого — это «события», происходящие в определенной точке пространства в определенный момент. Возведя в квадрат разности координат и времени и суммируя их, получают «интервал» двух событий, необходимо только временно́й член взять с отрицательным знаком. Этот интервал инвариантен, т. е. независим от системы отсчета. В силу этого время, измеренное в различных системах отсчета, столь же различно, как и точки, относящиеся к различным системам координат. Эти уравнения были выведены уже Г. А. Лоренцем из максвелловых уравнений электромагнитного поля. Впрочем, Минковский цитирует еще более раннюю работу В. Фохта, который уже в 1887 г. высказывал соответствующие соображения для упругих процессов.

Минковский цитировал также Эйнштейна и примерно следующим образом высказался относительно вклада в теорию относительности, сделанного Лоренцем, Эйнштейном и им самим. Лоренц верил в существование абсолютно покоящегося эфира и абсолютного времени; временной параметр, полученный в результате преобразования, он называл местным временем и использовал его как вспомогательное понятие, не придавая ему самостоятельного физического значения. Об Эйнштейне он говорил, что тот «отвергал время как понятие, однозначно определенное событиями»; и затем Минковский продолжает: «понятие пространства и времени не пересмотрели ни Эйнштейн, ни Лоренц». На этот шаг он, очевидно, претендовал сам. Мне кажется это неверным. Из работы Эйнштейна ясно вытекает, что он сознавал полную эквивалентность всех систем отсчета и тем самым отвергал как абсолютное пространство, так и абсолютное время. То, что сделал сам Минковский,— это выработка представления о четырехмерном мире, элементы которого, «события», снова обладают физической реальностью, независимой от любой системы отсчета.

Минковский совершенно не упоминает Пуанкаре, хотя последний за год до Эйнштейна, а именно в 1904 г., прочитал в Сан-Луи доклад, в котором он ясно высказал принцип относительности и многие его следствия, при этом в истолковании превосходил Лоренца и почти достиг точки зрения Эйнштейна. Правда, доклад не содержал формул и доказательств и появился в малодоступном американском журнале. Я полагаю, что Минковский не знал его.

Доклад Минковского содержал, кроме четырехмерной формулировки, еще и постулат о том, что все физические законы должны быть инвариантны относительно группы преобразований Лоренца; он назвал его «мировым постулатом». И это высказывается соответственно духу Эйнштейна и Пуанкаре.

В том же 1908 г. появилась главная работа Минковского под названием «Основная теория электромагнитных процессов в движущихся телах». Здесь мировой постулат применяется с целью установления уравнений электромагнитного поля в любой движущейся материи. В этой работе был развит весь арсенал релятивистской математики, понятия собственного времени, массы покоя, четырех-вектора и шести-вектора и т. п., которыми с тех пор повседневно пользуется каждый физик-теоретик. Уравнения поля получаются исходя из предположения, что они сводятся к известным уравнениям Максвелла для покоящихся тел в точке, которая покоится в рассматриваемой системе отсчета. Тем самым они определены тогда для любой системы отсчета, если известна скорость рассматриваемой точки в этой системе. Этот результат с уравнениями поля, полученными прежде Лоренцем при помощи сложных рассуждений о движении электронов в материи, совпадает не полностью, а только приближенно, пренебрегая членами второго порядка, содержащими отношение скорости тела к скорости света. Таким же путем Минковский получил уравнения механического движения, которые встали на место ньютоновых уравнений.

В общем можно сказать, что специальная теория относительности не является трудом одного человека: она возникла в результате совместных усилий группы великих исследователей — Лоренца, Пуанкаре, Эйнштейна, Минковского. Тот факт, что обычно упоминается только имя Эйнштейна, имеет известное оправдание, ибо специальная теория относительности была ведь только первым шагом к общей, которая охватила гравитацию и тем самым революционизировала весь труд Ньютона. Но общая теория относительности — это заслуга исключительно Эйнштейна. Она основывается на соединении мировой геометрии Минковского и глубоких идей об искривленных пространствах, которые задолго до того были развиты Бернхардом Риманом и продолжены Кристофелем, Ричи и Леви-Чивита. Общая теория относительности немыслима также и без работы Минковского, поэтому не без интереса можно спросить, что же Эйнштейн ценил у Минковского. В первое время, примерно к 1909 г., когда я познакомился с Эйнштейном, он был довольно уклончив и видел в работе Минковского не более чем излишний побочный математический труд. Но мнение это быстро изменилось, когда он глубже вник в проблемы общей теории относительности, в которых существенным оказались как раз математические методы Минковского. Возможно, этому содействовало влияние его друга Гроссмана, который впервые обратил его внимание на геометрию Римана.

И вот, чтобы возобновить личную связь с Минковским, я принял после его доклада в Кельне решение переехать в Геттинген. Но прежде я хотел изучить его большой труд во всех подробностях, и так случилось, что я приехал в Геттинген не к началу семестра, а только 2 декабря 1908 г. На следующий день я разыскал Минковского, и был дружески им принят. В течение нескольких недель я виделся и беседовал с ним ежедневно. Это была счастливая пора, полная научной инициативы, да и богатая событиями личного характера. Это было начало настоящей дружбы, насколько разница в возрасте и опыте позволяет употребить это слово.

Когда вопросы теории относительности были достаточно обсуждены, на очередь встали другие проблемы. Главным интересом Минковского все еще оставалась теория чисел, и он склонял меня к ее изучению. Для него, так же как и для Гильберта, теория чисел была чудеснейшим созданием человеческого ума, наука и одновременно величайшее искусство. Кое-что и я унаследовал от этого образа мышления, и когда я позднее, при исследовании статистической механики, столкнулся с теоретико-числовыми проблемами, я не оказался перед ними беспомощным благодаря объяснениям Минковского.

По вечерам я часто бывал гостем у Минковских и узнал его как любезного хозяина, который вступал в беседы на любые темы и везде находил сказать что-нибудь существенное. Всегда у него под рукой была меткая цитата, часто из «Фауста» Гете, которого он знал наизусть.

Это было прекрасное время, но оно продолжалось недолго. Когда после коротких рождественских каникул в начале 1909 г. я возвратился в Геттинген, я узнал, что несколько дней назад Минковский заболел. У него оказался аппендицит, и его оперировали. Тогда эта операция была не такой легкой, как сейчас. Состояние Минковского ухудшалось с каждым днем. Больше я его не увидел, он умер 12 января 1909 г.

Вместе с ним погибли и мои надежды и перспективы. Но не это особенно глубоко огорчало меня. Я скорбел о потере наставника и друга, выдающегося исследователя и мыслителя, которого смерть унесла в самый разгар плодотворной работы. Сколько он мог бы еще создать!

Гильберт пережил своего друга больше чем на тридцать лет. Он сумел еще выполнить важную работу, но кто может сказать, не была ли его смерть в одиночестве, в мрачное время нацизма еще более трагичной, чем смерть Минковского в расцвете сил?

Госпожа Минковская доверила мне, по предложению Гильберта, просмотр оставленных им физических записей, а математические рукописи передала Андрею Шпайзеру. Мне удалось построить из кратких заметок по крайней мере одну работу и опубликовать ее.

Затем я попытался продолжить труд Минковского работой о собственной энергии электрона при ускоренном движении, для которого можно указать точное решение. Минковский еще слышал об этой идее и одобрил ее. Для меня она действительно положила начало моей научной деятельности.

1959

II. О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ФИЗИКИ

КРИТИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ПОВОДУ ТРАДИЦИОННОГО ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИКИ [40]

Введение

Вспомогательные математические средства, которые нужны физику для изложения классических областей его науки, не слишком разнообразны: системы уравнений в частных производных господствуют в течение того периода, который теперь, на заре наступающего квантового века, мы видим уже завершенным. Повторно приходится встречаться лишь с поразительно малым числом дифференциальных уравнений. Нет ни одной области физики непрерывной среды, где бы не появлялось, например, уравнение Пуассона. Это обстоятельство, бросающееся в глаза даже начинающему, не случайно — оно является следствием метода исследования, порождаемого экономией мышления, поставляемых математикой форм. Сравнительно небольшое количество отработано так, что физик может кое-что предпринять с их помощью. А потому он будет перерабатывать свой эмпирический материал и извлеченные оттуда законы до тех пор, пока они не уложатся в одну из подготовленных форм. В классической физике логическая обработка какой-либо области лишь тогда признается законченной, когда она сведена к одной из глав «нормальной» математики.

Но есть одно поразительное исключение: *классическая термодинамика*.

Методы, обычно применяемые в этой дисциплине для вывода основных положений, резко отличаются от принятых в других областях. Это видно из того, что нет области физики, где бы применялись соображения и выводы, имеющие сходство с циклом Карно и тому подобным. Каковы же математические формы и положения, которые применяются в выводах термодинамики? Эти выводы трудно охарактеризовать математически: они настолько своеобразны и специфичны для физической дисциплины, что кажется, будто после изъятия физического содержания от них ничего не останется. А все-таки такого быть не может, потому что термодинамику венчает типично математическое утверждение —о существовании определенной функции параметров состояния, энтропии, и термодинамика дает методы вычисления этой функции. Итак, термодинамика в своем традиционном виде еще не воплотила в себе логического идеала отщепления физического содержания от математической формы.

Но в 1909 г. появилась работа К. Каратеодори [1], которая полностью решает такую задачу. Физики на эту работу почти не обратили внимания. Это отчасти связано с абстрактным, нацеленным на возможно бóльшую общность изложением, отчасти с изданием, где работа была опубликована. Большинство физиков не обратило внимания на исследование по термодинамике, помещенное в «Математических анналах», в котором даже не упоминаются циклические процессы. Но работа заслуживает того, чтобы с ней познакомиться, и не только для лучшего уяснения основных понятий, но и ради тех преимуществ, которыми новое изложение обладает с педагогической точки зрения.

Чтобы облегчить изучение работы Каратеодори, я хочу попытаться представить здесь своим коллегам ее основные мысли в достаточно простом виде. Известно, что термодинамика в том виде, в каком ее создали великие мастера, обладает большой интеллектуальной привлекательностью и очень прочно утвердилась в сознании физиков. Несмотря на это, быть может, новое изложение завоюет себе друзей: пусть оно лишено тех удивительных озарений, которые точно волшебством приводят нас от простых опытных фактов к основным положениям, зато оно лучше «просматривается» и пользуется «нормальной» математикой, которую каждый учил.

Далее мы полностью дадим ту цепь умозаключений, которая ведет от опытных фактов к математическим формулам основных законов. Звенья, совпадающие с обычным способом изложения, будут изложены вкратце; более подробно разъясняться будут те, в которых виден новый подход. Неизбежна критика классических доказательств, но это не означает принижения великолепных достижений

---

[1] *К. Каратеодори*. Об основах термодинамики. В сб.: «Развитие современной физики». М., «Наука», 1964, с. 188—222.

мастеров науки, чья интуиция вывела нас на верный путь; нужно только отмести в сторону мусор, который не отваживалась удалить чересчур почтительная традиционность.

Определения

Мы ограничимся рассмотрением самых простых систем, которые состоят из химически неизменных газов и жидкостей. Однако наш метод без труда обобщается на произвольные системы, какие обычно рассматриваются в термодинамике. В заключение мы кратко остановимся на этом.

Мы считаем известными основные механические понятия, такие, как объем, масса, сила, давление и т. д., но неизвестны такие термические понятия, как температура, количество тепла и т. д. Наша цель — строго определить последние.

При чисто механическом подходе внутреннее состояние жидкости заданной массы определено, если известен ее объём; давление тогда есть функция объема. На деле этого нет: с помощью нагревания и охлаждения — процессов, которые сопровождаются ощущением тепла и холода, при постоянном объеме можно менять давление, и наоборот.

Термодинамический подход состоит в том, чтобы ввести в качестве независимой переменной наряду с объемом V давление p. Примем, что внутреннее состояние тела (жидкости) полностью определено заданием V и p.

Отдельные тела такого рода снаружи и друг от друга отделены «стенками», которые мы не относим к рассматриваемым телам. Относительно физического поведения стенок примем определенные «идеализирующие» допущения. Рассмотрим стенки только двух видов с общим свойством непроницаемости для вещества.

Как известно, для теоретической термохимии важны и пропускающие вещество стенки, но их введение не влечет за собой новых принципиальных трудностей. Мы еще вернемся к этому.

Итак, ограничимся стенками нетеплопроводными (адиабатическими) и теплопроводными (диатермическими). Но, так как мы не ввели понятия теплоты, определение стенок надо дать так, чтобы в нем не было этого понятия.

Адиабатическая стенка характеризуется следующим свойством: если некоторое тело в адиабатической оболочке находится в состоянии равновесия, то при отсутствии дальнодействующих сил (Fernkräfte) его равновесие может быть нарушено только движением частей стенки и никакими другими внешними процессами. Это значит, если заранее воспользоваться термическими понятиями, что такая стенка не допускает изменения равновесия нагревом, а только затратой механической работы. Последнее, если исключить в нашем пространстве дальнодействие, может быть достигнуто лишь движением частей стенки (смещение, сжатие и т. п.). Без этого понятия адиабатической оболочки в нашей теории не обойтись, и оно таким же образом применяется в обычной термодинамике. Однако и практически как можно более совершенное его воплощение в «калориметре» является предпосылкой любого термодинамического измерения.

Диатермическая стенка характеризуется следующим свойством: если два тела разделены диатермической стенкой и помимо этого они находятся в адиабатических оболочках, они не могут быть в равновесии при произвольных значениях их параметров состояния p_1, V_1 и p_2, V_2. Чтобы наступило равновесие, должно соблюдаться следующее соотношение этих четырех величин:

$$F(p_1, V_1, p_2, V_2) = 0. \tag{1}$$

Такое уравнение выражает термическое соприкосновение, а стенка введена лишь для того, чтобы исключить обмен веществ. Стенки, допускающие такой обмен (полупроницаемые), должны быть определены аналогичным образом (указано в заключительном параграфе).

Эмпирическая температура

Основой для понятия температуры является эмпирическое положение о том, что когда два тела находятся в термическом равновесии с третьим, то они в термическом равновесии и друг с другом. Если воспользоваться формулой (1) как выражением для термического соприкосновения, то эта теорема, очевидно, формулируется так:

если удовлетворяются уравнения

$$F_1(p_2, V_2, p_3, V_3) = 0, \qquad F_2(p_1, V_1, p_3, V_3) = 0,$$

то удовлетворяется уравнение

$$F_3(p_1, V_1, p_2, V_2) = 0,$$

или в более общем виде: из любых двух таких соотношений следует третье. Это возможно лишь тогда, когда эти три уравнения равносильны следующим:

$$f_1(p_1, V_1) = f_2(p_2, V_2) = f_3(p_3, V_3).$$

Итак, условие равновесия (1) для двух тел можно всегда представить в виде

$$f_1(p_1, V_1) = f_2(p_2, V_2). \tag{2}$$

Одно из двух тел можно использовать как *термометр* и рассматривать значение функции

$$f_2(p_2, V_2) = \vartheta$$

как *эмпирическую температуру*. Тогда условие равновесия в форме (2) значит, что первое тело находится в равновесии со вторым, *термометром*, если существует определенная зависимость

$$f_1(p_1, V_1) = \vartheta \tag{3}$$

между параметрами состояний p_1, V_1 и эмпирической температурой ϑ. Это соотношение называется *уравнением состояния тела.*

Соответствующие кривые плоскости (p, V) называются изотермами. В качестве эмпирической температуры можно принять любую функцию от ϑ, изотермы при этом не изменяются. Такой выбор лимитируется только практическими соображениями. В качестве термометрических веществ надо выбирать лишь такие тела, у которых любые два различные состояния не находятся в термическом равновесии (стало быть, жидкости — только в области капельного или только в области газообразного состояния), иначе нарушается однозначность показаний термометра.

Необходимо подчеркнуть исключительный произвол в выборе определенной шкалы температур. Предпочтение, оказываемое газовому термометру, оправдывается тем, что согласно практике его показания в широких пределах не зависят от выбора газа. Последнее обусловлено тем, что для всех газов в состоянии высокого разрежения изотермы имеют вид гипербол $pV = \text{const}$. Но на этом этапе развития теории нельзя логически обосновать то, что температурой газа считают как раз произведение $pV = \vartheta$, а не какую-либо функцию этой величины, хотя бы $(pV)^2 = \vartheta$ или $\sqrt{pV} = \vartheta$, разве что прибегнуть к сомнительному доводу «простоты» или заранее сослаться на последующие результаты термодинамики (см. раздел «Примеры»).

Если установлена температурная шкала, то вместо p, V можно ввести как параметры состояния p, ϑ или V, ϑ.

Первое начало

Обычно определяют понятие количества тепла и полагают, что это согласуется с историей развития понятий термодинамики. Тогда следует ввести понятие теплоты как вещества, которое течет от более теплого тела к более холодному, как и представляли до открытия Майера превращаемости теплоты в другие формы энергии. Но после этого открытия представление о теплоте как о веществе отпало. Когда было установлено, что тела могут нагреваться не благодаря отдаче ими теплоты окружающим телам, а благодаря затрате механической работы, понятие количества тепла, конечно, стало бессодержательным. Сначала надо установить закон указанного превращения; лишь после этого будет ясно, с какими предосторожностями следует измерять теплоту величиной «количества тепла».

Мы сначала не вводим понятие количества тепла; лишь позже мы свяжем его с опытными фактами, входящими в формулировку первого начала. Этим не только достигается бóльшая логическая отчетливость, но мы непосредственно исходим из тех экспериментов, которыми Джоуль доказал первое начало.

Эксперименты состоят в том, что находящееся в адиабатической оболочке тело (вода) переводится из состояния 1 в состояние 2 затратой механической или электрической работы и доказывается, что при фиксированных начальном и конечном состояниях всегда требуется затрата одной и той же работы, каким бы образом и в каком бы виде это ни происходило. Это и есть сущность первого начала. То, что изменение состояния тела определялось с помощью измерения температуры по некоторой эмпирической шкале и затем вычислялось в традиционных единицах тепла, является побочным обстоятельством. Принимается, что второй параметр состояния, объем, практически постоянен (не тратится сколько-нибудь заметная работа на расширение). Если, таким образом, опустить все лишние понятия, результат опытов Джоуля можно сформулировать так:

I начало: *чтобы адиабатически перевести какое-либо тело (или систему тел) из определенного начального состояния в определенное конечное, всегда необходима одна и та же механическая работа (соответственно — электрическая энергия) независимо от способа перехода.*

Для полной характеристики такого адиабатического изменения состояния используются следующие данные: 1) параметры равновесного начального состояния (для одного тела — p_0, V_0); 2) те же параметры для конечного состояния (p, V); 3) затраченная работа A. Если начальное состояние одно и то же, то работа A зависит только от значений параметров конечного состояния, тогда

$$A = U - U_0, \tag{4}$$

где U — функция состояния (следовательно, в случае одного тела — функция p, V); U_0 — ее значение в начальном состоянии; U — *энергия* системы.

Итак, разница между этим способом введения функции, выражающей энергию, и обычным в том, что в первом случае использованы лишь адиабатические процессы, тогда как принято определять U как сумму затраченной работы и теплоты при любых процессах. Последнее определение выходит за пределы того, что непосредственно дают эксперименты, и помимо этого использует понятие количества тепла, которому присущ атавистический характер неразрушаемой субстанции. При этом в тени остается тот факт, что U — это непосредственно измеримая величина, получаемая в экспериментах Джоуля как функция параметров состояния. Действительно, если начальное состояние раз и навсегда фиксировано, то для каждого адиабатически достижимого состояния можно измерить необходимую при этом работу, чем прямо определяется значение U в конечном состоянии. Таким образом, в принципе достижимо *любое* состояние, так как ограничение, накладываемое на достижимые состояния вторым началом, можно всегда устранить, поменяв местами начальное и конечное состояния.

При термодинамических измерениях действуют по этой схеме. Наиболее ясно это видно в новом методе Нернста для измерения энергосодержания (удельной теплоты): исследуемое тело является «калориметром», т. е. по возможности его адиабатически изолируют и измеряют, какую (электрическую) работу надо затратить, чтобы добиться определенного изменения состояния. Последнее определяется показаниями термоэлемента при соблюдении условия $V = \text{const}$.

Лишь *после* установления первого начала можно ввести понятие количества тепла.

Химики называют энергию самого тела *теплосодержанием*, а изменение энергии — *тепловым эффектом*. Это вполне оправдано, поскольку связанное с изменением энергии изменение состояния проявляется преимущественно в изменении температуры. Мы приблизимся к исторически возникшему понятию количества тепла, если примем в качестве тепловой единицы ту энергию, которая нужна для определенного изменения температуры 1 г воды (при постоянном объеме). Эта энергия, выражаемая в механических единицах (эргах), составляет (механический) *эквивалент тепла*. Первое начало указывает, в какой мере можно обращаться с теплотой традиционным образом — как с веществом (при использовании водяного калориметра); для того чтобы теплота, не преобразуясь, «текла», нужно исключить всякую затрату работы. Так, увеличение энергии воды в калориметре измеряет уменьшение энергии погруженного в нее тела лишь тогда, когда приняты меры против изменений объема (соответственно против других явлений с затратой работы), либо когда такие изменения ничтожны. Сколь ни понятно само собою такое ограничение после установления первого начала, оно противоречит здравому смыслу. Теперь можно определить количество тепла и для произвольных процессов. Для этого надо принять, что известна энергия как функция состояния и измерена затраченная при любом процессе работа; тогда подведенное при этом процессе тепло есть

$$Q = U - U_0 - A. \qquad (5)$$

В дальнейшем понятие теплоты самостоятельной роли не играет. Мы пользуемся им лишь как кратким обозначением разности прироста энергии и затраченной работы.

Функцию, выражающую энергию, мы считаем определенной для каждого тела «калориметрическими» измерениями. Об энергии *системы* тел следует сказать следующее. Если два тела адиабатически изолированы, то (по определению) энергия системы равна сумме энергий тел, т. е.

$$U = U_1 + U_2. \tag{5'}$$

Вообще при соприкосновении двух тел их энергия не аддитивна, но отклонение пропорционально поверхности (соприкосновения) и при большом объеме пренебрежимо. Поступая таким образом, мы отмечаем на основании опыта, что и при термическом соприкосновении энергия ведет себя как аддитивная величина. А так как здесь мы будем иметь дело только с адиабатическими и диатермическими стенками, то соответствующее уравнение всегда можно применять.

Квазистатические (обратимые) изменения состояния

При формулировке первого начала механическую работу мы считали в принципе измеримой. Чтобы это было возможно на деле при любом процессе, как бы бурно он ни протекал, допустим, что можно замерять мгновенные значения сил, действующих на подвижные части стенок,— ведь работа подсчитывается как произведение перемещения и силы. Практически это достижимо лишь в немногих случаях, потому что при быстрых движениях в жидкостях возникают турбулентные течения и волны и нет возможности контролировать вызываемое этим нерегулярное давление на стенки. Чтобы исключить такие явления, для измерения подводимой работы применяют главным образом два способа:

1. Пользуются стационарными процессами, например мешалкой (Führer), вращающейся с постоянной скоростью (как в опыте Джоуля для определения теплового эквивалента). При этом создается установившееся течение жидкости, и мешалке приходится преодолевать постоянное сопротивление. Если пренебречь интервалами ускоренного движения в начале и в конце опыта (их можно сделать сколь угодно относительно краткими), то работу можно определить как произведение угловой скорости и враща-

тельного момента мешалки. Сюда же относится (в принципе) и нагрев стационарным электрическим током.

2. Процесс ведут бесконечно медленно, так что в любой момент состояние можно считать равновесным. Такие процессы следовало бы называть *квазистатическими*, но обычно пользуются словом *обратимый*, так как вообще они обладают свойством обратимости. Мы не будем рассматривать те условия, при которых обратимость осуществляется. Допустим, что эти условия выполнены, и оба термина будем применять как равнозначные.

В обычной термодинамике каждую кривую фазового пространства (в случае жидкости — плоскости p, V) считают образом обратимого процесса. Считают, что можно обеспечить обратимый подвод тепла, последовательно приводя рассматриваемое тело в термическое соприкосновение с большими резервуарами тепла, лишь бесконечно мало отличающимися по температуре. Такие мысленные эксперименты дозволены. Но данный эксперимент слишком далек от выполняемых в действительности, и в нем есть нечто отталкивающее для математически вышколенного ума.

Ограничимся адиабатическими квазистатическими (обратимыми) процессами — они выполнимы и осуществляются в эксперименте, так как состоят в достаточно медленных движениях (адиабатических) стенок. Для таких процессов можно строго показать, что в пределе при бесконечно малых скоростях каждое промежуточное состояние является равновесным, поскольку кинетическая энергия уменьшается как квадраты скоростей.

Работа, сообщаемая жидкости при обратимом бесконечно малом изменении объема dV, есть

$$dA = -pdV, \tag{6}$$

где p — давление в состоянии равновесия. Поэтому первое начало запишется в виде

$$dQ = dU + pdV = 0. \tag{7}$$

Для системы тел, разделенных адиабатическими и диатермическими стенками, соответствующее уравнение получается сложением, так как функции, выражающие энергию и работу, аддитивны, например, для двух тел

$$dQ = dQ_1 + dQ_2 = dU_1 + dU_2 + p_1dV_1 + p_2dV_2 = 0. \tag{8}$$

Конечные квазистатические адиабатические изменения состояния представляют непрерывную последовательность равновесных состояний, т. е. в фазовом пространстве (для одного тела — на плоскости p, V) изображаются кривыми, в каждой точке удовлетворяющими условию (7) или (8). Эти кривые называются *адиабатами*.

Формулы (7) и (8), выражающие первое начало,— дифференциальные уравнения адиабат. Если U записать как функцию двух параметров состояния, скажем V и ϑ, то

$$dU = \frac{\partial U}{\partial V} dV + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} d\vartheta.$$

Поэтому согласно (7) получаем

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial V} + p\right) dV + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} d\vartheta = 0. \tag{7'}$$

Уравнение (8) имеет значение лишь в случае термического соприкосновения двух тел: тогда система характеризуется тремя независимыми параметрами состояния, хотя бы обоими объемами V_1, V_2 и общей температурой ϑ, а давление выражается через эти параметры по уравнениям состояния

$$f_1(p_1, V_1) = f_2(p_2, V_2) = \vartheta.$$

Тогда из (8) получаем

$$dQ = \left(\frac{\partial U_1}{\partial V_1} + p_1\right) dV_1 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial V_2} + p_2\right) dV_2 + \\ + \left(\frac{\partial U_1}{\partial \vartheta} + \frac{\partial U_2}{\partial \vartheta}\right) d\vartheta = 0. \tag{8'}$$

Уравнения типа (7′) и (8′) называются *дифференциальными уравнениями* Пфаффа, и им должны удовлетворять адиабаты.

Необходимо познакомиться со свойствами таких уравнений. При традиционном изложении термодинамики без этого не обойтись. Наша цель — показать, что «абсолютная температура есть интегрирующий делитель дифференциала теплоты». Такое исследование обычно проводится поверхностно; во многих учебниках вообще нет определения интегрирующего множителя или делителя, хотя условия его существования выводятся. Наша задача не критиковать учебники, а показать, что по сравнению с лучшими изложениями классической теории надо лишь ненамного продвинуться в исследовании интегрируемости уравнений Пфаффа, чтобы готовые формулы термодинамики посыпались как спелые плоды.

Вспомогательные математические теоремы

Излагаемые результаты, собственно, составляют математический формализм термодинамики. Чтобы достичь отделения физического содержания от математической формы, будем развивать теорию дифференциальных уравнений Пфаффа самостоятельно Речь пойдет о самых простых теоремах.

Рассмотрим на плоскости x, y пфаффову форму двух переменных

$$dQ = X dx + Y dy, \tag{9}$$

где X и Y — функции от x y.

Таково термодинамическое уравнение (7′). dQ в общем случае вовсе не полный дифференциал. Если справедливо последнее, то $dQ = d\varphi$, где φ — функция от x и y. Тогда

$$X = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Следовательно, коэффициенты пфаффовой формы должны были бы удовлетворять условию

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}. \tag{10}$$

Решениями уравнения Пфаффа $dQ = 0$ являются кривые однопараметрического семейства на плоскости x, $y : y = y(x, c)$ или $\varphi(x, y) = c$, потому что это уравнение можно записать как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{X}{Y}, \tag{11}$$

где справа — известная функция от x и y. Геометрический смысл этого дифференциального уравнения в том, что в каждой точке плоскости задается направление (11), и проинтегрировать уравнение, значит провести такие кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с заданными направлениями.

Для этого семейства кривых должно быть и $dQ = 0$, и $d\varphi = 0$; следовательно, левые части должны быть пропорциональны. Положим, что

$$d\varphi = \frac{dQ}{\lambda}; \tag{12}$$

назовем λ *интегрирующим делителем* для dQ, так как dQ переходит в полный дифференциал $d\varphi$ путем деления на λ. Конечно, λ — функция от x и y.

Итак, пфаффова дифференциальная форма от двух переменных всегда имеет интегрирующий делитель.

Если заменить φ функцией от φ, скажем $\varphi^*(\varphi)$, то $\varphi^* = c$ тоже будет решением нашего дифференциального уравнения. Ведь

$$d\varphi^* = \frac{d\varphi^*}{d\varphi} d\varphi = \frac{d\varphi^*}{d\varphi} \frac{dQ}{\lambda} = \frac{dQ}{\lambda^*},$$

т. е. и

$$\lambda^* = \lambda \frac{d\varphi}{d\varphi^*} \tag{13}$$

есть интегрирующий делитель для dQ. Стало быть, всегда есть бесконечно много интегрирующих делителей, которые связаны между собой зависимостью (13).

Обратимся к пфаффовой форме от трех переменных:

$$dQ = X dx + Y dy + Z dz, \tag{14}$$

где X, Y, Z — непрерывные функции от x, y, z.

Такой вид имеет термодинамическое уравнение (8′).

Отношения дифференциалов $dx : dy : dz$ определяют направление в пространстве x, y, z. Итак, пфаффово уравнение $dQ = 0$ означает, что эти отношения удовлетворяют линейному уравнению, в силу которого в каждой точке пространства соответствующее направление находится в определенной плоскости.

В общем случае dQ — не полный дифференциал. Если это не так, т. е. $dQ = d\varphi$, где φ — функция от x, y, z, то

$$X = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Значит, коэффициенты пфаффовой формы должны были бы удовлетворять следующим трем зависимостям:

$$\frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}. \tag{15}$$

Тогда каждая интегральная кривая удовлетворяла бы уравнению $\varphi(x, y, z)=c$, т. е. лежала бы на одной из поверхностей семейства, представляемого этим уравнением.

Возникает вопрос, можно ли и здесь всегда найти интегрирующий делитель $\lambda(x, y, z)$, чтобы $d\varphi = dQ/\lambda$ было полным дифференциалом. Если бы так было, то каждая интегральная кривая уравнения $dQ=0$ удовлетворяла бы и уравнению $d\varphi=0$, т. е. лежала бы на одной из поверхностей семейства $\varphi(x, y, z)=c$. Геометрически это значит, что соответствующие дифференциальному уравнению $dQ=0$ плоскости, содержащие допустимые направления, совпадали бы с касательными плоскостями однопараметрического семейства поверхностей. Но это вовсе не должно быть при любых коэффициентах x, y, z.

Каждой точке пространства можно непрерывным образом сопоставить проходящую через нее плоскость так, чтобы эти плоскости не обвертывали семейство поверхностей. Простейшим примером такой конфигурации является *линейный комплекс*, или *нулевая система*, описываемая так: через каждую точку P пространства проведены винтовые линии; все эти линии имеют одинаковый шаг k и общую ось — ось z; плоскости, перпендикулярные к касательным этих кривых, образуют линейный комплекс и обладают тем свойством, что никакой поверхности не обвертывают. Чтобы это показать, рассмотрим окрестность оси z. Плоскость, отнесенная к точке P на самой оси, перпендикулярна к оси; во всех бесконечно близких точках этой плоскости, равноудаленных от оси z, нормали к соответствующим этим точкам плоскостям скрещиваются с осью z и переходят одна в другую при вращении вокруг оси z. Ясно, что такая конфигурация плоскостей не касательна ни к какой поверхности.

То же можно вывести аналитически. Соответствующее линейному комплексу дифференциальное уравнение Пфаффа [2] будет

$$dQ=-y\,dx+x\,dy+k\,dz=0.$$

[2] Аналитически еще проще пример $dQ = x\,dy + k\,dz = 0$. Если бы существовал интегрирующий делитель λ, то мы имели бы $\partial\varphi/\partial x = 0$, $\partial\varphi/\partial y = x/\lambda$, $\partial\varphi/\partial z = k/\lambda$. Из первого уравнения следует, что φ зависит только от y и z, из третьего то же получается для λ; это противоречит второму.

Если бы существовал интегрирующий делитель, т. е. если $dQ = \lambda d\varphi$, то

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y}{\lambda}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x}{\lambda}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{k}{\lambda}.$$

Отсюда следовало бы, что

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\lambda}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-y}{\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{\lambda}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{\lambda}\right),$$

или

$$2\lambda = x\frac{\partial\lambda}{\partial x} + y\frac{\partial\lambda}{\partial y}, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial x} = -\frac{y}{k}\frac{\partial\lambda}{\partial z}, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{x}{k}\frac{\partial\lambda}{\partial z},$$

откуда $\lambda = 0$.

Существование интегрирующего делителя является исключением, особенностью; иначе нельзя понять смысла второго начала, которое утверждает, что именно такую особенность имеют пфаффовы дифференциальные уравнения термодинамики. Вплоть до этого пункта при строгом изложении надо следовать «классической» традиции. Сделаем еще один шаг; он позволит отбросить крайне запутанные соображения, которыми обычно пользуются при выводе второго начала, и заменить их формальным применением простой и наглядной математической теоремы.

Все пфаффовы дифференциальные формы распадаются на два класса — обладающих и не обладающих интегрирующим делителем. Поэтому будем искать *другой* признак для такого различения, менее абстрактный и легче связываемый с теми фактами, из которых получается второе начало термодинамики. Таким признаком является достижимость некоторой точки при движении из другой точки вдоль интегральной кривой пфаффового дифференциального уравнения (т. е. в термодинамике, вдоль адиабаты).

Рассмотрим плоский случай. Через каждую точку x, y проходит одна кривая семейства $\varphi(x, y) = c$. Поэтому, двигаясь из этой точки по интегральной кривой, заведомо нельзя достичь любой соседней точки.

Перейдем к пространству. Для класса пфаффовых дифференциальных уравнений, обладающих интегрирующим делителем, дело обстоит так же, как и на плоскости: все интегральные кривые лежат на поверхностях семейства

$\varphi(x, y, z) = c$, поэтому для точки x, y, z не *все* соседние точки достижимы; достижимы лишь те, которые находятся на одной поверхности с нею, даже если допускать ломаные дуги, составленные из нескольких гладких частей. И недостижимые точки находятся сколь угодно близко к исходной точке.

Если сколь угодно близко к любой точке имеются недостижимые из нее точки, имеет ли тогда пфаффова дифференциальная форма интегрирующий делитель? Ответ утвердителен.

Из соображений непрерывности недостижимые точки должны заполнять пространственную область, граница которой состоит из достижимых точек, а такая граница — поверхность. Так как очевидно, что каждой бесконечно близкой недостижимой точке соответствует другая такая точка в противоположном направлении, то граничная поверхность содержит все достижимые точки, т. е. существует интегрирующий делитель.

Чтобы эти соображения оформить в виде строгого доказательства, заметим, что все решения пфаффова уравнения

$$dQ = Xdx + Ydy + Zdz,$$

лежащие на заданной поверхности F,

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

удовлетворяют уравнению Пфаффа вида

$$dQ = Udu + Vdv = 0,$$

где

$$U = X\frac{\partial x}{\partial u} + Y\frac{\partial y}{\partial u} + Z\frac{\partial z}{\partial u};$$

$$V = X\frac{\partial x}{\partial v} + Y\frac{\partial y}{\partial v} + Z\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Поэтому через каждую точку поверхности F проходит в точности одна интегральная кривая.

Предположим, что в любой окрестности точки P есть недостижимые точки: пусть одна из них Q. Тогда на любой прямой g, проходящей через P так, что ее направление не удовлетворяет нашему уравнению, есть недостижимые и сколь угодно близкие к P точки. Проведем через Q и g

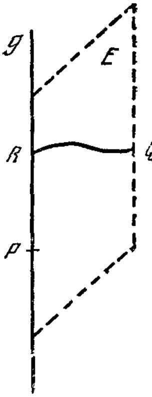

Рис. 1.

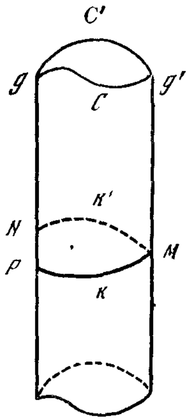

Рис. 2.

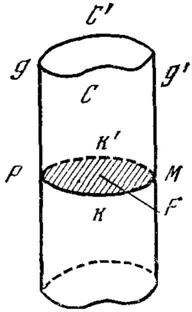

Рис. 3.

плоскость E (рис. 1); на плоскости E есть одна проходящая через Q интегральная кривая уравнения Пфаффа; эта кривая пересекает прямую g в некоторой точке R, если Q достаточно близко к P. Тогда точка R недостижима из P, потому что если бы существовала интегральная кривая из P в R, то и Q была бы достижима по такой непрерывной (ломаной) кривой, вопреки допущению. Точку Q всегда можно взять настолько близко к P, чтобы R было сколь угодно близко к P.

Представим, что прямая g соединена с достаточно близкой к ней и параллельной прямой g' какой-либо цилиндрической поверхностью C (рис. 2). На этой поверхности имеется в точности одна проходящая через P интегральная кривая k, и пусть она пересекает g' в M. Соединим теперь прямые g и g' второй цилиндрической поверхностью C' — на ней имеется одна проходящая через M интегральная кривая k'; пусть она пересекает g в точке N.

Мы утверждаем, что N должна совпасть с P, так как поверхность C' можно непрерывно перевести в C, причем кривая k' перейдет непрерывно в k и N будет непрерывно двигаться к P. Затем с помощью дальнейшей деформации можно сместить N и дальше, за P. Но точка N достижима по непрерывной (ломаной) дуге kk'. Поэтому на прямой g получился бы конечный интеграл, содержащий P и состоящий только из достижимых точек, а это противоречит установленному ранее факту, что на g имеются недостижимые точки сколь угодно близко к P.

Если N совпадает с P, то кривая k при деформации цилиндра C описывает поверхность F, содержащую все исходящие из P решения (рис. 3). Тем самым доказана следующая теорема, которая, как мы увидим, составляет математическую сущность второго начала.

Если пфаффова дифференциальная форма

$$dQ = Xdx + Ydy + Zdz$$

такова, что сколь угодно близко к любой точке $P(x, y, z)$ *есть точки, недостижимые из* P *по интегральным кривым уравнения* $dQ = 0$, *то для нее существует интегрирующий делитель.*

Тогда имеется бесконечно много интегрирующих делителей, образуемых по одному из них, согласно (13).

Эти выводы переносятся и на пфаффовы дифференциальные формы от более чем трех переменных.

Второе начало

До сих пор наше изложение термодинамики не отличалось существенно от традиционного; мы стремились лишь четче определять понятия. Различие проявится лишь при установлении второго начала. Конечно, исходный пункт остается тем же: опытный факт подтверждает, что некоторые процессы невозможны. Эти изложения расходятся в формулировке такого факта и еще более — в выводе из него второго начала. Чтобы облегчить сравнение, кратко дадим набросок обычной теории.

Эмпирическая основа обычно дается в виде одного из принципов — Клаузиуса или Томсона.

Принцип Клаузиуса. Не существует устройства, которое позволило бы осуществить теплопередачу из более холодного в более горячий источник тепла без затраты механической работы и без каких-либо изменений участвующих в этом процессе тел.

Принцип Томсона. Не существует устройства, которое позволяло бы извлечь тепло из его источника и превратить его в работу без каких-либо иных изменений участвующих в этом процессе тел (невозможность вечного двигателя второго рода).

Оба принципа эквивалентны.

Затем переходят к рассмотрению цикла Карно. Обычно ограничиваются простыми газами, для которых все процессы можно изобразить кривыми на плоскости p, v, но этого, конечно, недостаточно для общего вывода второго начала. Можно ограничиться системами с тремя независимыми переменными, так как дальнейшее увеличение числа переменных не требует новых соображений. В этом случае пространство состояний трехмерно и состояния с одинаковой температурой находятся на поверхностях $\vartheta = \mathrm{const}$.

На любой иной поверхности F такие изотермические поверхности дают в пересечении однопараметрическое семейство изотерм. Эта двумерная поверхность F покрыта однопараметрическим семейством адиабат, являющимися решениями пфаффова дифференциального уравнения $dQ = 0$. Криволинейный четырехугольник, образуемый на поверхности F двумя изотермами —ϑ_1 и ϑ_2—и двумя адиабатами, представляет цикл Карно. Этот цикл можно приближенно осуществить, приводя систему в соприкосновение с очень мощным источником тепла W_1 практически постоянной температуры ϑ_1, затем осуществляя адиабатическое воздействие, пока температура системы не станет ϑ_2. Затем систему надо привести в соприкосновение со вторым источником тепла W_2 температуры ϑ_2 и, наконец, надо дать ей вернуться к исходному состоянию адиабатически. Если A — работа, произведенная системой в течение всего цикла, Q_1—тепло, полученное источником W_1, Q_2—тепло, отданное источником W_2, то, по первому началу,

$$A = Q_2 - Q_1.$$

Если $\vartheta_1 < \vartheta_2$, то

$$\frac{A}{Q_1} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \frac{Q_2}{Q_1} - 1 \tag{16}$$

называют «коэффициентом полезного действия» той «машины», которую составляют система и источники тепла.

Либо из принципа Клаузиуса, либо из принципа Томсона следует, что при заданных ϑ_1 и ϑ_2 кпд для одной и той же системы не только не зависит от того, как осуществлен цикл Карно, но он один и тот же для различных систем — при тех же источниках тепла. Для доказательства рассматривают сложный процесс, когда одна машина проделывает цикл Карно в одном направлении, другая — в обратном, причем равны либо работы, $A = A'$, либо отдаваемые охладителю количества тепла, $Q_1 = Q_1'$. Если

$$\frac{A}{Q_1} > \frac{A'}{Q_1'},$$

то из $A = A'$ следует, что $Q_1 - Q_1' < 0$ и $Q_2 - Q_2' < 0$, т. е. из охладителя тепло передано в нагреватель.

Если $Q_1 = Q_1'$, то $A - A' > 0$ и $Q_2 - Q_2' > 0$, т . е. система выполняет работу только за счет тепла в W_2. Если

$$\frac{A}{Q_1} < \frac{A'}{Q_1'},$$

то те же противоречия с принципами Клаузиуса и Томсона получились бы при рассмотрении обратного процесса. Следовательно,

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = G(\vartheta_1, \vartheta_2) \tag{17}$$

должно быть *универсальной функцией* обеих температур ϑ_1, ϑ_2 источников тепла, не зависящей от вида системы, выбранной поверхности F и обеих адиабат.

Положим $\vartheta_1 = \vartheta$, $\vartheta_2 = \vartheta + \Delta\vartheta$ и пусть $\Delta\vartheta$ стремится к нулю; так как $G(\vartheta_1, \vartheta) = 0$, то

$$\frac{dQ}{Q} = g(\vartheta)\, d\vartheta,$$

где для сокращения принято, что

$$g(\vartheta) = \left(\frac{\partial G(\vartheta_1 \vartheta_2)}{\partial \vartheta_2}\right)_{\theta = \theta_1 = \theta_2};$$

$g(\vartheta)$ — тоже универсальная функция от ϑ. Отсюда получаемое системой на изотерме тепло

$$Q = \Psi e^{\int g(\theta)\, d\theta}, \tag{18}$$

где Ψ зависит от того, как заданы адиабаты, и может быть разным для разных систем.

Далее рассматривают жидкость, состояние которой определяется двумя переменными. Тогда пфаффова дифференциальная форма в выражении для dQ имеет интегрирующий делитель, $dQ = \lambda d\varphi$, и помимо ϑ можно выбрать в качестве независимой переменной φ. Тогда Ψ может зависеть только от параметров φ_1, φ_2 адиабат цикла Карно, и если положить $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \varphi + \Delta\varphi$ и устремить $\Delta\varphi$ к нулю, то с учетом очевидного равенства $\Psi(\varphi_1\varphi) = 0$ получаем

$$dQ = \Phi(\varphi) d\varphi e^{\int g(\theta) d\theta},$$

где для сокращения принято

$$\Phi(\varphi) = \left(\frac{d\Psi(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial\varphi_2}\right)_{\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi}.$$

Затем вводят *абсолютную температуру*

$$T = Ce^{\int g(\theta) d\theta}, \tag{19}$$

где постоянная C определяется тем, что для каких-либо двух фиксированных точек задается разность абсолютных температур, скажем 100°.

Потом определяют *энтропию*

$$S = \frac{1}{C}\int \Phi(\varphi)\, d\varphi \tag{20}$$

и получают тогда *обычную формулировку* второго начала

$$dQ = TdS. \tag{21}$$

Но эта формула справедлива лишь для простых жидкостей, состояние которых характеризуется двумя переменными, и ее распространение на любые системы требует особого обоснования. Достаточно рассмотреть случай трех переменных, когда существование интегрирующего делителя уже нетривиально. Сначала можно выразить кпд любой системы через абсолютную температуру. Действительно, согласно (18) и (19)

$$Q = \Psi \frac{1}{C} T.$$

Так как Ψ принимает одинаковые значения на обеих изотермах цикла Карно, то

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_1},$$

или

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}.$$

Поэтому криволинейный интеграл но циклу Карно

$$\oint_C \frac{dQ}{T} = 0.$$

То же верно для любой непрерывной замкнутой кривой K, так как через нее можно провести поверхность F и на ней построить сеть изотерм и адиабат, и, очевидно,

$$\oint_K \frac{dQ}{T} = \lim \sum \oint_C \frac{dQ}{T},$$

где слагаемые суммы представляют циклы Карно ячеек сети, а переход к пределу означает дробление сети на бесконечно малые ячейки. Итак, для любой замкнутой кривой K

$$\oint_K \frac{dQ}{T} = 0,$$

т. е. интеграл

$$\int \frac{dQ}{T}$$

по любому пути от одной точки до другой от пути не зависит и, стало быть, есть функция состояния.

Таким же образом в общем случае можно доказать, что абсолютная температура для любой термодинамической системы является интегрирующим делителем дифференциала тепла.

Краеугольным камнем теории Каратеодори является то, что достаточна значительно более общая формулировка экспериментального принципа, основанная на невозможности определенных процессов, чтобы с помощью доказанной теоремы о пфаффовых формах просто получить второе начало без новых физических соображений.

Обычно при формулировке экспериментального принципа придают особое значение тому, чтобы возможно *больше* процессов зачислить в невыполнимые: так, *никоим* образом не представляется возможным передать тепло без «компенсации» от более холодного тела более теплому или целиком превратить тепло в работу. На деле для полного вывода второго начала достаточно опытного факта, что вообще имеются *некоторые* невыполнимые процессы. Достаточно указать, что адиабатически замкнутая система не может полностью отдать содержащуюся в ней энергию в виде работы. Это вызвано тем, что такая система в ходе процесса, при котором форма и положение стенок в начале и в конце одинаковы, может только нагреваться, но не охлаждаться. Самое большое, — можно сохранить температуру постоянной, если вести процесс квазистатически. Итак, имеются адиабатически недостижимые соседние состояния, притом сколь угодно близкие к начальному. Но для термодинамических выводов несущественно, каковы недостижимые соседние состояния, дело лишь в том, что таковые имеются. Поэтому мы формулируем лежащее в основе второго начала опытное положение так:

Принцип Каратеодори. *В любой окрестности любого состояния имеются соседние состояния, недостижимые из него адиабатическими процессами.* Отсюда с помощью математических соображений следует, что пфаффова форма dQ (дифференциал количества тепла) всегда имеет интегрирующий делитель, из чего легко получаются формулы термодинамики, тогда как традиционная теория лишь здесь приводит в движение мощный аппарат своих циклов.

Для отдельной жидкости, состояние которой определено двумя переменными (хотя бы V, ϑ), этот принцип не дает ничего нового, так как пфаффова форма от двух переменных всегда имеет интегрирующий делитель.

Итак, надо перейти к системам, по крайней мере, из двух тел, находящихся в термическом равновесии.

Аналогичное наблюдается и в обычной теории, когда заставляют две машины, с теми же нагревателем и охладителем, описывать цикл Карно в двух противоположных направлениях. Но такой обходный путь не нужен; надо рассматривать два находящихся в тепловом соприкосновении тела, для которых дифференциал тепла задается по (8′) и представляет пфаффову форму от трех переменных — V_1, V_2, ϑ. Наша математическая теорема и принцип Каратеодори совместно приводят к результату, что

$$dQ = dQ_1 + dQ_2 = \lambda d\varphi, \tag{22}$$

где λ и φ — некоторые функции состояния.

С другой стороны,

$$dQ_1 = \lambda_1 d\varphi_1, \quad dQ_2 = \lambda_2 d\varphi_2. \tag{23}$$

Следовательно,

$$\lambda d\varphi = \lambda_1 d\varphi_1 + \lambda_2 d\varphi_2. \quad (24)$$

Но вместо V_1, V_2 и ϑ можно ввести в качестве независимых переменных φ_1, φ_2, ϑ; тогда λ и φ надо считать функциями φ_1, φ_2, ϑ, и из формулы (24) вытекает, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = 0. \quad (25)$$

В силу третьего из этих уравнений φ не зависит от ϑ, а зависит только от φ_1, φ_2, поэтому и отношения $\frac{\lambda_1}{\lambda}$, $\frac{\lambda_2}{\lambda}$ не зависят от ϑ:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right) = 0$$

или

$$\frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial\lambda_1}{\partial\vartheta} = \frac{1}{\lambda_2}\frac{\partial\lambda_2}{\partial\vartheta} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\vartheta}.$$

Но λ_1 — величина, характеризующая состояние первого тела, т. е. зависящая только от φ_1 и ϑ; аналогично λ_2 зависит только от φ_2 и ϑ. Поэтому первое равенство возможно лишь при условии, что обе его части зависят только от ϑ. Итак,

$$\frac{\partial \log\lambda_1}{\partial\vartheta} = \frac{\partial \log\lambda_2}{\partial\vartheta} = \frac{\partial \log\lambda}{\partial\vartheta} = g(\vartheta), \quad (26)$$

где функция $g(\vartheta)$ *универсальна*, так как она принимает одно и то же значение для обоих произвольных тел и для системы, состоящей из них. Это небольшое рассуждение, использующее вполне «нормальную» математику, выявляет *существование универсальной функции температуры*, по которой можно установить обычную шкалу температур простой нормировкой интегрирующего делителя.

Опустим индексы и будем понимать под λ интегрирующий делитель произвольной системы, тогда

$$\log\lambda = \int g(\vartheta)d\vartheta + \log\Phi, \quad (27)$$

где постоянная интегрирования $\log\Phi$ будет зависеть от второго параметра состояния системы, т. е. для жидкости — от φ. Далее,

$$\lambda = \Phi e^{\int g(\vartheta)d\vartheta}. \quad (28)$$

Итак, для каждой термодинамической системы интегрирующий делитель распадается на два сомножителя, один из которых зависит только от температуры, второй — только от другого параметра состояния. Вводим абсолютную температуру

$$T = Ce^{\int g(\theta)d\theta}, \tag{29}$$

где постоянная C определяется тем, что для некоторых двух фиксированных точек устанавливается разность абсолютных температур, скажем в 100°.

При таком определении дифференциал количества тепла будет

$$dQ = \lambda d\varphi = T\frac{\Phi}{C}d\varphi. \tag{30}$$

Если рассматривается только одна жидкость, то Φ может зависеть лишь от φ, поэтому формулой

$$S = \frac{1}{C}\int \Phi(\varphi)\, d\varphi \tag{31}$$

можно определить зависящую только от φ величину, которая характеризует состояние и постоянна на адиабатах. Ее называют *энтропией;* она определена с точностью до аддитивной постоянной. Получаем *второе начало в виде формулы*

$$dQ = TdS, \tag{32}$$

т. е. при такой нормировке температура является интегрирующим делителем дифференциала количества тепла.

То же верно для системы из двух тел, находящихся в термическом контакте (и вообще для любой системы), потому что согласно (24) и (30)

$$\Phi d\varphi = \Phi_1 d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2, \tag{33}$$

следовательно,

$$\Phi\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_1} = \Phi_1, \qquad \Phi\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_2} = \Phi_2.$$

Здесь Φ_1 зависит лишь от φ_1, Φ_2 — лишь от φ_2; дифференцируя первое уравнение по φ_2, второе — по φ_1, получаем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_1} + \Phi\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2} = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_2} + \Phi\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2} = 0.$$

Отсюда вычитанием получаем, что функциональный определитель

$$\frac{\partial(\Phi, \varphi)}{\partial(\varphi_1, \varphi_2)} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_2} - \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_1} = 0,$$

т. е. Φ — функция от φ. Поэтому и для системы можно определить энтропию S по (31) и согласно (33)

$$dS = dS_1 + dS_2 = d(S_1 + S_2). \tag{34}$$

Определив аддитивные постоянные, можно положить, что

$$S = S_1 + S_2, \tag{35}$$

т. е. *энтропия системы равна сумме энтропий ее частей.*

Для более сложных систем, где возможен массообмен между их частями, надо особо доказать аддитивность энтропии, что всегда можно сделать аналогично изложенному. Но мы не прослеживаем далее построение термодинамического формализма, так как нас интересует только принципиальная сторона дела.

Необратимые изменения состояния

Переходим к исследованию поведения энтропии при произвольных, не квазистатических процессах. Рассмотрим систему, состоящую из двух термически контактирующих тел.

Эта система зависит от трех переменных, которыми мы считали раньше V_1, V_2 и ϑ; сейчас вместо ϑ введем как третью переменную S.

Пусть V_1^0, V_2^2 и S^0—значения переменных в начальном состоянии, V_1, V_2, S— в конечном. Мы утверждаем, что при всех возможных процессах S либо никогда не растет, либо никогда не убывает. Действительно, конечного состояния можно достичь следующим образом.

Во-первых, объемы изменяются квазистатически от V_1^0, V_2^0 до V_1, V_2, причем энтропия остается постоянно равной S^0.

Во-вторых, при неизменных объемах V_1, V_2 состояние изменяется адиабатической затратой работы (перемешивание, трение и т. д.), пока энтропия S^0 не превратится в S.

Если бы S при различных процессах была либо больше, либо меньше S^0, то каждое соседнее для исходного (V_1^0, V_2^0, S^0) состояние V_1, V_2, S было бы адиабатически достижимо — ведь объемы можно изменять как угодно. Но это противоречит тому опытному положению, на котором основано второе начало. Поэтому всегда должно быть либо $S \geqslant S^0$, либо $S \leqslant S^0$. Если исходить из другого начального состояния, то по соображениям непрерывности ясно, что невозможность изменять энтропию в сторону увеличения или уменьшения всегда должна быть одного знака. То же относится и к двум различным системам в силу аддитивности энтропии.

Но может ли энтропия только увеличиваться или только уменьшаться, зависит еще от постоянной C в (29) и (31). Эту постоянную, естественно, выбирают так, чтобы абсолютная температура была положительной. Тогда достаточно одного эксперимента, чтобы установить знак изменения энтропии; и опыт (хотя бы с газами) учит, что энтропия никогда не уменьшается.

Отсюда, если при каком-либо изменении состояния значение энтропии не остается постоянным, то нет такого адиабатического изменения состояния, которое переводило бы систему из начального состояния в конечное. В этом смысле справедлива следующая теорема: *каждое изменение состояния, при котором значение энтропии меняется, необратимо.*

Далее получается, что в равновесии энтропия имеет максимум, а отсюда легко получить другие экстремальные теоремы термодинамики. Мы этим не будем заниматься. Приведенное доказательство для систем, состоящих из двух (или более) термически связанных тел, переносится на более сложные системы. Основным для доказательства было то, что оба объема можно изменять произвольно и что кроме них есть только одна независимая переменная — энтропия.

Но аналогичное положение имеем в общем случае: не только при этом выводе, но и при всем построении термодинамики предполагается, что для системы с n независимыми переменными $n-1$ из них типа геометрических величин, значения которых можно менять произвольно, и есть только одна «термическая» переменная (температура, энтропия). Но это ограничение, по Каратеодори, характерно не только для термодинамики, но и для традиционной теории. При выводе основных начал это ограничение не столь явно. Известно, что для действительного вычисления энтропии в конкретном случае надо иметь возможность «вести процесс как обратимый», а это значит, что все независимые переменные, кроме одной (температуры), можно изменять произвольным образом. Для этого вводят полупроводящие перегородки и другие ухищрения.

Примеры

Мы не поясняли примерами ход абстрактных рассуждений, в частности не обращались к идеальным газам, играющим доминирующую роль во многих книгах по термодинамике. По нашему убеждению, такое «преобладание идеальных газов»—недостаток, и учащийся склонен думать, что вся термодинамика зависит от наличия определенных газообразных веществ. Конечно, есть изложения, где нет такой погрешности. Но в некоторых книгах ее допускают: там температура газа pV выступает как основа для абсолютной температуры, и, даже если позже доказывается, что абсолютная температура не зависит от существования тех или иных тел и может быть определена по термокалориметрическим измерениям различного рода, такой способ логически неудовлетворителен, поскольку a priori нет ни малейшего основания, чтобы считать эмпирической температурой именно $\vartheta = pV$, а не хотя бы $\vartheta = (pV)^2$, или ввести любую иную монотонную функцию $\vartheta = f(pV)$.

Здесь мы принимаем это общее допущение и из него выводим абсолютную температуру. Нам нужно еще калориметрическое определение функции энергии U. Как обычно, для этого используем идеализированный опыт Джоуля — Томсона, согласно которому при адиабатическом расширении газа без затраты работы произведение pV, или газовая температура $\vartheta = f(pV)$, не меняется (в первом приближении). Отсюда следует, что U зависит только от ϑ. Поэтому полагаем

$$pV = F(\vartheta), \quad U = U(\vartheta).$$

Отсюда получаем уравнение адиабатического процесса

$$dQ = dU + pdV = U'(\vartheta)\, d\vartheta + F(\vartheta)\frac{\partial V}{V} = 0.$$

Если записать, что

$$dQ = F(\vartheta)\left\{\frac{U'(\vartheta)}{F(\vartheta)}\,d\vartheta + d\log V\right\}$$

и положить

$$\log\Theta(\vartheta) = \int \frac{U'(\vartheta)}{F(\vartheta)}\,d\vartheta,$$

то

$$dQ = F(\vartheta)d\log\Theta V = 0.$$

Поэтому можно положить

$$\lambda = F(\vartheta), \quad \varphi = \log\Theta V.$$

Но согласно (13) есть бесконечно много интегрирующих делителей, и если, например, положить

$$\varphi^* = e^{\varphi} = \Theta V,$$

то

$$\lambda^* = \lambda\,\frac{d\varphi}{d\varphi^*} = F(\vartheta)\,e^{-\varphi} = \frac{F(\vartheta)}{\Theta V}.$$

Нет никаких оснований сразу выделить интегрирующий делитель $\lambda = F(\vartheta) = pV$, как это обычно делают. Лишь второе начало оправдывает это. Из (26), где φ надо считать при дифференцировании постоянным, мы получаем

$$g(\vartheta) = \frac{d\log F(\vartheta)}{d\vartheta},$$

и тогда, согласно (29),

$$T = CF(\vartheta) = CpV.$$

Этим доказано совпадение абсолютной температуры со шкалой для идеальных газов. Для энтропии из формулы $dQ = TdS$ получаем

$$S = S_0 + \frac{1}{C}\log\Theta V.$$

Это переходит в обычное выражение, если положить, что

$$U = cT, \quad C = \frac{1}{R}.$$

Тогда

$$\log \Theta = \int \frac{c}{RT}\, dT = \frac{c}{R} \log T.$$

Стало быть,

$$pV = RT,\ S = S_0 + c\log T + R\log V.$$

Второй пример определения абсолютной температуры связан с *черным излучением* [3]. Эмпирические основы здесь следующие:

1. Давление излучения p связано с плотностью энергии U формулой $p = u/3$.

2. Плотность энергии зависит только от температуры: $u = u(\vartheta)$. Поэтому то же верно для p.

Полная энергия в объеме V составляет $U = 3Vp$. Пфаффово уравнение адиабаты имеет вид

$$dQ = dU + pdV = 4pdV + 3Vdp = 0,$$

и его можно записать так:

$$dQ = pVd\log V^4p^3 = 0.$$

Поэтому можно принять $\lambda = pV$, $\varphi = \log V^4p^3$; и если выразить λ как функцию от $p(\vartheta)$ и φ, получим

$$\log\lambda = \frac{1}{4}\log p + \frac{\varphi}{4}.$$

Поэтому, согласно (26) и (27),

$$g(\vartheta) = \frac{\partial \log p^{1/4}}{\partial\vartheta}, \quad \log\Phi = \frac{\varphi}{4}$$

и, согласно (29),

$$T = Cp^{1/4}.$$

Обычно вводят обозначение $a = 3/C^4$ и тогда получают закон Стефана — Больцмана

$$u = 3p = aT^4.$$

Далее, согласно (23), энтропия

$$S = \frac{1}{C}\int \Phi d\varphi = \frac{1}{C}\int e^{\varphi/4}\, d\varphi = \frac{4}{C} e^{\varphi/4} = \frac{4}{C} V p^{3/4} =$$

$$= \frac{4}{C^4} VT^3 = \frac{4a}{3} VT^3,$$

[3] То есть излучением абсолютно черного тела.

если определить постоянную так, чтобы при $T = 0$ было $S = 0$. Следовательно, плотность энтропии

$$s = \frac{4a}{3} T^3.$$

Обобщения

Как ранее подчеркивалось, вся эта цепь рассуждений переносится на более сложные системы, где может происходить массообмен между однородными частями, или фазами. Необходимо, чтобы можно было произвольно менять все переменные, кроме одной, и поэтому на границе раздела между любыми двумя фазами надо задать (исходя из опыта) достаточное число условий, заменяющих простое условие термического равновесия (уравнение состояния). Затем вводят полупроницаемые стенки, подвижность которых дает нужное количество произвольно изменяющихся параметров.

Так как теоремы о пфаффовых уравнениях верны при любом числе переменных, то все заключения остаются в силе.

Таким образом, в общей теории с выгодой исключаем циклические процессы, но при фактическом вычислении термодинамических функций использовать последние часто удобно. В частности, применять при расчетах теорему Нернста лучше всего, используя циклические процессы с ветвями, устремленными к абсолютному нулю.

Значительно труднее, как подчеркивает Каратеодори, термодинамически обосновать теорию излучения и процессы в движущихся телах, так как состояние системы нельзя описать с помощью конечного числа параметров. Действительно, до сих пор в этих областях применялись только статистические методы кинетической теории.

1920

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ [97]

Хорошо известно, что теория преобразований в квантовой механике соответствует свойству классических уравнений движения быть инвариантными по отношению к контактным преобразованиям. Последние являются одновременными преобразованиями координат x^k (включая время) и импульсов p_k (включая энергию), при которых разность величины $p_k\,dx^k$, записанной в старых и новых переменных, является полным дифференциалом. Точечные преобразования в x-пространстве являются всего лишь частным случаем; однако имеется другой случай, столь же простой, как и первый, который может быть описан как точечное преобразование в p-пространстве.

С другой стороны, в общей теории относительности имеют дело только с точечными преобразованиями в x-пространстве; легко видеть, что преобразования импульсов p_k, подчиненные упомянутому выше условию контактности, представляют собой не что иное, как тензорное исчисление общей теории относительности.

Мне представляется, что точечные преобразования в p-пространстве можно было бы рассмотреть подобным же образом. Такой путь ведет к некоему обращенному формализму теории относительности в p-пространстве, в котором везде координаты пространство — время и импульс — энергия поменялись местами. Основные законы квантовой механики, такие, как соотношения коммутации, соотношения неопределенности и т. д., симметричны по отношению к x^k и p_k.

Эти факты в сильной степени наводят на мысль о формулировке «принципа взаимности», в соответствии с которым любой общий закон в x-пространстве имеет «инверсный образ» в p-пространстве,— в первую очередь это относится к законам теории относительности. Основание этой идеи слишком сложно, чтобы его можно было здесь объяснить; это сделано в статье, которая была представлена Королевскому обществу. Я хочу только подчеркнуть то обстоятельство, что эта теория пытается объяснить конечность частиц на основе рассмотрения теории относительности, не связывая этот вопрос со строением мира в целом (x-пространство),—идея [1 *], которая представляется мне неприемлемой с точки зрения физического здравого смысла.

Я хочу теперь отметить некоторые простые следствия и численные результаты. Принцип взаимности делает необходимым введение такого метрического тензора γ_{kl} в p-пространстве, компоненты которого являются не постоянными числами, но функциями пространства, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям — в точной аналогии с эйнштейновской формой гравитационных уравнений для g_{kl}. Наиболее общая их форма содержит «космологический член», благодаря которому x-мир является замкнутым и характеризуется конечным радиусом a. Соответствующие свойства p-пространства таковы: энергетически замкнутая система соответствует замкнутому пространству импульсов с радиусом b, который является максимально возможным импульсом. В литературе [2 *] имеется несколько попыток ввести подобный максимальный импульс с целью исключить нарушающие общую картину «бесконечности» из квантовой механики. Однако эти попытки следует признать негодными, поскольку они противоречат теории относительности. Эта трудность обходится с помощью нового принципа.

Между компонентами g_{kl} (умноженными на надлежащим образом подобранную постоянную A) и γ_{kl} (деленными на то же A) должно иметь место соотношение, которое является квантовым эквивалентом контактного преобразования и имеет вид

$$Ag(x) = h^{-3/2} \iiint \frac{1}{A} \gamma(p) \sqrt{-|\gamma|}\, dp_x dp_y dp_z,$$

где $|\gamma|$ — детерминант матрицы γ_{kl}. Имея в виду, что g_{kl} и γ_{kl} — безразмерные числа, получаем

$$A^2 = (b/\sqrt{h})^3.$$

Основное следствие представления о замкнутом p-пространстве сводится к изменению выражения для числа квантовых ячеек в данном элементе фазового пространства. Новая формула имеет много приложений. Следующие ве-

---

* Цифра со звездочкой указывает номер в списке литературы, помещенном в конце статьи (с. 125).— *Прим. ред.*

личины, которые бесконечны в принятых теориях, становятся теперь конечными: число n квантовых состояний излучения в x-объеме V; нулевая энергия ε излучения в этом объеме; собственная энергия электрона $e^2/r_0 = mc^2$. Подставляя эмпирические данные для c, e, m, получаем численные результаты

$$n = n_0 V, \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 n = \varepsilon_0 n_0 V,$$

$$n_0 = 2{,}90 \cdot 10^{37}\ \textit{см}^{-3}; \qquad \varepsilon_0 = 59{,}7\ \textit{Мэв}.$$

Между естественными единицами длины и импульса, r_0 и b, и квантовыми константами h и A (определенными выше) имеют место симметричные соотношения

$$h = (\pi r_0)\, b, \qquad A^{4/3} = \frac{b}{\pi r_0} = 0{,}0085\ \textit{г/сек}.$$

Закон Кулона модифицируется введением множителя

$$\int\limits_0^{2\pi/r_0} J_0(x)\, dx,$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя. Это означает, что применяется закон рассеяния Резерфорда, в который добавляется множитель

$$\left(1 - \frac{E}{E_0} \sin^2(\theta/2)\right)^{-1},$$

где E — энергия падающей частицы, а E_0 — постоянное значение энергии, равное 19,200 *Мэв* для случая электрон-протонного столкновения; для протон-протонного столкновения, в случае которого формулу следует уточнить (с учетом обменного эффекта), характеристическая энергия равна 10,4 *Мэв* — в хорошем согласии с экспериментальными данными [3*].

Имеются, далее, отступления от законов Планка и Стефана—Больцмана; последний в случае высоких температур напоминает формулу, определяющую количество тепла (теплосодержание) в кристалле с характеристической температурой

$$\Theta_0 = 1{,}63 \cdot 10^{12}\ \textit{град}.$$

Эти отклонения связаны с тем фактом, что давление излучения не равно $^1/_3$ плотности энергии; уравнения Максвелла перестают удовлетворяться при таких плотностях излучения.

Законы кинетической теории газов также претерпевают изменения, которые для газа с молекулярным весом μ начинаются с характерной температуры

$$\theta = \frac{137}{1845}\frac{\theta_0}{\mu} = \frac{1,21\cdot 10^{11}}{\mu}\ \textit{град}.$$

Уравнение состояния сохраняется неизменным, но удельная теплоемкость стремится к нулю при $T \to \infty$.

К интересным результатам ведет приложение нового принципа к вопросу о структуре ядер. Ядро с массовым числом A состоит из наиболее плотным образом упакованных частиц A с массой, равной 1 (протонов и нейтронов). При этом радиус ядра R оказывается связанным с радиусом электрона r_0 следующим соотношением:

$$R = r_0\left(\frac{3}{8}A\right)^{1/3} = 2,02\cdot 10^{-13} A^{1/3}\ \textit{см},$$

находящимся в превосходном согласии с оценкой, данной Бете [4 *] ($2,05\cdot 10^{-13}$). Средняя кинетическая энергия $\bar{\varepsilon}$ на одну ядерную частицу (протон или нейтрон) и максимальная энергия ε_0 связаны соотношением

$$\varepsilon_0 = \frac{4}{5}\bar{\varepsilon} = 10,4\ \textit{Мэв}.$$

Использование закона распределения Ферми — совместно с эмпирическим значением для радиуса (Бете)— приводит к $\varepsilon_0 = 10$ *Мэз.*

Эти утверждения свидетельствуют о том, что мы имеем дело с чем-то бо́льшим, чем простой формализм. Хотя в настоящее время мы и далеки от того, чтобы иметь последовательную теорию, новый принцип предоставляет в наше распоряжение заманчивую программу исследований.

Эдинбург, 14 января 193 г.

Литература

1. *A. S. Eddington.* Relativity theory of Protons and Electrons. Cambridge, 1936.
2. *M. Born, u. G. Rumer.* Zs. f. Phys., 1931, **69**, S. 141; *G. Watagin.* Zs. f. Physik, 1934, 88, S. 92; *A. March.* Zs. f. Phys., 1937, **104**, S. 93, 161; 1937, **105**, S. 620; **106**, S. 49, 291, 532; 1937, **108**, S. 128.

3. *M. A. Tuve, N. P. Heydenburg a. L. R. Hafstad.* Phys. Rev., 1936, 50, p. 806; *G. Breit, E. U. Condon a. R. D. Present.* Phys. Rev., 50, 1936, p. 825.
4. *H. A. Bethe.* Nuclear Physics. Rev. Mod. Phys., Part A (with R. F. Bacher), 8, 82; Part B, 9, 71; Part C (with M. S. Livingston), 9, 245. См. особенно ф-лу (598), стр. 166.

КОСМИЧЕСКИЕ ПУТЕШЕСТВИЯ И ПАРАДОКС ЧАСОВ [147]

Люди, сведущие в космических полетах — я назову в первую очередь Е. Зенгера, — смотрят на космические полеты, со скоростями, приближающимися к скоростям света, как на технически осуществимую проблему; для такого ускорения следует применять отдачу фотонов (световое давление). Зенгер подчеркивал, что любая точка космоса может быть достигнута в течение человеческой жизни, причем, возвращаясь на Землю, путешественник, возможно, застанет грядущие поколения. Вот уже с год, как в английском журнале «Nature» развернулись дебаты, возбужденные высказываниями такого рода. Речь идет о развитии во времени процессов в очень быстро движущихся системах и прежде всего о так называемом парадоксе часов Эйнштейна, согласно которому часы, покоящиеся в инерциальной системе, идут быстрее, чем механически им подобные движущиеся часы, совершающие замкнутое движение. Дингль, нападая на эйнштейновские и все связанные с ними соображения, утверждал, что этот результат противоречит смыслу теории относительности. В. Мак-Кри и другие авторы возражали ему, однако им не удалось убедить Дингля в том, что он неправ. Я был приглашен принять участие в диспуте и воспользовался случаем, чтобы вместе с Бимом просмотреть литературу. Мы нашли полную и удовлетворительную трактовку парадокса часов в книге Меллера [1], но так как интересующие нас вопросы разбросаны, читать эту книгу неудобно. Поэтому мы полностью, но сжато изложили проблему.

---

[1] *Х. Меллер.* Теория относительности. Оксфорд, 1952.

Качественно вопрос может быть изложен в нескольких строках. Согласно специальной теории относительности часы, движущиеся в системе (x, y, z, t), показывают в собственной системе отсчета время τ, определенное соотношением

$$c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{1a}$$

Так как $|d\tau| < |dt|$, за исключением случая $dx = dy = dz = 0$, то общее время движения по замкнутому пути в собственной системе $\int_{t_1}^{t_2} d\tau$ меньше, чем время, измеренное покоящимся наблюдателем A. Итак, «путешественник» B при возвращении окажется моложе, чем «домосед» A. В этом нет ничего удивительного, поскольку в физике известно большое количество величин, зависящих от пути. Собственное время относится именно к таким величинам и вместе с ним — все непрерывные механические, атомарные, биологические процессы.

Кажущийся парадокс появляется в том случае, если это явление интерпретировать с точки зрения общей теории относительности. При этом прежний «путешественник» B имеет право рассматривать себя находящимся в покое, а прежнего «домоседа» A — движущимся. В таком случае «путешественник» A должен возвратиться более молодым, чем «домосед» B, что противоречит полученному перед этим результату. Это — старый вопрос, который Дингль снова поднял. В действительности нет никакого парадокса. В самом деле, если перейти к системе координат, в которой B покоится, то собственное время уже будет определяться не формулой (1a), а формулой $icd\tau = dS$, где dS — элемент длины, квадрат которого равен

$$dS^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \tag{1б}$$

$(x^1, x^2, x^3 = x, y, z,; x^4 = ict)$; метрический тензор $g_{\mu\nu}$ определяется гравитационным полем, которое возникает вследствие того, что связанная с B система отсчета не инерциальна.

В случае, когда относительная скорость мала по сравнению со скоростью света, простые, наглядные соображения Эйнштейна позволяют количественно оценить разность хода часов. При этом достаточно воспользоваться лишь элементарным следствием эйнштейновского принципа, а именно тем, что часы, которые находятся в постоянном гравитационном поле g и которые удалены от других часов на расстояние ξ в направлении градиента поля, уходят вперед по сравнению с ними на время $\left(\frac{g\xi}{c^2}t\right)$.

Пусть A покоится в точке O в инерциальной системе координат. B движется с постоянной скоростью v вдоль оси x от точки O к точке, расположенной на расстоянии ξ, поворачивает обратно в момент времени t_0 (в инерциальной системе), причем для поворота требуется время $\delta t \ll t_0$, и возвращается в точку O с постоянной скоростью v к моменту времени $2t_0$. Тогда по формуле сокращения времени

$$t_A = \frac{t_B}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx t_B\left(1+\frac{v^2}{2c^2}+\dots\right). \tag{2}$$

Соотношение (2) показывает, что собственное время t_B меньше времени $2t_0$ движения, измеренного в инерциальной системе, на величину $\frac{v^2}{2c^2}t_0$.

Если, наоборот, рассматривать B покоящимся, то те же соображения, примененные к двум главным отрезкам пути, пройденным A с постоянной скоростью $\pm v$, приводят к тому, что собственное время t_A оказывается на величину $\frac{v^2}{c^2}t_0$ меньше собственного времени t_B, что противоречит предыдущему результату. Однако следует заметить, что связанная с B система отсчета не инерциальна. Она совпадает только в течение основного времени движения (туда и обратно) с двумя инерциальными системами отсчета. В течение отрезка времени, когда существует ускорение, в системе B появляются гравитационные поля. В начале и в конце пути A и B находятся практически в одном и том же месте пространства, и поэтому присутствующие там гравитационные поля не влияют на относительный ход часов. Для определения разности хода часов следует принимать во внимание время действия ускорения δt при повороте. При этом из-за индуцированного гравитационного поля, которое в течение короткого промежутка времени δt можно приближенно считать постоянным в пространстве, возникает разница в показаниях часов A и B, равная $(g\xi/c^2)\,\delta t$. Легко показать, что эта разность в два раза больше отставания часов A от часов B, которое происходит из-за сокращения времени. Так как изменение скорости A по отношению к B за время поворота δt равно $2v$, ускорение равно $G = 2v/\delta t$. Расстояние между часами в момент поворота $\xi = vt_0$. Следовательно,

$$\left(\frac{G\xi}{c^2}\right)\delta t = 2\,\frac{v^2}{c^2}\,t_0, \tag{3}$$

как и утверждалось. Вычитая из (3) эффект сокращения времени, находим в системе наблюдателя B ту же разность показаний часов, что и в инерциальной системе A.

Эти соображения были отвергнуты Динглем по причинам, которые отчасти основаны на недоразумениях, связанных со смыслом эквивалентности относительно ускоряющихся систем (Дингль утверждал, что инерциальные системы физически не должны выделяться среди других систем отсчета, так как это противоречило бы постулату относительности. Это недоразумение показывает силу влияния слов «теория относительности». Следовало бы вместо этих слов говорить, согласно предложению Фоккера, о хроногеометрии), отчасти на том возражении, что сделанные выше упрощающие предположения ($v/c \ll 1$ и $\delta t/t_0 \ll 1$) незаконны.

Чтобы опровергнуть эти возражения Дингля, Бим и я написали названную выше работу. Результат работы оправдывает приведенные элементарные соображения и является их обобщением на произвольные скорости и ускорения.

2. Упрощенное изложение

Хотя предыдущие соображения достаточно просты для физики, я все же обдумывал, нельзя ли пояснить эффект изменения времени более элементарным путем. Речь идет прежде всего об обычном сокращении времени, так как влияние ускорения можно учесть впоследствии из общих соображений. Кроме того, следовало бы, кажется, исходить из преобразований Лоренца. При этом результат можно получить в несколько строк, но и это все еще сложно. Находясь в таком состоянии, я очень обрадовался, найдя статью Г. Бонди под названием «Юность космических путешественников», который сделал именно то, что я искал. Эта работа является настолько привлекательной, что я ее изложу в краткой форме.

В работе рассматривается одномерное движение и используются (xt) диаграммы. Пусть A_1 и A_2 — два наблюдателя, покоящиеся в инерциальной системе отсчета; их мировые линии являются двумя параллельными прямыми. Оба имеют физически одинаковые часы. Испускаемые наблюдателем A_1 световые сигналы через равные промежутки времени t будут приниматься наблюдателем A_2 тоже через равные промежутки времени t'.

Пусть наблюдатель B движется между A_1 и A_2 в направлении от A_1 к A_2 со скоростью v, меньшей, чем скорость света c. Наблюдатель B несет часы, физически идентичные с часами наблюдателей A_1 и A_2. Излученные A_1 в моменты времени 1,2,3,... (по часам A_1) световые сигналы достигают наблюдателя B соответственно в моменты времени 1,2,3... (по часам B). Из-за допплер-эффекта (который является опытным фактом) интервал t' по часам B не будет равен соответствующему интервалу t по часам A, а

$$t' = kt, \tag{4}$$

где k — функция относительной скорости v, причем $k>1$.

Согласно принципу относительности, можно рассматривать B покоящимся, а A_1 и A_2 — движущимися. Если B излучает световые сигналы точно в моменты 1,2,3,..., соответствующие моментам прихода сигналов из A_1 в B_1, то сигналы, посылаемые наблюдателем B в направлении A_2, будут идентичны сигналам, посылаемым непосредственно из A_1 в A_2. Таким образом, имеет место то же самое соотношение $t' = kt$, которое теперь следует читать $t = t'/k$. Это означает, что допплеровский эффект при сближении обратен допплеровскому эффекту при удалении.

После этой небольшой подготовки Бонди не сразу переходит к рассмотрению ускоренного движения B, а заменяет его, следуя Хальсбери, равномерным движением. Наблюдатель A покоится в инерциальной системе. Движущийся с постоянной скоростью v в этой системе наблюдатель B встречается с наблюдателем A в точке X мировой линии A; в этот момент оба они сверяют свои часы. Третий наблюдатель C движется тоже с постоянной скоростью v в инерциальной системе A и встречается с наблюдателем B в точке Y мировой линии B и затем — с A в точке Z

мировой линии A. Проекция Q точки Y на мировую линию A делит отрезок XZ на две равные части.

В момент встречи Y наблюдателей B и C испускается световой сигнал, который доходит до мировой линии A в момент Y'. Очевидно, что

$$XQ = QZ = t_0, \quad QY = vt_0, \quad QY' = \frac{QY}{c} = \frac{v}{c} t_0,$$

а также

$$\begin{aligned} XY' &= t_0\left(1 + \frac{v}{c}\right), \\ Y'Z &= t_0\left(1 - \frac{v}{c}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

С другой стороны, XY' и $Y'Z$ являются теми отрезками мировой линии A, которые принимают световые сигналы, испущенные на мировой линии B между моментами X и Y или на мировой линии C между моментами Y и Z. Пусть t_1 — интервал времени, измеренный наблюдателем B при движении между точками X и Y. Так как в первом случае имеем взаимное удаление наблюдателей B и A, а во втором — взаимное сближение наблюдателей C и A, то, в соответствии со сказанным выше

$$XY' = kt_1, \qquad Y'Z = \frac{1}{k} t_1. \tag{6}$$

Сравнивая соотношения (5) и (6), имеем

$$\begin{aligned} kt_1 &= \left(1 + \frac{v}{c}\right) t_0, \\ \frac{1}{k} t_1 &= \left(1 - \frac{v}{c}\right) t_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Разделив первое соотношение (7) на второе, получаем

$$k^2 = \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{8}$$

или

$$k = \frac{\left(1 + \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Это известная релятивистская формула эффекта Доплера, подтвержденная экспериментом.

С другой стороны, умножая соотношения (7) друг на друга и извлекая корень, получаем известную формулу сокращения времени

$$t_1 = t_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \qquad (9)$$

Переход от модели Хальсбери к действительному ускоренному движению тела (наблюдателя) от точки X через Y к точке Z, естественно, следует производить путем сглаживания угла поворота. При этом можно произвольно увеличивать отрезки XZ, XY, YZ, не изменяя характер сглаживания угла поворота. Это приводит к тому, что относительное время ускорения в инерциальной системе координат можно сколь угодно уменьшить. Естественно, следует также уменьшить абсолютную величину ускорения, так как только в этом случае (при небольшом ускорении) механизм, используемый в качестве часов, может работать. Если часы уронить на пол, они из-за большого ускорения превратятся в бесполезный кусок металла.

Конкретный пример эффекта разности хода часов можно рассчитать с помощью простой пифагоровой тройки чисел: $5^2 + 12^2 = 13^2$, т. е. $25 + 144 = 169$. Полагая $v/c = 12/13$, имеем $\sqrt{1 - v^2/c^2} = 5/13$.

Если t_0 исчислять в годах, то наибольшее достигаемое удаление наблюдателя B от наблюдателя A в световых годах есть $v/c \cdot t_0$. Чтобы достигнуть Сириуса (6 световых лет), понадобится время $t_0 = \frac{13}{2}$ лет, так как $\frac{v}{c}\, t_0 = \frac{12}{13} \cdot \frac{13}{2} = 6$. За время путешествия на Сириус и обратно наблюдатель A постареет на 13 лет, в то время как B — всего на 5 лет.

1958

О КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ [57]

В работе содержится попытка сделать первый шаг в квантовой механике связи, объясняющий важнейшие свойства атома (его стабильность, резонанс на дискретных частотах, принцип соответствия) и вытекающий естественным образом из законов классической физики. Эта теория содержит дисперсионную формулу Крамерса и выявляет близкое родство с гейзенберговской формулировкой правил аномального эффекта Зеемана.

Введение

Известно, что квантовая теория отказывает во всех случаях, где речь идет о движении нескольких электронов (например, атом гелия). Это уже многократно объяснялось тем, что на каждый электрон действует переменное поле, частота которого имеет тот же порядок величины, что и частота световой волны. Так как известно, что атомы при некоторых обстоятельствах реагируют на световые волны совсем «не механически» (т. е. в них возникают «квантовые скачки»), то нельзя также ожидать, чтобы взаимодействие между двумя электронами в одном и том же атоме следовало законам классической механики. Поэтому применение классической теории возмущений, дополненной правилами квантования, к вычислению стационарных траекторий оказывается несостоятельным. До тех пор пока неизвестны законы воздействия света на атом, т. е. взаимосвязь дисперсии со строением атома и с квантовыми скачками, останутся невыясненными также и законы взаимодействия между несколькими электронами внутри атома.

Но в последнее время Бором, Крамерсом и Слетером [1] как раз в этой области взаимосвязи излучения со строением атома достигнут существенный прогресс. Он состоит, по моему мнению, прежде всего в том, что классическая оптика снова в значительной мере вступает в свои права. Плодотворность этих идей проявилась также и в том, что Крамерсу [2] удалось найти и обосновать дисперсионную

---

[1] *N. Bohr, H. A. Kramers, J. C. Slater.* «Zs. Phys.», 1924, 24, S. 69.
[2] *H. A. Kramers.* «Nature», 10/V 1924, 113, N 2845, p. 673.

формулу, удовлетворяющую всем требованиям квантовой теории и прежде всего принципу соответствия.

При таком положении дел можно подумать о том, нельзя ли соображения, столь успешно примененные Крамерсом к взаимодействию между световым полем и излучающим электроном, перенести на взаимодействие между несколькими электронами атома. Более близкое рассмотрение дисперсионной формулы Крамерса ведет к тому, что возможность применения квантования следует видеть в общем свойстве возмущенной механической системы. Предлагаемая работа является попыткой осуществления этих идей [3].

Классические законы для возмущения механической системы, осуществляемого путем введения внутренних связей либо наложения внешних полей, мы приведем к одному и тому же определенному виду, который очень близок формальному переходу от классической механики к «квантовой механике». При этом правила квантования сами по себе по существу останутся неизменными; в качестве величин, кратных кванту действия h, появляются интегралы действия невозмущенной системы (которая считается разделимой и невырожденной) [4]. Однако сама механика претерпевает изменение, а именно в смысле перехода от дифференциальных уравнений к разностным уравнениям, уже имевшим место в условии частот Бора. При этом в простом случае невырожденной системы всякий произвол представляется исключенным.

Сочетание этой новой «квантовой механики» со старыми правилами квантования ведет к законам взаимодействия, которые прежде всего можно проверить тем, содержат ли они в себе дисперсионную формулу Крамерса. На самом деле это имеет место, и тем самым достигнута основа для других исследований.

Прежде всего следует подумать о теории эффекта Зеемана, приведенной Гейзенбергом к виду, близость которого с нашим подходом бросается в глаза. Конечно, нельзя

---

[3] Благоприятный случай позволил мне обсудить содержание этой работы с Нильсом Бором, что существенно способствовало выяснению представлений. Затем я весьма обязан В. Гейзенбергу за многочисленные советы и помощь в расчетах.

[4] Для возмущенной системы с ее сложными, вообще говоря, вовсе не периодическими решениями интегралы действия не могут быть определены.

ожидать, что квантовые предписания Гейзенберга будут включены в теорию благодаря сделанному здесь первому шагу в квантовой механике связанной системы, ибо для мультиплета и эффекта Зеемана характерно сложное вырождение. Поэтому мы пока что вынуждены положить в основу формулы для мультиплета квазиклассическую вспомогательную модель. Формальная аналогия этой формулы с установленными здесь для простейших случаев правилами квантовой механики ясно показывает, что эти правила хорошо соответствуют сущности процесса связи.

Наш опыт квантовой механики связи, по-видимому, характеризуется многими чертами, которые необходимы для представления свойств атома: его стабильности, резонанса на дискретных частотах, выполнением принципа соответствия и т. д. Подтверждается ли он в действительности, может показать лишь количественный расчет простой системы. При этом надо преодолеть еще значительные трудности, возникающие вследствие различных возможных способов вырождения.

§ 1. Классическая теория возмущений для системы, на которую действуют внешние силы

Рассмотрим механическую систему, уравнения движения которой могут быть решены путем разделения переменных. Пусть w_k^0, I_k^0 $(k = 1, \ldots, w_f)$ — соответствующие угловые переменные и переменные действия, а

$$H_0(w_1^0, w_2^0, \ldots, w_f^0, I_1^0, \ldots I_f^0) \tag{1}$$

— функция Гамильтона. Прежде всего предположим, что нет никакого вырождения, т. е. что все частоты

$$\nu_k = \frac{\partial H_0}{\partial I_k^0} \tag{2}$$

отличны от нуля.

Теперь рассмотрим действие возмущения, которое может состоять как во внутренней связи (которой раньше мы пренебрегали), так и в периодическом внешнем воздействии.

В первом случае функция возмущения может быть разложена в ряд Фурье вида

$$\sum_{\tau_1,\dots,\tau_f} C_{\tau_1,\dots,\tau_f} e^{2\pi i\left(w_1^0\tau_1+\dots w_f^0\tau_f\right)}. \tag{3}$$

Внешнее воздействие частоты ν_0 представляется в виде ряда Фурье

$$\sum_{\tau_0} C_{\tau_0} e^{2\pi i w_0^0 \tau_0}, \tag{4}$$

где положено

$$w_0{}^0 = \nu_0 t. \tag{5}$$

При этом мы принимаем, что сами $C\tau_0$ также являются периодическими функциями от $w_1{}^0,\dots,w^0{}_f$ и допускают разложения вида (3). Далее, предположим, что ν_0 несоизмерима ни с одной из частот системы $\nu_1, \dots, \nu_f$, т. е. что для всякого набора целых чисел $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_f$ величина

$$(\tau\nu) = \tau_0\nu_0 + \tau_1\nu_1 + \dots + \tau_f\ \nu_f \neq 0. \tag{5а}$$

Полная функция Гамильтона, рассматриваемая нами, имеет, следовательно, вид

$$H = H_0 + \lambda H_1, \tag{6}$$

где

$$H_1 = \sum_{\tau_0,\tau_1,\dots,\tau_f} C_{\tau_0,\tau_1,\dots,\tau_f} e^{2\pi i\left(w_0^0\tau_0+w_1^0\tau_1+\dots+w_f^0\tau_f\right)}. \tag{7}$$

Это же запишем кратко

$$H_1 = \sum_{\tau} C_\tau e^{2\pi i(w^0\tau)}\,(\tau = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_f). \tag{7а}$$

При этом коэффициенты $C_\tau = C_{\tau_0,\dots,\tau_f}$ являются функциями от $I_1, \dots, I_f$. Так как H_1 есть действительное число, то коэффициенты должны удовлетворять условиям

$$C_{-\tau_0,\dots,-\tau_f} = \widetilde{C}_{\tau_0,\dots,\tau_f} \text{ или } C_{-\tau} = \widetilde{C}_\tau, \tag{7в}$$

где знак $\sim$ означает комплексно-сопряженную величину.

Случай отсутствия внешнего поля получается из общего подхода при $\nu_0 = 0$; в этом случае повсюду нужно отбросить (нижний) индекс 0.

Функция H вследствие (5) содержит время явным образом. Однако, как известно, канонические уравнения дают

$$\dot{w}_k^0 = \frac{\partial H}{\partial I_k^0}, \quad \dot{I}_k^0 = -\frac{\partial H}{\partial w_k^0}. \tag{8}$$

Чтобы их решить, введем с помощью образующей $S(w_0^0, w_1^0, \ldots, w_f^0, I_1, \ldots, I_f)$ новые переменные w_k, I_k $(k = 1, \ldots, f)$ посредством канонической подстановки

$$I_k^0 = \frac{\partial S}{\partial w_k^0}, \quad w_k = \frac{\partial S}{\partial I_k}, \quad H + \frac{\partial S}{\partial t} = W \qquad (k=1,\ldots,f) \tag{9}$$

таким образом, чтобы W зависела только от I_k[5]. Тогда из преобразованных уравнений движения

$$w_k = \frac{\partial W}{\partial I_k} \qquad \dot{I}_k = -\frac{\partial W}{\partial w_k} = 0 \tag{10}$$

следует, что I_k есть величины постоянные, а w_k — линейные функции времени.

Во всяком случае, за исключением $\nu_0 = 0$, W не является энергией системы, ибо последняя в случае переменной во времени внешней силы не может быть постоянной. Мы увидим, что W есть средняя энергия системы во внешнем поле (включая энергию взаимодействия с этим полем).

Представим S степенным рядом вида

$$S = \sum_{k=1}^{f} w_k^0 I_k + \lambda S_1 + \lambda^2 S_2 + \ldots \tag{11}$$

и введем этот ряд в уравнение

$$H + \nu_0 \frac{\partial S}{\partial w_0^0} = W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots, \tag{12}$$

в котором W_0 (энергетическая постоянная невозмущенной системы); $W_1, W_2, \ldots$ должны быть функциями только от I_k. Затем получаются в различных приближениях уравнения

$$\sum_{k=0}^{f} \nu_k \frac{\partial S_1}{\partial w_k^0} + H_1 = W_1, \tag{13a}$$

---

[5] Так как H от t зависит явно, то, как известно, следует положить также и S зависящей от t (т. е. от w_0^0) и вместо H ввести новую функцию Гамильтона W.

$$\sum_{k=0}^{f} \nu_k \frac{\partial S_2}{\partial w_k^0} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{f} \frac{\partial_2 H_0}{\partial I_k \partial I_l} \frac{\partial S_1}{\partial w_k^0} \frac{\partial S_1}{\partial w_l^0} + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial H_1}{\partial I_k} \frac{\partial S_1}{\partial w_k^0} = W_2, \quad (13б)$$

. . . .

Решение этих уравнений получают известным образом. Сначала (13а) усредняют по всем $w^0{}_k (k = 0, 1, \ldots, f)$ и получают

$$\bar{H}_1 = C_{0,\,0,\ldots,0} = C_0 = W_1. \quad (14)$$

Затем (13а) интегрируют и получают

$$S_1 = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\tau}{}' \frac{C_\tau}{(\nu\tau)} e^{2\pi i (w\tau)}, \quad (15)$$

где штрих у знака суммы означает, что отброшен член $\tau_0 = 0;\ \tau_1 = 0, \ldots, \tau_f = 0$. Теперь (13б) записывается так:

$$\sum_k \nu_k \frac{\partial S_2}{\partial w_k^0} + \frac{1}{2} \sum_{kl} \frac{\partial \nu_l}{\partial I_k} \sum_{\tau}{}' \sum_{\tau'}{}' \frac{\tau_k \tau'_l C_\tau C_{\tau'}}{(\nu\tau)(\nu\tau')} e^{2\pi i (w^0, \tau+\tau')} +$$

$$+ \sum_k \sum_\tau \sum_{\tau'}{}' \frac{\partial C_\tau}{\partial I_k} \frac{\tau'_k C_{\tau'}}{(\nu\tau')} e^{2\pi i (w^0, \tau+\tau')} = W_2.$$

Путем усреднения отсюда получается

$$\frac{1}{2} \sum_{kl} \frac{\partial \nu_l}{\partial I_k} \sum_{\tau}{}' \tau_k \tau_l \frac{C_\tau C_{-\tau}}{(\nu\tau)^2} - \sum_k \sum_{\tau}{}' \frac{\partial C_\tau}{\partial I_k} \frac{\tau_k C_{-\tau}}{(\nu\tau)} = W_2.$$

Это же можно записать так:

$$W_2 = -\frac{1}{2} \sum_{\tau}{}' \sum_k \tau_k \frac{\partial}{\partial I_k} \left(\frac{|C_\tau|^2}{(\nu\tau)} \right) \quad (16)$$

или вследствие (5а)

$$W_2 = -\sum_{(\nu\tau)>0} \sum_k \tau_k \frac{\partial}{\partial I_k} \left(\frac{|C_\tau|^2}{(\nu\tau)} \right). \quad (16а)$$

Ограничимся этим приближением.

Влияние внутренних связей и внешних сил определяется формулами (14) и (16).

Если имеются только первые, то, как уже было сказано, надо просто положить $\nu_0 = 0$ и тем самым вернуться к известным формулам теории возмущений. Для нас существенно, что эти формулы остаются неизменными (только появляется член $\tau_0 \nu_0$ в $(\nu\tau)$), если действует периодическое внешнее поле.

§ 2. Классическая теория дисперсии

В качестве примера рассмотрим влияние, оказываемое на невозмущенную систему монохроматической, линейно-поляризованной световой волной. Пусть электрический вектор колеблется параллельно оси x:

$$\mathfrak{E}_x = E \cos 2\pi\nu_0 t = E \cdot \frac{1}{2}\left(e^{2\pi i w_0^0} + e^{-2\pi i w_0^0}\right). \tag{17}$$

Произведенная над системой работа $\bar{p}^0\bar{E} = p^0{}_x E_x$, где $\bar{p}^0$ — электрический момент (невозмущенной системы). Для $p_x{}^0$ имеем разложение в ряд вида

$$p_x^0 = \sum_\tau A_\tau e^{2\pi i(w^0\tau)} \qquad (\tau = \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_f), \tag{18}$$

причем должно быть

$$A_{-\tau} = \tilde{A}_\tau . \tag{18a}$$

Поэтому функция возмущения гласит:

$$H_1 = p_x^0\,\mathfrak{E}_x = \frac{1}{2} E \sum_\tau \left(A_\tau e^{2\pi i[(w\tau)+w_0]} + A_{-\tau}\, e^{-2\pi i[(w\tau)-w_0]}\right)$$

$$(\tau = \tau_1, \ldots, \tau_f). \tag{19}$$

Она совпадает с формулой (7a) ($\lambda = 1$) при

$$\left.\begin{aligned} C_{1,\tau_1,\ldots,\tau_f} &= \frac{E}{2} A_{\tau_1,\ldots,\tau_f} = \frac{E}{2} A_\tau, \\ C_{-1,-\tau_1,\ldots,-\tau_f} &= \frac{E}{2} A_{-\tau_1,\ldots,-\tau_f} = \frac{E}{2} A_{-\tau}, \end{aligned}\right\} \tag{19a}$$

тогда как C_τ для $\tau_0 \neq \pm 1$ исчезает.

Теперь согласно (14) и (16) имеем

$$W_1 = 0,$$
$$W_2 = -\frac{E^2}{4} \sum_{(\nu\tau)>0} \sum_k \tau_k \frac{\partial}{\partial I_k}\left(\frac{|A_\tau|^2}{(\nu\tau)+\nu_0} + \frac{|A_{-\tau}|^2}{(\nu\tau)-\nu_0}\right). \tag{20}$$

Второе выражение можно записать и так:

$$W_2 = -\frac{E^2}{4} \sum_{(\nu\tau)>0} \sum_k \tau_k \frac{\partial}{\partial I_k}\left(\frac{2\,|A_\tau|^2\,(\nu\tau)}{(\nu\tau)^2 - \nu_0^2}\right)$$

$$(\tau = \tau_1, \ldots, \tau_f). \tag{21}$$

Чтобы рассмотреть влияние светового поля на движения системы, рассчитаем его действие на электрический момент.

Подставив в (18) в соответствии с (9)

$$w_k^0 = w_k - \lambda \frac{\partial S_1}{\partial I_k}, \qquad I_k^0 = I_k + \lambda \frac{\partial S_1}{\partial w_k^0},$$

получим

$$p_x = p_x^0 + \lambda p_x^{(1)}, \tag{22}$$

где

$$p_x^{(1)} = \sum_k \left(\frac{\partial p_x^0}{\partial I_k^0} \frac{\partial S_1}{\partial w_k^0} - \frac{d p_x^0}{d w_k^0} \frac{\partial S_1}{\partial I_k} \right). \tag{22a}$$

А из (15) и (19a) следует

$$S_1 = -\frac{E}{2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \sum_\tau \left(\frac{A_\tau}{(\nu\tau)+\nu_0} e^{2\pi i[(w^0\tau)+w_0^0]} - \right.$$

$$\left. - \frac{A_{-\tau}}{(\nu\tau)-\nu_0} e^{-2\pi i[(w_0\tau)-w_0^0]} \right). \tag{23}$$

Если (18) и (23) подставить в (22a), то после несложного вычисления для члена $p_x^{(1)}$, пропорционального $\cos 2\pi\nu_0 t$, получается

$$p_x^{(1)} = -E \cos(2\pi\nu_0 t) \sum_k \sum_{(\nu\tau)>0} \tau_k \frac{\partial}{\partial I_k} \left(\frac{2 |A_\tau|^2 (\nu\tau)}{(\nu\tau)^2 - \nu_0^2} \right) + \ldots \tag{24}$$

Следовательно, среднее значение будет

$$\frac{1}{2} \overline{p_x^{(1)} \mathfrak{E}_x} = W_2. \tag{25}$$

Отсюда видна связь между W_2 и средней энергией системы в световом поле. Множитель $^1/_2$ в формуле (25) нуждается в пояснении. Для этого рассмотрим в качестве простейшей модели поляризуемой системы резонатор с квазиупругой энергией $^1/_2 ax^2$, на который воздействует электрическое поле E. Его полная энергия в поле равна

$$W = \frac{a}{2} x^2 + Ex,$$

Условие равновесия гласит:

$$x_0 = -\frac{E}{a}.$$

Следовательно, энергия в равновесном **положении**

$$W_0 = -\frac{1}{2a} E^2 = \frac{1}{2} x_0 E.$$

Отсюда видно, что множитель $^1/_2$ в (25) точно так же, как и здесь, обусловлен компенсацией части работы внешнего поля благодаря возникновению искажения.

Формулы (21) или (24), что касается их зависимости от частоты света ν, имеют типичный для резонансных формул вид, характерный для классической теории дисперсии. А именно, резонансными являются собственные частоты системы и все их обертоны [6].

§ 3. Переход к квантовой теории

Теперь дело заключается в том, чтобы осуществить переход от классических формул к квантовой теории.

При этом можно воспользоваться наглядными представлениями о связи частот с квантовыми скачками, введенными Бором, Крамерсом и Слетером в цитированной выше работе. Но наш ход мысли не зависит от основных и пока еще оспариваемых понятий этой теории, таких, как статистическая трактовка переноса энергии и импульса.

По Бору, всякое стационарное состояние является носителем ряда «виртуальных» резонаторов, частоты которых соответствуют переходам к другим стационарным состояниям, согласно условию частот

$$h\nu = |W_1 - W_2|.$$

Если рассмотреть квантовые скачки, происходящие с одного определенного стационарного состояния $n_1, n_2, \ldots, n_e, \ldots, n_f$, то они распадаются на два рода, в зависимости от того, находится ли конечный уровень энергии ниже или выше исходного. Первые скачки, число

[6] Epstein (Zs. f. Phys., 1922, 9, S. 92) построил теорию дисперсии на основе расчета возмущений несколько иначе, чем это сделано здесь.

которых конечно, связаны с эмиссией света. Им соответствует столько же «испускающих резонаторов» состояния n_e с частотами

$$\nu(n, n') = \frac{1}{h}\Big[W(n) - W(n')\Big].$$

Скачки второго рода, число которых, вообще говоря, бесконечно велико, происходят при поглощении света. Им соответствуют «поглощающие резонаторы» состояния n_e с частотами

$$\nu(n', n) = \frac{1}{h}\Big[W(n') - W(n)\Big].$$

Всякому «виртуальному резонатору» (переходу) «соответствует» гармоника стационарного состояния n_e, вычисляемая в механической эрзацмодели по классическим законам. Его частота $(\nu\tau)$, где $\tau_e = |n_e - n'_e|$, и ν_e зависят от квантовых чисел n_e рассматриваемого стационарного состояния.

Между классической частотой $(\nu\tau)$ и квантовотеоретической частотой поглощения $\nu(n', n)$ имеется следующая количественная связь. Пусть переход $n_k \to n'_k = n_k + \tau_k$ происходит «линейно», т. е. положим для интеграла действия

$$I_k = h(n_k + \mu\tau_k), \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1. \tag{26}$$

Тогда, с одной стороны, будет

$$(\nu\tau) = \sum_k \nu_k\tau_k = \sum_k \frac{\partial H_0}{\partial I_k}\tau_k = $$
$$= \frac{1}{h}\sum_k \frac{\partial H_0}{\partial I_k}\frac{\partial I_k}{d\mu} = \frac{1}{h}\frac{dH_0}{d\mu}, \tag{27}$$

а с другой —

$$\nu(n', n) = \frac{1}{h}\Big[H_0(n + \tau) - H_0(n)\Big]; \tag{28}$$

значит,

$$\nu(n + \tau, n) = \int_0^1 (\nu\tau)\, d\mu. \tag{29}$$

Действительная (квантовотеоретическая) частота резонатора есть «линейное» среднее значение соответствующей (классической) частоты. Вместо этого можно также сказать, что законы образования частот $\nu(n+\tau, n)$ и $(\nu\tau)$ из H_0 соотносятся между собой как частное разности и производной.

Если теперь рассмотреть процесс связи, описываемый в эрзацмодели посредством функции возмущения λH_1, с той точки зрения, которая принимает виртуальные резонаторы за реальные, первичные, и в классических методах расчета видит лишь вспомогательное средство для рационального прослеживания истинных квантовых законов, то мы придем к следующей трактовке.

Связь заключается во взаимном влиянии (в обмене излучением) виртуальных резонаторов. Чтобы найти математическое выражение для этого влияния, надо рассмотреть соответствующее выражение для высших гармоник движения модели. Для этого надо найти представление энергии возмущения, в котором она является суммой вкладов энергий всех гармоник.

Но именно это дает наша основная формула (16a). Вдобавок она имеет тот же вид, что и формула для частоты $(\nu\tau)$, которая, согласно (27), характеризуется оператором

$$\sum_k \tau_k \frac{\partial}{\partial I_k} = \frac{1}{h} \frac{d}{d\mu}.$$

Поэтому мы с необходимостью приходим к выводу, что всюду, где вычисленная классическим способом величина имеет вид

$$\sum_\tau \tau_k \frac{\partial \Phi}{\partial I_k} = \frac{1}{h} \frac{d\Phi}{d\mu},$$

ее можно заменить линейным средним значением или отношением разности

$$\int_0^1 \sum_\tau \tau_k \frac{\partial \Phi}{\partial I_k} d\mu = \frac{1}{h} \Big[\Phi(n+\tau) - \Phi(n) \Big]. \tag{30}$$

Но в основную формулу (16a), кроме образований этого рода, входят еще величины $|C_\tau|^2 = C_\tau C_{-\tau}$, являющиеся мерой колебательных энергий высших гармоник классической эрзацмодели. Конечно, их тоже надо заменить «соответствующими» величинами для виртуальных резонаторов. При этом, по-видимому, не имеет смысла искать соответствующие величины для самих коэффициентов Фурье C_τ (за исключением коэффициента C_0, который не соответствует никакому резонатору и без всякого изменения может быть введен в квантовые формулы). Квантовотеоретическое значение имеют, очевидно, только квадратичные образования $|C_\tau|^2 = C_\tau C_{-\tau}$. Назовем соответствующие им величины $\Gamma(n, n')$. Так как $|C_\tau|^2$ при изменении знака τ не изменяется, то $\Gamma(n, n')$ являются симметричными:

$$\Gamma(n, n') = \Gamma(n', n). \tag{31}$$

Задача определения Γ находится в тесной связи с вопросом о соотношениях интенсивностей спектральных линий и имеет важнейшее значение для дальнейшего развития квантовой теории. Если речь идет о действии внешнего поля, то Γ могут быть определены явно, когда движение во внешнем поле обладает квазипериодическим характером и его можно рассчитать путем разделения переменных. Ибо тогда величина $W_2^{(qu)}$ получается также с помощью надежной теории квазипериодической системы. В случае взаимной связи двух систем можно классические значения C_τ для общей системы вывести исходя из таких значений для отдельной системы, находящейся во внешнем поле. Следует допустить, что нечто подобное будет иметь место и для квантовотеоретических значений Γ. Итак, входящие в (16а) величины

$$\frac{|C_\tau|^2}{(\nu\tau)} \text{ заменим на } \frac{\Gamma(n+\tau, n)}{\nu(n+\tau, n)}, \tag{32}$$

а имеющееся там «линейное» дифференцирование — на частное разности

$$W_2^{(qu)} = -\sum_{\tau_k>0} \int_0^1 \sum_k \tau_k \frac{\partial}{\partial I_k}\left(\frac{\Gamma}{\nu}\right) d\mu =$$
$$= -\frac{1}{h} \sum_{\tau_k>0} \left(\frac{\Gamma(n+\tau, n)}{\nu(n+\tau, n)} - \frac{\Gamma(n, n-\tau)}{\nu(n, n-\tau)}\right). \tag{33}$$

При этом суммирование по τ охватывает все квантовые скачки, возможные из состояния n_k, а именно, первый член учитывает переходы с поглощением энергии, второй — с испусканием. Следовательно, получено разложение энергии связи на члены, соответствующие действию испускающих и поглощающих резонаторов и входящие в формулу с противоположными знаками.

Важнейшие свойства формулы (33) следующие.

Во-первых, при больших n_k (бо̀льших по сравнению с τ_k) она переходит в соответствующую классическую формулу, т. е. выполняется принцип соответствия.

Во-вторых, в знаменателе появляются квантовотеоретические частоты $\nu(n, n')$ вместо классических $(\nu\tau)$. Последние, как известно, имеют то свойство, что по мере продвижения к более высоким гармоникам все снова и снова достигаются такие $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_f)$, для которых

$$(\nu\tau) = \nu_0\tau_0 + \ldots + \nu_f\tau_f$$

становится очень малой. Соответствующие этим «малым знаменателям» члены ряда вносят особенно большой вклад (и ответственны за то, что классический ряд возмущений расходится для всех плотно расположенных точек $I_1, \ldots, I_f$ пространства). Наглядно это можно толковать так, что система имеет в качестве резонансных чрезвычайно плотно расположенные частоты всех высших гармоник. В квантовотеоретической формуле вместо высших гармоник появляются квантовые скачки, частоты которых имеют совсем другой закон распределения. Среди возможных скачков с одного стационарного состояния только с конечным значением n_k имеется одна минимальная (квантовотеоретическая) частота. Поэтому сходимость квантовотеоретического ряда (33) не составляет такой трудной проблемы, как у соответствующего классического ряда.

Добавим еще одно замечание относительно энергии возмущения первого порядка (14):

$$\overline{H}_1 = W_1 = C_0.$$

Она имеет место только при возмущениях внешним полем, а не внутренней связью. Можно предположить, что C_0 не обусловлено никаким процессом дальнейшего квантования. Этот прием подтверждался до сих пор во всех случаях.

§ 4. Теория дисперсии Крамерса

Формула дисперсии, в самое последнее время опубликованная Крамерсом в «Nature» (l. c.), получается из формулы (24) § 2 посредством такого же процесса квантования, который мы только что пояснили на примере энергии возмущения. Для электрического момента, индуцированного световой волной в резонаторах, находящихся в стационарном состоянии n_k, получаем

$$p_x^{(1)} = E\cos(2\pi\nu_0 t)\,\frac{1}{L}\sum\left\{\frac{2\Gamma_a\,\nu_a}{\nu_a^2-\nu_0^2}-\frac{2\Gamma_e\,\nu_e}{\nu_e^2-\nu_0^2}\right\}, \tag{34}$$

где положено для краткости

$$\nu_a = \nu(n+\tau,\, n), \qquad \nu_e = \nu(n,\, n-\tau), \tag{35}$$

$$\Gamma_a = \Gamma(n+\tau,\, n), \qquad \Gamma_e = \Gamma(n,\, n-\tau),$$

а суммирование простирается по всем поглощающим резонаторам (a) и по всем испускающим резонаторам (e).

Здесь частоты поглощения и испускания являются резонансными. Но ведут себя оба эти вида резонаторов различным образом: только поглощающие резонаторы дают положительные вклады по типу классических резонаторов, испускающие же резонаторы дают отрицательные вклады. Введение этих членов отличает дисперсионную формулу Крамерса от более давнего подхода Ладенбурга [7]. Но *именно благодаря* образованию этой разности достигается то, что в предельном случае больших квантовых чисел (n_k велико по сравнению с τ_k) формула переходит в соответствующую классическую формулу, как этого требует принцип соответствия.

Крамерс перенял у Ладенбурга связь между величинами Γ и эйнштейновскими вероятностями $a_n^{n'}$ для спонтанных переходов от одного стационарного состояния n_k' к другому n_k с меньшей энергией. Но мы на этом не останавливаемся.

---

[7] *R. Ladenburg*. Zs. f. Phys., 1921, 4, S. 451. См. также: *R. Ladenburg*, *F. Reiche*. Naturwiss., 1923, 11, S. 584.

§ 5. Вырождение и секулярные возмущения

Благодаря нашей формуле (33) вычисление возмущений вплоть до второго порядка по λ для всех невырожденных систем приводится к определению квантовых величин $\Gamma(n, n')$, соответствующих классическим $|C_\tau|^2$. Практическому применению формулы мешает не только то, что о величинах $\Gamma(n, n')$ не известно ничего определенного, но прежде всего то обстоятельство, что во всех практически важных случаях имеют место вырождения. Тогда связи приводят к секулярным движениям и спрашивается, каким же образом их рассматривать квантовотеоретически?

Здесь мы рассмотрим только самый простейший случай и увидим, дает ли формализм расчета возмущений указание к рациональному квантованию.

Невырожденные переменные обозначим индексами α, β, ..., вырожденные — индексами ρ, σ, ...

Самый простой случай, это когда

$$\overline{H}_1 = C_0 \neq 0, \tag{36}$$

причем усреднение распространяется на невырожденные переменные. Тогда C_0 есть функция от w_ρ, I_ρ и секулярные изменения этих переменных определяются из уравнения

$$\overline{H}_1(w_\rho, I_\rho) = W_1. \tag{36a}$$

Примем, что это уравнение решается путем разделения переменных. Тогда можно ввести новые переменные w_k, I_k так, чтобы $\overline{H}_1$ не зависела от w_k[8]. Примем, что при этом не наступает нового вырождения, т. е. что все секулярные частоты

$$\nu_\rho = \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial I_\rho} \neq 0. \tag{37}$$

До этого момента несомненно можно переносить классические методы без изменений в квантовую механику.

Если чисто периодическую часть некоторой функции Φ обозначить через

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \overline{\Phi}, \tag{38}$$

[8] *S. M. Born*, *W. Pauli*. Jr. Zs. f. Phys., 1922, 10, S. 137 [формулы (24)— (26)], 151.

то S_1 определяется из уравнения

$$\sum_{\alpha} \nu_\alpha \frac{\partial S_1}{\partial w_\alpha^0} + \breve{H}_1 = 0 \tag{39}$$

с точностью до произвольной функции $\overset{*}{S_1}$ от w_ρ^0:

$$S_1 = S_1^0 + S_1^*. \tag{40}$$

Тогда получим уравнение для следующего **приближения**:

$$\sum_{\alpha} \nu_\alpha \frac{\partial S_2}{\partial w_\alpha^0} + H_2 = W_2, \tag{41}$$

где для краткости положено

$$H_2 = \sum_{\rho} \frac{\partial H_1}{\partial I_\rho} \frac{\partial S_1^*}{\partial w_\rho^0} + H_2^*, \tag{42}$$

$$H_2^* = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_\alpha \partial I_\beta} \frac{\partial S_1^0}{\partial w_\alpha^0} \frac{\partial S_1^0}{\partial w_\beta^0} + \sum_{\alpha} \frac{\partial H_1}{\partial I_\alpha} \frac{\partial S_1^0}{\partial w_\alpha^0}. \tag{43}$$

Обозначим усреднение по w_α одной черточкой сверху, а усреднение по w_α и по w_ρ — двумя. Тогда будет

$$\overline{H}_2 = \sum_{\rho} \nu_\rho \frac{\partial S_1^*}{\partial w_\rho^0} + \overline{H_2^*} = W_2. \tag{44}$$

Значит, если определить

$$W_2 = \overline{\overline{H_2^*}}, \tag{45}$$

то получим

$$\sum_{\rho} \nu_\rho \frac{\partial S_1^*}{\partial w_\rho^0} + \overset{\approx}{H_2^*} = 0, \tag{46}$$

$$\sum_{\alpha} \nu_\alpha \frac{\partial S_2}{\partial w_\alpha^0} + \widetilde{H_2^*} = 0. \tag{47}$$

Из (46) можно определить S_1^*, из (47)— S_2 вплоть до произвольной функции S_2^* от w_ρ.

Если ограничиться возмущениями второго порядка, то метод на этом прерывается. Сравнение формул (45) и (43) с (13б) (§ 1) показывает, что W_2 теперь допускает представление

$$W_2 = -\sum_{(\nu\tau)>0} \sum_{\alpha} \tau_\alpha \frac{\partial}{\partial I_\alpha} \left(\frac{\overline{|C_\tau|^2}}{(\nu\tau)} \right), \tag{48}$$

где C_τ суть коэффициенты в разложении H_1 в ряд Фурье по невырожденным переменным w_α^0 (значит, они являются функциями от w_ρ^0), а черточка сверху означает усреднение по w_ρ^0. Отсюда ясно, что квантовотеоретическая энергия связи $W_2^{(qu)}$ образуется таким же образом, как и в § 3 (формула 33), только при этом $\Gamma(n, n')$ являются величинами, соответствующими средним значениям $|C_\tau|^2$.

Более трудным оказывается случай, особенно важный для применений и часто встречающийся, когда тождественно при всех w_ρ^0

$$\overline{H}_1 = C_0 = 0, \tag{49}$$

так что обычный способ определения секулярных возмущений уже не пригоден.

Как было показано Гейзенбергом и мной в связи с общим исследованием моделей молекул[9], в таком случае надо сначала посредством канонической подстановки вовсе убрать H_1 из функции возмущения (которая может содержать еще члены $\lambda^2 H_2 + \ldots$). Если снова ограничиться возмущениями второго порядка, то получаются почти те же самые формулы, которыми мы только что пользовались. А именно, функцию S_1 можно определить из уравнения

$$\sum_{\alpha} \nu_\alpha \frac{\partial S_1}{\partial w_\alpha^0} + H_1 = 0 \tag{50}$$

[вследствие $\overline{H}_1 = 0$, совпадающего с (39)]. Его решение имеет вид $S_1 = S_1^0 (w_\alpha^0, w_\rho^0) + S_1^* (w_\rho^0)$, где S_1^0 — функция определенная, но S_1^* — произвольная. Чтобы сделать S_1 однозначной, можно потребовать, например, $\overline{S}_1 = 0$ (усреднение по w_α^0). Тогда будет

$$H = H_0 + \lambda^2 H_2 + \ldots, \tag{51}$$

[9] *M. Born, W. Heisenberg.* Ann. Phys., 1924, [4], 74, S. 1.

где

$$H_2 = \sum_{\rho} \frac{\partial H_1}{\partial I_\rho} \frac{\partial S_1}{\partial w_\rho^0} + H_2^*, \tag{52}$$

$$H_2^* = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_\alpha \partial I_\beta} \frac{\partial S_1}{\partial w_\alpha^0} \frac{\partial S_1}{\partial w_\beta^0} + \sum_{\alpha} \frac{\partial H_1}{\partial I_\alpha} \frac{\partial S_1}{\partial w_\alpha^0}. \tag{53}$$

Секулярные движения w_ρ^0, I_ρ получаются, согласно классической механике, из

$$\overline{H}_\alpha (w_\rho{}^0; I_\rho; I_\alpha) = W_2. \tag{54}$$

Это уравнение, очевидно, имеет вид

$$\overline{H}_2 = \sum_{\rho} \overline{\frac{\partial H_1}{\partial I_\rho} \frac{\partial S_1}{\partial w_\rho^0}} - \sum_{(\nu\tau)>0} \sum_{\alpha} \tau_\alpha \frac{\partial}{\partial I_\alpha} \left(\frac{|C_\tau|^2}{(\nu\tau)} \right) = W_2, \tag{55}$$

который позволяет путем усреднения осуществить переход к квантовой механике, так как второй член при $I_\alpha = h\,(n_\alpha + \mu\tau_\alpha)$ есть производная по μ. Но, спрашивается, как быть с первым членом? Пока что решить это путем формальных рассуждений не представляется возможным.

Чтобы лучше разобраться в положении дела, можно привлечь формулы, с помощью которых Гейзенберг формально описал мультиплеты и аномальный эффект Зеемана. Конечно, он рассматривает сильно упрощенную эрзацмодель, а именно, атом, состоящий из электрона (или нескольких электронов) и атомного остова, причем эти составные части характеризуются динамически лишь величинами и направлениями их моментов количества движения. Гейзенберг учитывает два различного рода отклонения от классических законов:

1. Он вводит энергию взаимодействия между остовом атома, электронами и магнитным полем $H^{(kl)}$, которая вычисляется «классически», но с теми изменениями, что ларморовская прецессия атомного остова вдвое больше, чем она должна быть согласно классической теории, и что квантовые числа I, R, K_1, K_2, относящиеся к моментам количества движения всего атома I, атомного остова r, электронов k_1, k_2, ..., а также их компоненты в направлении поля M, P_r, P_{k1}, P_{k2}, могут иметь только полуцелые значения.

2. Посредством некоторого процесса усреднения он образует из этой квазиклассической энергии $H^{(kl)}$ квантово-теоретическую $H^{(qu)}$. Для одного электрона ее можно записать в соответствии с выбранными координатами в виде

$$H^{(qu)} = \int\limits_{-1/2}^{+1/2} H^{(kl)}\,dI = \int\limits_{0}^{1} H^{(kl)}\,dP_k;$$

для нескольких электронов надо подставить

$$P_{k_1} = P_{k_1}{}^0 + \tau_1\mu, \qquad P_{k_2} = P_{k_2}{}^0 + \tau_2\mu, \ldots \qquad (\tau_1, \tau_2, \ldots = \pm 1)$$

и образовать

$$H^{(qu)} = \int\limits_{0}^{1} H^{(kl)}\,d\mu.$$

Сходство этого правила с нашими формулами бросается в глаза, однако, вообще говоря, их нельзя рассматривать как частный случай нашего закона. Это происходит потому, что при эффекте Зеемана имеют место как собственные, так и случайные и предельные вырождения самого сложного рода. Возможно, правило Гейзенберга надо трактовать следующим образом.

Величина, названная им $H^{(kl)}$, это та величина, которая получается из определяемой формулой (55) энергии возмущения $\overline{H}_2$, если во втором члене, относящемся ко всем невырожденным переменным, перейти к квантовой механике. Если эту величину мы назовем $\overline{H_2}^*$, то, следовательно, квазиклассическое уравнение движения Гейзенберга будет

$$H^{(kl)} = \overline{H}{}_2^* = W_2.$$

Из него можно затем определить секулярные движения вырожденных переменных. Если $\overline{H_2}^*$ выражена в соответствующих квантовых числах, то в отношении нее теперь можно выполнить переход к квантовой механике (линейное интегрирование).

Если эта трактовка верна (пока об этом очень трудно судить), то напрашивается аналогичный вывод, что такой же процесс можно применять всегда к секулярным возмущениям второго порядка (55).

Ограничимся здесь тем, что нами показано, что такое усреднение квантового интеграла, как его выполнил Гейзенберг, с точки зрения квантовой механики кажется вполне естественным и непринужденным.

1924

ФИЗИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ[1] [68]

Дать представление о современном состоянии квантовой механики не входит в задачу этого сообщения. Статья на эту тему была недавно опубликована В. Гейзенбергом, основателем новой теории (см. журнал «Naturwissenschaften», 1926, **45**, S. 989). Здесь мы попытаемся оценить физический смысл формул квантовой механики.

Мы имеем в настоящее время удивительно удобный и приспособленный для расчетов аппарат для решения квантовотеоретических задач. Следует подчеркнуть, что различные формулировки квантовой механики — матричная теория, некоммутативная алгебра Дирака, дифференциальные уравнения в частных производных Шредингера — все они математически эквивалентны и, взятые вместе, образуют единую теорию. Эта теория позволяет нам вычислять стационарные состояния атомов и соответствующие излучения, если пренебрегать реакцией излучения на атомы. Представляется, что в этом отношении мы имеем все, что только можно пожелать от теории, так как результат любого примера, в случае которого проведен соответствующий расчет, соответствует экспериментальным данным.

Вопрос о возможных состояниях материи не исчерпывает, однако, область физических задач. Может быть, еще более важным является вопрос о том, как протекают явления, если состояние равновесия нарушено. Классическая физика занималась исключительно вопросами такого рода, поскольку она оказалась почти бессильной в решении проб-

---

[1] Расширенный вариант доклада, прочитанного на секции А (математика и физика) Британской ассоциации в Оксфорде 10 августа 1926 г. и переведенного на английский язык Робертом Оппенгеймером, которому автор очень признателен за тщательный перевод (с немецкого языка рукописи.— *Прим. ред.*).

лем структуры. Напротив, вопрос о ходе явлений практически выпал из поля зрения квантовой механики, поскольку он не находит своего непосредственного выражения в формальном аппарате теории. Мы рассмотрим здесь некоторые попытки трактовки этой проблемы в рамках новой механики.

В классической динамике знание состояния замкнутой системы (положения и скорости всех входящих в нее частиц) в любой заданный момент однозначно определяло будущее этой системы; в такой форме принимается принцип причинности в классической физике. Математически это выражается в том, что физические величины удовлетворяют дифференциальным уравнениям определенного вида. Однако, помимо этих причинных законов, классическая физика пользуется еще и статистическим методом рассмотрения. Фактически введение вероятностей можно оправдать тем обстоятельством, что начальное состояние системы никогда не бывает известно точно. Поскольку такое положение имеет место, статистические методы могут быть приняты в классической физике, возможно, с некоторыми оговорками.

Элементарная теория вероятностей исходит из предположения, что имеются основания для рассмотрения отдельных случаев как равновероятных, и отсюда выводит вероятность сложных комбинаций такого рода случаев. В более общем виде: исходя из принятого распределения (например, однородного, с равно вероятными случаями), выводится распределение вероятностей других событий, зависящих от исходных. Особо важным, естественно, является тот случай, когда распределение совершенно или частично не зависит от первоначально принятого распределения.

Этому соответствует следующая физическая процедура: мы делаем некоторое предположение о начальном распределении, в частности, если это возможно, о равновероятности всех случаев, и пытаемся затем показать, что наше начальное распределение никак не влияет на конечные наблюдаемые результаты. Мы видим обе части этой процедуры в статистической механике: мы подразделяем фазовое пространство на равновероятные ячейки, руководствуясь лишь некоторыми общими теоремами (законом сохранения энергии, теоремой Лиувилля); в то же время мы пытаемся перевести результирующее распределение в пространстве на язык распределения состояний во времени. Но эргодическая гипотеза, с помощью которой осуществляется такого рода перевод и которая утверждает, что любая система, будучи предоставлена самой себе, с течением времени равномерно заполняет свое фазовое пространство,— остается чистейшей гипотезой, какой она, вероятно, и останется вообще. Поэтому представляется, что выбор равновероятных элементарных событий путем разделения фазового пространства на ячейки может быть оправдан лишь a posteriori, исходя из того, что таким образом удается успешно объяснить наблюдаемые явления.

С подобным же положением мы встречаемся во всех случаях, когда в физике используются статистические представления. Возьмем в качестве примера атомные столкновения — столкновение атома с электроном. Если кинетическая энергия электрона меньше, чем первый потенциал возбуждения атома, столкновение будет упругим: электрон не теряет энергии. В таком случае мы можем спросить: в каком направлении отклонится электрон в результате столкновения? Классическая теория рассматривает каждое такое столкновение как причинно обусловленное. Если в точности известны положения и скорости всех электронов в атоме, а равно— и сталкивающегося с атомом электрона, можно заранее подсчитать его отклонение. Но, к сожалению, мы вновь встречаемся здесь с нехваткой информации, нужной для описания деталей системы, и снова оказываемся перед необходимостью удовлетвориться средними значениями. Обычно забывают, что для их получения необходимо было сделать предположение о равновероятных конфигурациях. Это выполняется наиболее «естественным» путем — выражением координат электрона (начальных его траекторий по отношению к ядру) в терминах угловых переменных и фаз, а также принятием условия о том, что равные фазовые интервалы равновероятны. Однако это всего лишь предположение, и справедливость его может быть проверена по соответствующим результатам.

Характерная черта этой процедуры заключается в том, что микроскопические координаты вводятся для того, чтобы можно было описывать индивидуальные явления с полной определенностью, по крайней мере теоретически. Для практических целей они не существенны: экспериментатор только считает число частиц, отраженных под данным углом, не интересуясь деталями их движения по этой траектории; главный отрезок траектории, на котором имеет место взаимодействие атома с электроном, не доступен для наблюдения. Однако на основе таких численных данных мы можем вывести заключение о механизме соударения. Знаменитым примером всего этого является работа Резерфорда по рассеянию α-частиц; здесь, правда, микроскопические координаты — это не фазы электронов, а расстояние от ядра до первоначального направления движения α-частицы («прицельный параметр»). Исходя из статистических данных по рассеянию, Резерфорд смог доказать справедливость закона Кулона в случае взаимодействия ядра и α-частицы. Микроскопические координаты были устранены из теоретических формул для распределения частиц, рассеянных под различными углами.

Таким образом, мы имеем здесь пример оценки поля сил, произведенный посредством расчета с использованием статистических методов, а не с помощью измерений ускорения и применения второго закона Ньютона.

Этот метод столь же фундаментален, как и тот, с помощью которого можно оценить качество игральной кости. Если при бросании такой кости одна из сторон выпадает с большей, чем $^1/_6$ частотой, статистические данные свидетельствуют о том, что игральная кость фальшива. Другой такого рода пример дает «барометрическая формула». Разумеется, мы можем вывести ее динамически, если будем считать воздух непрерывной средой и потребуем, чтобы выполнялось равенство между гидродинамическим давлением и силой тяжести. Но на самом деле давление определяется только статистически, как средний перенос импульса за счет соударений молекул. Поэтому не только единственно возможный, но также и значительно более фундаментальный подход к барометрической формуле состоит в подсчитывании числа молекул в поле тяжести, из которого может быть выведен закон распределения.

Эти примеры имели целью подвести нас к идее о том, что мы можем заменить ньютоновское определение силы с помощью некоего статистического. Подобно тому как в классической механике мы заключаем, что в случае, когда движение частицы является равномерным и прямолинейным, на нее не действует никакая внешняя сила, так и здесь мы должны поступить таким же образом, если ансамбль частиц равномерно распределен в пространстве (выбор подходящих координат ведет к аналогичным проблемам в обеих теориях). Величина силы, измеренной классически — по ускорению частицы, в этом случае будет определена по неоднородности ансамбля частиц.

В классической теории мы, конечно, сталкиваемся с задачей сведéния двух определений силы к одному, и в этом заключается существо всех попыток рационального обоснования статистической механики; мы подчеркнем, однако, что все они не вполне успешны, потому что в конечном итоге без выбора равновероятных случаев не обойтись!

После этих предварительных замечаний мы сосредоточим наше внимание на квантовой механике. Примечательно, что здесь, даже в историческом плане, концепция априорной вероятности играет такую роль, которая не может быть сведена к рассмотрению равновероятных элементарных событий, как, например, в случае вероятностей переходов при излучении. Разумеется, это может рассматриваться просто как слабость теории.

Более существенно то, что формальная квантовая механика, очевидно, ни в коем случае не дает определения положения частиц в пространстве и времени. Можно было бы возразить, что, согласно Шредингеру, частица вообще не занимает четко очерченного положения, поскольку она представляет собой только группу волн с неопределенными границами; но я хотел бы обойтись без этого определения «волнового пакета», которое не было да и не может быть доведено до логической завершенности. И это связано с тем, что шредингеровские волны движутся не в обычном, а в конфигурационном пространстве, число измерений в котором равно числу степеней свободы системы ($3N$ для случая N частиц). Квантовотеоретическое описание системы содержит определенные утверждения об энергии, импульсе, угловом моменте системы, но оно не дает ответа (или в лучшем случае дает его только в пределе классической механики) на вопрос о том, где данная частица находится в данный момент времени. В этом отношении квантовая теория находится в соответствии с требованиями экспериментаторов, для которых измерение макроскопических координат также не доступно и которые поэтому ограничиваются тем, что считают только отдельные случаи и занимаются статистическими расчетами. Это означает, что квантовая механика способна отвечать лишь на правильно поставленные статистические вопросы и ничего не может сказать о ходе индивидуальных явлений. Таким образом, она является единым сплавом из механики и статистики.

В соответствии с этим мы должны были бы сопоставить волновому уравнению примерно такую картину: волны, удовлетворяющие этому уравнению, совсем не представляют движения частиц. Они лишь определяют возможные движения или, лучше сказать, состояния материи. Материю всегда можно представлять себе состоящей из точечных масс (электроны, протоны), но во многих случаях частицы не могут быть различимы как некие индивидуальные объекты, например в том случае, если они входят в атомную систему. Такая атомная система имеет дискретный ряд состояний, однако, кроме того, у нее есть еще и непрерывный участок спектра, причем соответствующие состояния обладают замечательным свойством: возмущение в них распространяется с конечной скоростью от атома, как если бы из него была выброшена частица. Этот факт подтверждает и даже делает необходимым существование частиц, хотя это, как мы уже говорили, в некоторых случаях нельзя принимать слишком буквально. Между этими частицами действуют электромагнитные силы (мы не принимаем сейчас во внимание конечную скорость распространения взаимодействия), которые, насколько мы знаем, определяются в классической электродинамике положением частиц (таковы, например, кулоновские силы притяжения). Но эти силы, в отличие от классического описания, не являются причиной ускорения частиц, они не имеют отношения к их движению. В качестве посредника в данном случае выступает волновое поле: силы определяют колебания некоторой функции ψ, зависящей от положений всех частиц (функция в конфигурационном пространстве) и, в свою очередь, определяет их, поскольку коэффициенты дифференциального уравнения для ψ включают эти силы.

Знание функции ψ дает нам возможность проследить за ходом физического процесса настолько, насколько он определяется квантовомеханически: не в каузальном, а в статистическом смысле. Каждый процесс состоит из элементарных процессов, которые мы привыкли называть переходами, или скачками; представляется, что скачок сам по себе исключает всякую возможность проследить за ним: можно убедиться лишь в его результате. Этот результат заключается в том, что после скачка система оказывается в другом квантовом состоянии. Функция ψ определяет эти переходы следующим образом: каждое состояние системы соответствует данному характеристическому решению собственной функции дифференциального уравнения. Например, нормальное состояние описывается функцией ψ_1, следующее — ψ_2 и т. д. Для простоты мы предполагаем, что система первоначально находилась в нормальном состоянии; после того как произошел элементарный процесс, решение принимает такую форму:

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + c_3\psi_3 + \ldots,$$

которая представляет суперпозицию ряда собственных функций с определенными амплитудами c_1, c_2, c_3,... Квадраты амплитуд c_1^2, c_2^2,... дают вероятность того, что после скачка система перейдет соответственно в 1-е, 2-е, 3-е,... состояние. Таким образом, c_1^2 является вероятностью того, что в результате возмущения система останется в нормальном состоянии, c_2^2— вероятностью ее перехода во второе и т. д. [2]

Таким образом, эти вероятности определены динамически. Но в какое состояние система перейдет в действительности, само решение не определяет (во всяком случае, на основе ныне известных законов). Но во всем этом нет ничего нового, поскольку мы видели выше, что классическая теория, например в случае задачи о столкновениях, также дает лишь вероятности. Классическая теория вводит микроскопические координаты, которые определяют индивидуальные процессы лишь для того, чтобы исключить эти координаты после усреднения по ним, тогда как новая теория дает те же самые результаты вообще без введения таких координат. Конечно, не запрещается верить, что такие координаты все же существуют, но они приобретут физическое значение лишь тогда, когда будут изобретены методы для их экспериментального наблюдения.

Здесь нет места для обсуждения философских проблем; мы только наметим точку зрения, принять которую вы-

---

[2] Можно отметить, что эта теория не эквивалентна теории Бора, Крамерса, Слетера. В случае последней законы сохранения энергии и импульса считаются чисто статистическими; в квантовой теории их точное выполнение является следствием фундаментальных уравнений. Статистические рассмотрения приложимы лишь к таким величинам, как углы отклонения при столкновениях, которые не могут быть квантованы в боровской теории угловых переменных.

нуждают нас данные физики. Мы освобождаем силы от их классических «обязанностей» прямого определения движения частиц и предоставляем им вместо этого определять вероятность состояний. Если раньше нашей целью было сделать два эти определения силы эквивалентными, то теперь эта проблема, грубо говоря, больше не имеет смысла. Единственный вопрос состоит в том, почему классическое определение оказывается столь полезным для широкого класса явлений. Ответ гласит: «Потому что классическая теория является предельным случаем новой». В самом деле, обычно мы имеем дело с «адиабатическим» состоянием, т. е. с таким предельным состоянием, при котором воздействие внешней силы (или взаимодействие отдельных частей системы друг с другом) проявляется чрезвычайно медленно. Тогда с очень высокой степенью приближения можно считать, что

$$c_1^2 = 1, \quad c_2^2 = 0, \quad c_3^2 = 0, \ldots$$

Это означает, что вероятность перехода равна нулю и что система остается в начальном состоянии — после того, как ее возмущение прекращается. Поэтому такое медленное возмущение обратимо, как и полагается в классике. Это суждение можно распространить и на тот случай, когда конечное состояние системы оказывается находящимся в условиях, отличающихся от начальных; таким образом, состояние изменяется адиабатически, и переходы при этом не имеют места. Но это и есть тот предельный случай, которым занимается классическая механика.

Вопрос о том, сохранятся ли эти понятия всегда, остается, конечно, пока открытым. Задача о столкновениях с их помощью получила квантовомеханическую формулировку, причем результат оказался в полном соответствии с экспериментом. В данном случае мы имели точную интерпретацию как раз тех наблюдений, которые можно рассматривать как наиболее непосредственное доказательство квантовой структуры энергии. Мы имеем здесь в виду критические потенциалы, которые впервые наблюдались Франком и Герцем. Эти внезапно возникающие по мере роста скорости электронов возбужденные состояния, наблюдаемые в случае атомно-электронных столкновений, непосредственно предсказываются теорией. Теория, более того, дает общие формулы для распределения электронов по различным углам отклонения, характерным образом отличающиеся от тех, которые можно ожидать на основе классической теории. Впервые это было подчеркнуто Эльзассером [3] еще до того, как была развита общая теория. Он исходил из дебройлевской идеи о том, что движение частиц сопровождается волнами, частота и длина которых определяются энергией и импульсом частицы. Эльзассер рассчитал длину волны медленных электронов и нашел, что она равна по порядку величины 10^{-8} *см*, т. е. сравнима с атомными радиусами. Отсюда он заключил, что столкновение электрона с атомом приведет к дифракции дебройлевских волн — подобно тому, как это имеет место в случае рассеяния света на маленьких частицах. Флуктуации интенсивности в различных направлениях будут тогда представлять нерегулярность в распределении отраженных электронов. Этот эффект был наблюден в экспериментах Девиссона и Кунсмана [4] по отражению электронов от металлических поверхностей. Полное подтверждение этой радикальной гипотезы было получено в опытах Даймонда по столкновению электронов с атомами гелия [5].

К сожалению, современное состояние квантовой механики позволяет дать лишь качественное описание этих явлений; для полного их расчета необходимо решить проблему атома гелия. Представляется особенно важным объяснить упомянутые выше эксперименты Резерфорда и его сотрудников по рассеянию α-частиц, поскольку в этом случае мы имеем дело с простым и полностью известным механизмом взаимодействия двух заряженных частиц. Классическая формула, выведенная Резерфордом на основе рассмотрения гиперболических орбит частиц, экспериментально подтверждена в очень широких пределах. Однако недавно Блеккет обнаружил отклонения от этого закона в столкновениях между α-частицами и легкими атомами и предположил, что это также может быть приписано дифракционным эффектам, связанным с волнами де Бройля. В настоящее время выяснен лишь предварительный вопрос о том, может ли быть выведена классическая формула в качестве предельного случая формулы квантовомеханической. Г. Венцель [6] показал, что это как раз имеет

---

[3] Naturwiss., 1925, **13**, S. 711.
[4] Phys. Rev., 1923, **22**, p. 243.
[5] Nature, June, 1925, **13**, p. 910.
[6] Zs. f. Physik, 1926, **40**, p. 590.

место. Более того, пишущий эти строки довел до конца расчет для случая столкновения электронов с атомом водорода и получил формулы, которые одновременно представляют соударения частиц любой энергии (от медленных электронов до быстрых α-частиц). Это сделано пока что лишь в первом приближении; более детальный расчет особенностей явления дифракции отсутствует. Указанный расчет, таким образом, дает одновременно как резерфордовскую формулу для отклонения α-частиц, так и выражение поперечного сечения атома водорода для столкновений с электроном в области энергий, подробно изученной Ленардом. Такой же метод дает возможность рассчитать вероятность возбуждения атома водорода за счет электронного соударения, однако сами расчеты еще не закончены.

Для теории имело бы решающее значение, если б с ее помощью оказалось возможным получить высшие приближения и выяснить, дает ли она объяснение для отклонений от формулы Резерфорда.

Но даже если эти идеи выдержат опытную проверку, все же это не будет означать, что они являются окончательной истиной в каком бы то ни было смысле. Даже сейчас мы можем утверждать, что они в очень сильной степени зависят от обычных определений пространства и времени. Формальная квантовая теория является гораздо более гибкой и поддающейся общим интерпретациям. Возможно, например, смешать координаты и импульсы с помощью канонического преобразования и таким образом прийти к совершенно различным по форме системам, с совершенно разными ψ-функциями. Но фундаментальная идея о волнах вероятности будет, по-видимому, сохранена в той или иной ее форме[7].

1927

---

[7] Ср. со статьей П. Иордана «Философские основания квантовой теории», которая будет опубликована в следующем номере «Nature» (1927 г.).

НЕПРЕРЫВНОСТЬ, ДЕТЕРМИНИЗМ, РЕАЛЬНОСТЬ [141]

Введение

Нижеследующие соображения представляют собой попытку обсудить с помощью простых, почти тривиальных примеров старые, освященные временем понятия непрерывности, детерминизма и реальности. На определенной стадии своего развития теоретическая физика, идя своим собственным путем, была вынуждена отказаться от значительной части традиционных философских идей и заменить их новыми. Тем не менее ряд ведущих физиков — в том числе Эйнштейн [1*] [1], де Бройль [2*] и Шредингер [3*]— не приняли нового способа мышления. Поэтому подробный анализ философской ситуации в современной физике, по-видимому, не будет излишним.

Свои возражения против современной интерпретации квантовой механики Эйнштейн формулировал неоднократно, причем не в довольно расплывчатых философских терминах, а на основе простых модельных примеров. Тот же метод будет использован и здесь. Обсуждаемая ниже модель в своих основных чертах похожа на эйнштейновскую [4*]. Она дает возможность проиллюстрировать абстрактные философские идеи с помощью довольно элементарных геометрических соображений. Это, конечно, не обеспечивает получения прямого ответа на метафизические вопросы, но зато сводит их к четко различимым альтернативам, помогая, таким образом, прояснить логическую ситуацию.

ЧАСТЬ 1. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

1. Непрерывность

Я утверждаю, что математическое понятие точки континуума не имеет непосредственного физического смысла. Так, например, не имеет смысла говорить, что координа-

---

[1] Цифра со звездочкой указывает номер в списке литературы, помещенном в конце статьи (с. 187).— *Прим. ред.*

та x точечной массы (или центра масс протяженного тела) имеет величину, представленную в некоторых заданных единицах действительным числом, скажем, $x = \sqrt{2}$ дюймов или $x = \pi$ *см*.

Современная физика достигла своих крупнейших успехов в немалой степени с помощью применения методологического принципа, согласно которому понятия, относящиеся к различиям за пределами возможного опыта, не имеют физического смысла и должны быть элиминированы. Этот принцип не раз применялся в физике начиная со времен Ньютона. Наиболее замечательными примерами успешного использования этого принципа являются обоснование Эйнштейном специальной теории относительности путем отказа от понятия эфира — субстанции, находящейся в состоянии абсолютного покоя, а также обоснование Гейзенбергом квантовой механики, базирующееся на элиминации из картины строения атома радиусов и частот обращения электронов вокруг ядра. Я полагаю, что этот принцип следует применить и к идее физической непрерывности. Рассмотрим, например, утверждение: $x = \pi$ см. Если π_n является аппроксимацией числа π, его первыми n десятичными знаками, то разность $\pi_n - \pi_m$ для достаточно больших значений n и m становится меньше точности любого возможного измерения, если даже допустить, что эта точность может быть неограниченно улучшена с течением времени.

Поэтому утверждения приведенного выше типа должны быть исключены из физики.

Это, конечно, не следует понимать так, что я отвергаю математическое понятие действительного числа, которое незаменимо для нужд прикладного анализа. Ситуация, таким образом, требует описания неточно определенных физических величин с помощью действительных чисел.

Наиболее подходящие средства для такого рода описания доставляет понятие вероятности. Разумно допустить, что имеют смысл утверждения, подобные следующему: «вероятность того, что физическая величина принимает значение в пределах некоторого заданного (с помощью двух действительных чисел) интервала, имеет, в свою очередь, определенное значение (также выраженное действительным числом)». Иными словами, для любой физической величины x существует плотность вероятности $P(x)$.

Такой способ мышления принят, в частности, в квантовой механике в качестве общего. Однако на самом деле он имеет более фундаментальное значение, несмотря на то, что в явном виде он присущ только квантовой механике. Но его следует применить также и к классической механике.

2. Детерминизм

Классическая механика со времен Ньютона уходит своими корнями в астрономию, главной целью которой было предсказание положений небесных тел. Благодаря этому детерминистский характер механических законов наиболее выпукло выражен в традиционных изложениях. Однако, если механика применяется к описанию микроявлений, смысл термина «детерминизм» требует несколько более глубокого анализа. Механические законы обладают тем свойством, что точно заданное начальное состояние (конфигурация и скорости) однозначно и точно определяет конечное состояние для любого момента времени. Далее здесь существуют две возможности: либо малое изменение параметров, характеризующих начальное состояние (малое по сравнению с характеристиками системы), вызовет также малые изменения параметров конечного состояния для всех последующих моментов времени — в таком случае траектория, определяемая начальными условиями, является устойчивой. Либо это не так — отклонения неограниченно возрастают с течением времени, тогда траектория является неустойчивой.

В астрономии имеется много работ, доказывающих устойчивость нашей планетной системы. Для нашей цели, однако, результаты этих исследований не имеют большого значения. Более важно то, что существуют простые механические системы знакомого для атомной физики типа (кинетическая теория газов), для которых все траектории являются неустойчивыми. Эти системы обнаруживают, следовательно, то, что я бы хотел назвать слабым детерминизмом. Будущее состояние для таких систем можно точно предсказать лишь в том случае, если их начальное состояние задано абсолютно точно — в смысле математического понятия точки континуума. Малейшее отклонение от начальных условий приводит к возрастающей с течением времени неопределенности конечного состояния. Таким образом, для таких слабо детерминированных систем существует тесная связь между проблемами непрерывности и детерминизма. Если точка континуума не имеет физического смысла, то невозможно утверждать, что системы такого типа ведут себя детерминистски предсказуемым способом. Поэтому для довольно широкого класса механических систем традиционную форму изложения классической механики следует заменить статистической, которая с самого начала использует понятие вероятности: для любой координаты x, скорости v и момента времени t существует плотность вероятности $P\ (x,\ v,\ t)$.

Простейшим примером системы такого типа служит модель, предложенная Эйнштейном для существенно иных целей, а именно, для того, чтобы продемонстрировать неполноту квантовой механики (к этому вопросу я еще вернусь ниже). Это — модель одномерного одночастичного газа: точечной массы, движущейся по прямой линии (по оси x) туда и обратно между двумя точками ($x = 0$ и $x = l$), в которых она упруго отражается [2]. График этого движения представляет собой зигзагообразную линию, построенную на базе отрезка $0 < x < l$ с меняющим знак постоянным наклоном $\pm v_0$, где v_0 — начальная скорость частицы. Путем использования метода отображений графика на граничных линиях отрезка получен рис. 1, симметричный относительно вертикальных линий $x = kl\,(k = 0, \pm 1, \pm 2,\ldots)$ с периодом $2l$. Зигзагообразное движение, следовательно, эквивалентно двум семействам параллельных синхронизированных прямолинейных движений. Очевидно, что для любого t $x(t)$ однозначно определяется с помощью $x_0 = x(0)$ и v_0.

Однако если x_0 и v_0 заданы с точностью Δx_0 и Δv_0, то получается график, изображенный на рис. 2, который показывает, что Δx растет пропорционально t: $\Delta x = \pm t\Delta v_0$. По истечении времени $t_c = l/\Delta v_0$ изменение Δx становится больше, чем весь отрезок допустимых значений для x. Поэтому система является полностью

---

[2] Если допущения о непротяженной точечной массе и абсолютной упругости отражающих стенок покажутся слишком нереалистичными, можно рассмотреть движение центра масс конечного тела в промежутке между очень высокими и крутыми потенциальными стенками, расположенными при $x = 0$ и $x = l$.

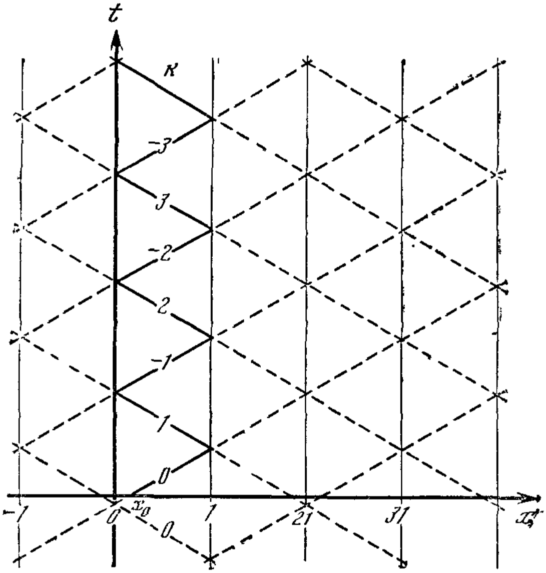

Рис. 1.

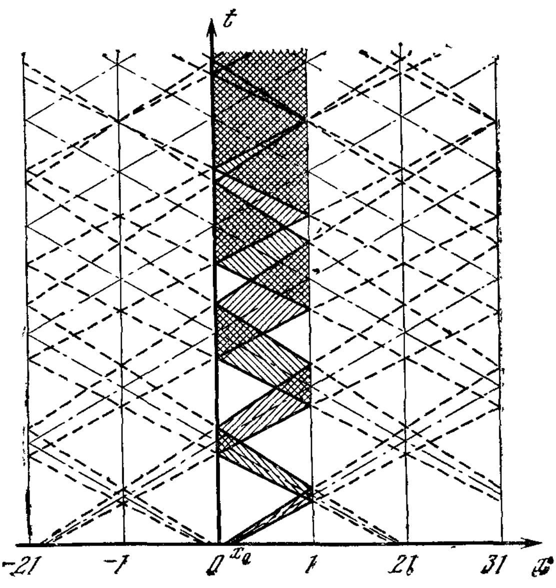

Рис. 2.

неустойчивой и ведет себя при $t > t_c$ индетерминистским способом.

Несмотря на то, что изложенные соображения довольно тривиальны, я нигде не встречал указаний на них [3].

3. Реальность

Вопрос о том, какой смысл мы вкладываем в выражение «физическая реальность», тесно связан с предыдущими соображениями о непрерывности и детерминизме. В статье [4*] Эйнштейн следующим образом описывает программу, которая была общепринятой в физике вплоть до возникновения квантовой механики: «Все должно сводиться к мысленным пространственно-временны́м объектам и к закономерным связям между этими объектами. В таком описании нет ничего, что было бы связано с эмпирическими знаниями об этих объектах. Например, Луне в каждый данный момент времени приписывается положение в пространстве (относительно некоторой системы координат), независимо от того, наблюдается это положение или нет. Этот способ описания и подразумевают, когда говорят о физическом описании «реального внешнего мира...» Далее Эйнштейн ставит и обсуждает вопрос, приводит ли квантовая механика к такому описанию поведения макроскопических тел, которое соответствует этой программе, и дает на него отрицательный ответ. Он рассматривает обсуждавшуюся выше модель одномерного одночастичного газа и сравнивает классическое движение с достаточно точно заданными начальными положением и скоростью со специальным решением уравнения Шредингера

$$\psi = Ae^{iat} \sin bx = \frac{1}{2i} Ae^{i(at+bx)} - \frac{1}{2i} Ae^{i(at-bx)}, \tag{1}$$

где a и b означают надлежащим образом выбранные постоянные. Это решение изображает состояние, в котором импульс частицы имеет любую из двух равных по

[3] Для неограниченного прямолинейного движения вопрос о его устойчивости не имеет смысла, так как не существует характерного размера области (как l в модели Эйнштейна), с которым сравнивается Δx. Обычная трактовка механического детерминизма упускает из вида существенную роль конечности области движения.

абсолютной величине, но противоположных по знаку значений, а вероятность для координаты постоянна при очень больших значениях импульса с точностью до короткопериодических вариаций.

Далее Эйнштейн продолжает: «Действительно, в случае макросистемы мы уверены, что она в каждый момент времени находится в «реальном состоянии», правильно (приближенно) описываемом классической механикой. Следовательно, отдельная макросистема рассматриваемого нами типа в каждый момент времени имеет почти определенную координату центра тяжести и — по крайней мере усредненный по малому промежутку времени — почти определенный импульс (имеющий также определенный знак). Ни одно из этих двух значений нельзя получить из ψ-функции (1). Из нее можно получить (с помощью статистической интерпретации Борна) только такие результаты, которые относятся к *статистическому ансамблю* систем рассматриваемого типа». И несколькими строками ниже он заключает: «Квантовая механика описывает ансамбль систем, но не отдельные системы. В этом смысле описание отдельной системы с помощью ψ-функции является неполным; ψ-функция не описывает реальное состояние такой системы».

Представляется, однако, что соображения Эйнштейна в том виде, как они приведены выше, не являются убедительными. Волновая функция ψ, выбранная Эйнштейном, представляет собой весьма специальное решение волнового уравнения, причем не соответствующее начальным условиям. Поэтому она не подходит для разрешения вопроса о способности квантовой механики описывать отдельное макротело «реалистическим» способом, как это делает классическая механика, или квантовая механика может иметь дело только со статистическими ансамблями. Более детально этот вопрос будет рассмотрен во второй части статьи. Здесь же мы обсудим другое положение, неявно содержащееся как в цитировавшейся выше работе Эйнштейна, так, очевидно, и в его мышлении [4].

В предыдущих разделах я показал, что точному значению координаты нельзя приписать физического смысла,

---

[4] Я приношу благодарность профессору В. Паули, разъяснившему мне в ряде писем сущность эйнштейновских идей, которую он понял в ходе устных дискуссий с Эйнштейном в Принстоне, а также за его собственные комментарии.

и, следовательно, описание положения в модели Эйнштейна должно быть задано несколько расплывчато, но зато реалистически с помощью плотности вероятности $P(x)$. В дополнение к этому законы классической механики следует сформулировать не в терминах траекторий, а на основе зависящей от времени плотности вероятности $P(x, v, t)$. Если это проделать, то классическая механика в действительности станет относящейся не к отдельной системе, а к статистическому ансамблю, так что изложенная выше критика Эйнштейна в адрес квантовой механики в ее буквальном смысле станет несостоятельной, поскольку она в точности таким же способом окажется применимой и к классической механике в новом одеянии. То, что имел в виду Эйнштейн, можно понять из следующих слов его статьи: «То обстоятельство, что для рассматриваемой системы не всякая ψ-функция, удовлетворяющая уравнению Шредингера, приближенно соответствует реальному описанию в смысле классической механики, особенно четко проявляется при рассмотрении ψ-функции, являющейся суперпозицией двух решений типа (1) с частотами (или энергиями), существенно отличающимися друг от друга. В самом деле, такой суперпозиции вообще не соответствует ни один реальный случай в классической механике (она соответствует статистическому ансамблю таких реальных случаев в духе интерпретации Борна)».

Согласно определению Эйнштейна, классическая механика, сформулированная статистически (а так ее и следует формулировать), продолжает оставаться описанием реальности, поскольку в ней можно мыслить существующим точное состояние отдельной частицы, хотя наблюдать его с математически требуемой точностью нельзя. Физическая неопределенность затем может быть введена путем применения обычных законов вероятности. Например, можно мыслить частицу находящейся на прямой линии в точке x_1, вводя затем физическую ситуацию «мы знаем, что частица находится вблизи точки x_1» с помощью плотности вероятности $p(x - x_1)$. Функция $p(x)$ отлична от нуля лишь в малой окрестности точки x_1. Для случая, когда мы знаем только, что частица находится либо вблизи x_1, либо вблизи x_2, плотность вероятности имеет вид

$$P(x) = a_1 p(x - x_1) + a_2 p(x - x_2), \quad a_1 + a_2 = 1, \tag{2}$$

согласно обычным правилам вычисления вероятностей.

В квантовой механике ситуация, однако, отличается от этой. Если $\varphi(x - x_1)$ — функция Шредингера, описывающая частицу, находящуюся вблизи x_1, то соответствующая плотность вероятности равна $p(x - x_1) = |\varphi(x - x_1)|^2$. Если мы знаем, что частица находится либо вблизи x_1, либо вблизи x_2, то эта ситуация описывается функцией Шредингера $\psi(x) = c_1\varphi(x - x_1) + c_2\varphi(x - x_2)$, плотность вероятности для которой имеет вид

$$P(x) = |\psi(x)|^2 = a_1 p(x - x_1) + a_2 p(x - x_2) + I(x),$$
$$a_1 = |c_1|^2, \quad a_2 = |c_2|^2, \tag{3}$$

где дополнительный член

$$I(x) = c_1 c_2^* \varphi(x - x_1)\varphi^*(x - x_2) + \\ + c_1^* c_2 \varphi^*(x - x_1)\varphi(x - x_2) \tag{4}$$

описывает «интерференцию вероятностей». Он не имеет классического аналога. Даже в том случае, когда им практически можно пренебречь при $t = 0$, он может получить заметную величину для определенных значений x в более поздние моменты времени.

Существование таких интерференционных явлений исключает возможность мыслить частицу имеющей определенную координату (и скорость) в любой момент времени и связывать эти координаты в образ траектории. Именно это обстоятельство послужило причиной того, что Эйнштейн объявил квантовую механику неполной[5]. Он настаивал, что, по крайней мере, для макротел теория не может считаться удовлетворительной, если она не согласуется с его представлением о реальности.

Взгляды Эйнштейна представляют собой философское убеждение, которое не может быть ни доказано, ни опровергнуто физическими аргументами. Единственное, что можно сделать в плане возражений этой точке зрения, это сформулировать другое понятие реальности, которое учитывает действительное существование интерференционных явлений в атомной области и переходит в обычное (которое принимается Эйнштейном) для макротел. Это я проделал систематическим, но довольно абстрактным спо-

---

[5] Эйнштейн обсуждал в этой связи идеи де Бройля, Бома, Шредингера и др., которые пытались различными способами интерпретировать формализм квантовой механики в терминах классических понятий, но отверг эти попытки как неудовлетворительные.

собом в другом месте [5*]. Я не буду повторять здесь изложенные там соображения, а только проиллюстрирую их с помощью использованной выше модели — частицы, осциллирующей на отрезке между двумя упруго отражающими стенками.

Главным моментом здесь является то, что физик должен иметь дело не с тем, что он может мыслить (или представлять), а с тем, что он может наблюдать. С этой точки зрения состояние системы в момент времени t, когда не проделывается никаких наблюдений, не может служить предметом рассмотрения. Но как только проделано наблюдение, то обнаруженная с его помощью ситуация рассматривается как конечное состояние явлений, определенное предварительно наблюденным начальным состоянием, а также (если имеются в виду будущие наблюдения) как начальное состояние для дальнейшего развития событий. Эта «редукция вероятности» присуща не только квантовой механике — ее следует применить также и к классической механике. Всякое наблюдение благодаря ограничению с его помощью предварительно предсказанной плотности вероятности «разрушает» ее и порождает новую, которая служит начальным состоянием для дальнейших предсказаний.

С этой точки зрения явления интерференции утрачивают значительную долю своего парадоксального характера. Для нашей одномерной модели проделанное наблюдение определяет не комплексные амплитуды $c_1 = \sqrt{a_1}e^{i\alpha_1}$, $c_2 = \sqrt{a_2}e^{i\alpha_2}$, а лишь вероятности (относительные частоты) $a_1 = |c_1|^2$, $a_2 = |c_2|^2$; фазы α_1 и α_2 остаются совершенно неизвестными и неопределенными, так что интерференционный член исчезает, если усреднить его по разности фаз $\alpha_1 - \alpha_2$. Для более сложных систем (например, оптических интерферометров) распределение в конечном состоянии может, конечно, дать интерференционные полосы, которые классическая теория объяснить не в состоянии. Однако это демонстрирует только лишь парадоксальную форму традиционной (эйнштейновской) точки зрения, где ненаблюдаемое промежуточное состояние считается таким же реальным, как действительно наблюденное конечное состояние.

Ситуация может быть уточнена путем детального математического обсуждения нашей модели. Это будет сделано во второй части нашей статьи.

Модель, рассматриваемая ниже более детально, по-видимому, представляет собой простейшую механическую систему с конечным числом переменных (координата и скорость), для которой может быть получено точное решение. По сути дела, ее гамильтониан имеет только кинетическую часть, так как потенциальная энергия, обусловленная отражением от стенок, может быть заменена определенными граничными условиями. Уравнения движения тогда поддаются решению как в классическом, так и в квантовом приближении с помощью кельвиновского метода отображений. Итоговые формулы имеют простой вид и хорошо подходят для обсуждения ряда важных проблем: перехода от первоначального индивидуального к конечному статистическому способу описания, характерных различий классического и квантового подходов, редукции вероятности посредством наблюдения и интерференции вероятностей.

1. Классическое рассмотрение одномерного одночастичного газа

В модели Эйнштейна траектория частицы, начинающей двигаться при $t = 0$ из точки $x = x_0$ со скоростью $v = v_0$, аналитически задается с помощью выражения

$$x = 2lk - x_0 - v_0 t, \qquad t_{2k-1} \leqslant t \leqslant t_{2k}, \tag{1.1}$$
$$x = -2lk + x_0 + v_0 t; \qquad t_{2k} \leqslant t \leqslant t_{2k+1},$$

где

$$t_k = \frac{kl - x_0}{v_0}; \quad k = 0, \ \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.2}$$

Удобно (см. рис. 1) заменить одночастичную систему периодической, состоящей из бесконечного числа синхронно движущихся частиц, освободившись от условий $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$, неявно подразумеваемых в (1.1) Эта процедура для краткости будет называться «периодическим продолжением». Согласно программе, изложенной в части I, «детерминистское» описание (1.1), (1.2) следует заменить статистическим, основанным на плотности вероятности $P(x, v, t)$. После этого нам придется иметь дело с тем случаем статистической механики, где система не находится в статистическом равновесии, а развивается во времени из заданного начального распределения $P(x, v, 0)$. Единственное условие, налагаемое на $P(x, v, t)$, выражает требование сохранения вероятности; оно следует из теоремы Лиувилля

$$\frac{\partial P}{\partial t} + [P, H] = 0, \tag{1.3}$$

где $H(x, p)$ — гамильтониан, являющийся функцией координаты и импульса, а

$$[P, H] = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial x} \tag{1.4}$$

— скобки Пуассона.

Гамильтониан H состоит из кинетической энергии $p^2/2m$ и потенциальной энергии, представляющей собой отражательные силы на стенках. Так как эти силы, по предположению, бесконечно велики, их можно заменить определенными условиями периодичности, которые сейчас будут выведены. Заметим предварительно, что с учетом $H = p^2/2m$ и $p = mv$ (1.4) примет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} v = 0. \tag{1.5}$$

Условия периодичности получаются из того соображения, что решение должно иметь то же самое значение в данной точке x (в промежутке $0 \leqslant x \leqslant l$) после каждого отражения. Например, после первого отражения при $x = 0$ имеем

$$P(x, v, t) = P\left(x, -v, t - \frac{2x}{v}\right), \tag{1.6a}$$

а после двух отражений при $x = 0$ и $x = l$

$$P(x, v, t) = P\left(x, v, t + \frac{2l}{v}\right). \tag{1.6б}$$

Общее решение уравнения (1.5) имеет вид

$$P(x, v, t) = f(x - vt, v), \tag{1.7}$$

где $f(x, v)$ — произвольная функция двух аргументов, определенная для всех значений $-\infty < x, v < \infty$, которая представляет начальное состояние в виде

$$P(x, v, 0) = f(x, v). \tag{1.8}$$

Условие (1.6б) приводит к

$$f(x - vt, v) = f(x - vt - 2l, v),$$

а (1.6а) — к

$$f(x - vt, v) = f(-x + vt, -v).$$

Первое из этих условий показывает, что $f(x. v)$ периодична по x с периодом $2l$:

$$f(x, v) = f(x + 2l, v), \tag{1,9а}$$

второе — что она периодична по отношению к инверсии:

$$f(x, v) = f(-x, -v). \tag{1.9б}$$

Эти два условия периодичности определяют периодическое продолжение $P(x, v, t)$.

Случай частицы, имеющей при $t = 0$ почти точную координату x_0 и фиксированную скорость, представляет особенный интерес. Чтобы описать его простым образом, мы введем функцию $\varphi(x, v)$, отличную от нуля лишь в окрестности $x = 0$, $v = 0$. Допустим, что φ нормирована, тогда среднее значение произвольной функции $q(x, v)$ определится с помощью

$$\overline{q} = \int_0^l \int_{-\infty}^{\infty} q(x, v)\, \varphi(x, v)\, dx dv, \quad \int_0^l \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, v)\, dx dv = 1. \tag{1.10}$$

Постулируем, кроме этого, что

$$\overline{x} = 0, \ \overline{v} = 0, \ \overline{x^2} = \sigma_0^2, \ \overline{v^2} = \tau_0^2, \tag{1.11}$$

где $\sigma_0 \ll l$, $\tau_0 \ll v_0$.

Тогда функция

$$f(x, v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\varphi(2kl + x - x_0, v - v_0) + \varphi(2kl - \\ - x - x_0, - v - v_0)\} \tag{1.12}$$

будет обладать всеми требуемыми свойствами: она удовлетворяет (1.9а) и (1.9б), имея в промежутке $0 < x < l$ только один острый максимум, соответствующий первому члену ($k = 0$), так как максимум второго члена при $-x_0 + 2kl$ находится вне указанного промежутка для всех $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Отсюда плотность вероятности согласно (1.7) имеет вид

$$P(x, v, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\varphi(2kl + x - x_0 - vt, v - v_0) + \varphi(2kl - x - x_0 + vt, v - v_0)\}. \tag{1.13}$$

Она требуемым образом нормирована, так как

$$\int_0^l \int_{-\infty}^{\infty} P(x, v, t)\, dx dv = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \left[\int_{2kl-x_0-(v_0+\eta)t}^{(2k+1)l-x_0-(v_0+\eta)t} \varphi(\xi, \eta) d\xi - \int_{2kl-x_0-(v_0+\eta)t}^{(2k-1)l-x_0-(v_0+\eta)t} \varphi(\xi, \eta) d\xi \right] = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \eta)\, d\xi = 1 \tag{1.13a}$$

в силу (1.10).

Если $\varphi(x, v)$ выбрана в виде δ-функции Дирака, т. е. $\sigma_0 = 0$, $\tau_0 = 0$, то функция (1.13) равна нулю всюду, кроме точек, которые удовлетворяют уравнениям (1.1) и (1.2). Однако этот предельный случай не соответствует реальной физической ситуации. Мы должны рассматривать σ_0 и τ_0 как конечные величины.

Интегрируя (1.13) по v, можно получить пространственное распределение

$$P(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x, v, t)\, dv = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{\varphi(2kl + x - x_0 - (v_0 + \eta)t, \eta) + \varphi(2kl - x - x_0 - (v_0 + \eta)t, \eta)\}\, d\eta, \tag{1.14}$$

а интегрирование (1.13) по x от нуля до l дает распределение скоростей

$$P(v, t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x, v, t)\, dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{2kl - x_0 - vt}^{(2k+1)l - x_0 - vt} \varphi(\xi, v - v_0)\, d\xi - \int_{2kl - x_0 + vt}^{(2k-1)l - x_0 + vt} \varphi(\xi, -v - v_0)\, d\xi \right\}. \tag{1.15}$$

Эти две формулы являются аналитическим выражением того факта, что при каждом отражении скорость меняет знак. Распределение абсолютных величин скорости представляет собой, очевидно, не что иное, как вероятность того, что скорость равна либо v, либо $-v$, поэтому

$$P(|v|,\ t) = P(v,\ t) + P(-v,\ t). \tag{1.16}$$

Эта величина, как легко усмотреть из (1.15), не зависит от времени. Этого следовало ожидать, ибо два слагаемых (1.16) дают вклад в сумму (1.15) в виде членов, которые в интервале $-\infty, \infty$ можно скомбинировать в интегралы

$$P(|v|,\ t) = P(|v|) = \int_{-\infty}^{\infty} \{\varphi(\xi,\ v - v_0) + \varphi(\xi,\ -v - v_0)\}\, d\xi. \tag{1.17}$$

В качестве примера, для которого все вычисления можно провести в деталях, можно взять $\varphi(x,\ v)$в виде гауссовой функции по обоим аргументам

$$\varphi(x,\ v) = \frac{1}{2\pi\sigma_0\tau_0} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2} - \frac{v^2}{2\tau_0^2}}. \tag{1.18}$$

Тогда уравнения (1.11), очевидно, удовлетворяются, а (1.13) принимает вид

$$P(x,\ v,\ t) = \frac{1}{2\pi\sigma_0\tau_0}\left\{e^{-\frac{(v-v_0)^2}{2\tau_0^2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(2kl + x - x_0 - vt)^2} + \right.$$
$$\left. + e^{-\frac{(v+v_0)^2}{2\tau_0^2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(2kl - x - x_0 - vt)^2}\right\}. \tag{1.19}$$

Уравнение (1.14) при этом запишется в виде

$$P(x,\ t) = \frac{1}{\sigma(t)\sqrt{2\pi}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{(2kl + x - x_0 - vt)^2}{2[\sigma(t)]^2}} + \right.$$
$$\left. + e^{-\frac{(2kl - x - x_0 - v_0 t)^2}{2[\sigma(t)]^2}} \right\}, \tag{1.20}$$

где

$$\sigma(t) = \sqrt{\sigma_0^2 + \tau_0^2 t^2}\,. \tag{1.21}$$

Если теперь вычислить средние x, x^2 и $(\Delta x)^2 = (x_0 - x)^2$ с помощью распределения (1.20), то $\bar{x}$ окажется совпадающим с выражениями (1.1) и (1.2). Кроме этого,

$$\overline{(\Delta x)^2} = [\sigma(t)]^2. \tag{1.22}$$

Отсюда видно, что ширина распределения увеличивается с течением времени и становится равной всему промежутку l в критический момент

$$t_c = \frac{1}{\tau_0}\sqrt{l^2 - \sigma_0^2}. \tag{1.23}$$

Если $\sigma_0 \ll l$, то приближенно $t_c \sim l/\tau_0$ — величине, использованной в части I. Для малых τ_0 время t_c очень велико, но всегда конечно.

Теперь можно показать, что для $t \to \infty$, $P(x, t)$ становится постоянной, не зависящей от x и t. Для очень больших t имеем $\sigma(t) \to \tau_0 t$ и (1.20) сводится к выражению

$$P(x, t) \to \frac{1}{\tau_0 t\sqrt{2\pi}} \cdot 2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\tau_0^2}\left(\frac{2lk}{t} - v_0\right)^2}.$$

Если положить $2lk/t - v_0 = \eta$, то приращению $\Delta k = 1$ будет соответствовать $\Delta\eta = 2l/t$, которое при $t \to \infty$ стремится к нулю. Поэтому сумма переходит в интеграл

$$P(x, t) \to \frac{1}{\tau_0\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{l}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2\tau_0^2}}\,d\eta = \frac{1}{l}, \tag{1.24}$$

который представляет собой надлежащим образом нормированную «геометрическую» вероятность нахождения частицы где-нибудь в промежутке длины l.

Существенно, что при $t \to \infty$ распределение не является распределением для идеального газа, отличаясь от него в части распределения по скоростям. Действительно, из (1.17) и (1.18) получаем, что

$$P(|v|) \to \frac{1}{\tau_0\sqrt{2\pi}}\left\{e^{-\frac{(v-v_0)^2}{2\tau_0^2}} + e^{-\frac{(v+v_0)^2}{2\tau_0^2}}\right\}, \tag{1.25}$$

что представляет собой наложение двух гауссовых распределений со средними скоростями $\pm v_0$, а не распределение Максвелла.

Итак, в результате проведенного выше рассмотрения можно сказать, что движение, которое начинается как движение практически индивидуальной частицы, с течением времени переходит в такое состояние, где координата становится совершенно неопределенной, в то время как величина скорости остается неизменной, но зато ее направление теряет определенность.

Вопрос о том, как надо модифицировать нашу модель, чтобы результирующее состояние представляло собой идеальный газ, здесь рассматриваться не будет. Очевидно, что для этого необходимо наличие какого-то механизма, обеспечивающего обмен скоростями между несколькими движущимися объектами. Как мне представляется, для этого достаточно заменить одну из упруго отражающих стенок моделью теплового резервуара (тяжелого тела с максвелловским распределением по энергии), который мог бы обмениваться энергией и импульсом с частицей при каждом столкновении.

2. Квантовая механика одномерного одночастичного газа

Чтобы рассмотреть ту же проблему квантовомеханически, необходимо решить зависящее от времени уравнение Шредингера для волновой функции $\psi(x, t)$:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\hbar i\frac{\partial\psi}{\partial t}=0 \tag{2.1}$$

с граничными условиями

$$\psi(0, t)=0, \qquad \psi(l, t)=0. \tag{2.2}$$

Для решения такого уравнения существуют два стандартных метода — метод Д'Аламбера и метод Фурье. Для данного случая более предпочтительным является решение Д'Аламбера, так как оно приводит к результатам, легко сравнимым с результатами классического рассмотрения. После этого весьма просто осуществить разложение в ряды Фурье.

В одной из своих книг [6*] де Бройль [6] дал решение уравнения (2.1) без учета граничных условий, соответствующее произвольным начальным значениям для $f(x)$. Оно имеет вид

$$\psi(x,\ t)=\left(\frac{-im}{2\pi\hbar t}\right)^{\frac{1}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{\frac{im}{2\hbar t}(x-\xi)^2}\, d\xi. \tag{2.3}$$

Это можно проверить простым вычислением — подставить (2.3) в (2.1) и показать, что $\psi(x,\ t)\to f(x)$ при $t\to 0$. Тогда, следуя Дарвину, в качестве $f(x)$ можно взять функцию вида

$$f(x)=\left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\left|-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma_0^2}+\frac{i}{\hbar}mv_0(x-x_0)\right.}, \tag{2.4}$$

которая представляет собой гармоническую волну с импульсом mv_0, модулированную гауссовой функцией, имеющей максимум при $x=x_0$ и обладающей шириной $\sigma_0\sqrt{2}$. Вероятность обнаружения частицы нормирована:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 = 1. \tag{2.5}$$

Математические ожидания координаты, импульса и их средние квадратичные отклонения имеют соответственно вид

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}&=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xff^*\,dx = x_0,\\ \bar{p}&=-\hbar i\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^*\frac{df}{dx}\,dx = mv_0;\end{aligned}\right\} \tag{2.6а}$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{(\Delta x)^2}&=\int x^2 ff^*\,dx - x_0^2=\sigma_0^2,\\ \overline{(\Delta p)^2}&=\hbar^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^*\frac{d^2 f}{dx^2}\,dx - m^2v_0^2=\frac{\hbar^2}{4\sigma_0^2}.\end{aligned}\right\} \tag{2.6б}$$

[6] Де Бройль в действительности рассматривал трехмерный случай.

Если ввести неопределенность скорости

$$\tau_0 = \sqrt{\overline{(\Delta v)^2}} = \frac{1}{m}\sqrt{\overline{(\Delta p)^2}} = \frac{\hbar}{2\sigma_0 m}, \tag{2.7}$$

то будем иметь соотношение неопределенностей Гейзенберга

$$\sqrt{\overline{(\Delta x)^2}\,\overline{(\Delta p)^2}} = m\sigma_0\tau_0 = \frac{\hbar}{2}. \tag{2.8}$$

Подставляя (2.4) в (2.3) и выполняя интегрирование, после ряда преобразований получим

$$\psi(x, t) = \left(\frac{s(t)}{\sigma(t)\sqrt{2\pi}}\right)\exp\left\{-\left(\frac{x - x_0 - v_0 t}{2\sigma(t)}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{im}{2\hbar t}\left[\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2(t)}(x - x_0 - v_0 t)^2 - (x - x_0)^2\right]\right\}, \tag{2.9}$$

где

$$s(t) = \frac{\sigma_0 - i\tau_0 t}{\sigma(t)}; \qquad |s(t)|^2 = 1. \tag{2.10}$$

$\psi(x, t)$ представляет собой нормированную амплитуду вероятности в виде группы волн с пиком при x_0, движущейся со скоростью v_0 слева направо. Тогда $\psi(-x, t)$ соответствует группе волн с пиком, первоначально расположенным при $-x_0$, движущейся со скоростью $-v_0$ справа налево. Исследование (2.9) показывает, что изменение знака x эквивалентно изменению знаков x_0 и v_0.

Применяя метод отображений, построим функцию

$$\Psi(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\{\psi(2kl + x, t) - \psi(2kl - x, t)\}. \tag{2.11}$$

Эта функция, очевидно, периодична по x с периодом $2l$ и обращается в нуль при $x = 0$ и $x = l$. Если $t \to 0$, имеем приближенно $\sigma(t) \to \sigma_0$, $s(t) \to 1$, а

$$\Psi(x, 0) = \left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\left(\frac{2kl + x - x_0}{2\sigma_0}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{imv_0}{\hbar}(2kl + x - x_0)^2\right] -$$

$$- \exp\left[-\left(\frac{2kl - x - x_0}{2\sigma_0}\right)^2 + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{imv_0}{\hbar}(2kl - x - x_0)^2\right]\right\}. \tag{2.12}$$

Это можно кратко записать в виде

$$\Psi(x,\ 0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{f(2kl+x)-f(2kl-x)\},\tag{2.13}$$

где $f(x)$ — функция, определенная посредством (2.4). Отсюда видно, что начальное состояние состоит из двух групп волн, движущихся в разные стороны, причем обе группы являются модулированными. Модулирующие гауссовы функции имеют ширину σ_0 и пики, расположенные в точках x_0+2kl и $-x_0+2kl$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots)$ соответственно. Внутри промежутка $0\leqslant x\leqslant l$ обе эти волны эквивалентны одной волне с пиком, сначала расположенным при x_0, которая периодически отражается на границах $x=0$ и $x=l$. Таким образом, решение, которое мы получили, для малых σ_0 описывает многократно отражающуюся отдельную частицу со слегка неопределенным начальным положением.

Вероятность обнаружения частиц имеет вид

$$\begin{aligned}P(x,\ t)=\Psi\Psi^*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\ \sum_{k'=-\infty}^{\infty}\{\psi(2k'l+x,t)-\psi(2kl-x,t)\}\times\\ \times\{\psi^*(2kl+x,\ t)-\psi^*(2kl-x,\ t)\}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Каждый член вида $\psi(2kl+x,t)$, входящий в сумму, соответствует на рис. 1 линии, поднимающейся слева направо (плюс-линия), каждый член вида $\psi(2kl-x,\ t)$ — линии, поднимающейся справа налево (минус-линия). Соответственно четыре произведения, получаемые путем перемножения скобок в (2.14), можно расклассифицировать на три типа, так что полная вероятность разбивается на три части:

$$P(x,t)=P_c(x,\ t)+P_i(x,\ t)+P_r(x,\ t).\tag{2.15}$$

Для $k=k'$ члены $\psi(2kl+x,\ t)\ \psi^*(2kl+x,\ t)$ и $\psi(2kl-x,\ t)\ \psi^*(2kl-x,\ t)$ представляют собой суперпозицию гауссовой функции (плюс-линии) с самой собой и минус-линии — с ней самой. Они вносят в (2.15) вклад

$$\begin{aligned}P_c(x,\ t)=\frac{1}{\sigma(t)\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{e^{-\frac{(2kl+x-x_0-v_0t)^2}{2\sigma^2(t)}}+\\ +e^{-\frac{(2kl-x-x_0-v_0t)^2}{2\sigma^2(t)}}\},\end{aligned}\tag{2.16}$$

который идентичен вероятности (1.20), выведенной с помощью классической теории.

Остальные члены для $k = k'$, а именно, типа $-\psi(2kl + x, t)\psi^*(2kl - x, t)$ и $-\psi(2kl - x, t)\psi^*(2kl + x, t)$ соответствуют точкам пересечения плюс-линии с минус-линией того же номера. Все они находятся (см. рис. 1) на границе $x = 0$. Очевидно, что другая граница $x = l$, где $k' = k + 1$, дает вклад того же типа и такой же величины. Собирая эти члены, получим

$$P_i(x, t) = -\frac{2}{\sigma(t)\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{x^2 + (2kl - x_0 - v_0 t)^2}{2\sigma^2(t)}} \times \right.$$

$$\times \cos\frac{x}{\sigma_0 \tau_0 t}\left[\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2(t)}(2kl - x_0 - v_0 t) - 2kl + x_0\right] +$$

$$+ e^{-\frac{(l-x)^2 + (2kl - x_0 - v_0 t)^2}{2\sigma^2 t}} \times$$

$$\left. \times \cos\frac{l-x}{\sigma_0\tau_0 t}\left[\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2(t)}(-2kl - x_0 - v_0 t) - 2kl + x_0\right]\right\}. \tag{2.17}$$

Это выражение описывает интерференционные эффекты, обусловленные суперпозицией падающей и отраженной волн вблизи одной из граничных точек. Колебания, описываемые косинусоидальными членами, ограничены гауссовыми функциями вблизи границ на ширине $\sigma(t)$. При условии, что $\sigma_0 \ll l$, эти области долгое время ($t \ll t_c$) остаются узкими. Остальные члены при $k \neq k'$ соответствуют суперпозиции либо двух различных плюс-линий, либо двух различных минус-линий, либо точкам пересечения плюс-линий и минус-линий вне области $0 \leqslant x \leqslant l$. Если $\sigma(t) \ll l$, их вклад в вероятность $P_r(x, t)$ мал, и им можно пренебречь для $t \leqslant t_c$.

Как нетрудно видеть, существенная разница между квантовым и классическим рассмотрением имеет двоякий характер. Во-первых, в квантовом случае вблизи границ имеют место интерференционные эффекты, описываемые P_l, и, во-вторых, для квантового случая справедливо соотношение неопределенностей Гейзенберга, которое устанавливает зависимость между σ_0 и $\tau_0 (=\hbar/2m\sigma_0)$ и, таким образом, запрещает одновременное точное задание начальных значений координаты и скорости. Оба этих отличия играют существенную роль лишь для микрочастиц и пренебрежимо малы для макротел (вследствие большой массы m).

Теперь ясно, что всякий раз, когда можно пренебречь интерференционными членами, т. е. когда $\sigma_0 \ll l$, а $\tau_0 = \hbar/2m\sigma_0 \ll v_0$ или когда $\hbar/2mv_0 \ll \sigma_0 \ll l$, то $P(x, t)$ при $t \to 0$ стремится к постоянной величине $1/l$, как и в (1.24).

Теперь нам предстоит исследовать отношение решения для отдельной частицы, рассмотренное выше, к решению в терминах собственных состояний (которое использовал Эйнштейн для своих критических соображений). С этой целью разложим $\Psi(x, t)$ в ряд Фурье. Так как $\Psi(x, t)$ антисимметрична, можно написать

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{2.18}$$

где

$$A_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \Psi(x, t) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \tag{2.19}$$

Подставив (2.18) в дифференциальное уравнение (2.1), увидим, что $A_n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\hbar i \frac{\partial A_n(t)}{\partial t} - \left(\frac{\hbar n\pi}{l}\right)^2 \frac{1}{2m} A_n(t) = 0. \tag{2.20}$$

Учитывая, что $E = \hbar i \dfrac{\partial}{\partial t}$ — оператор энергии, будем иметь

$$A_n(t) = A_n e^{iE_n t/\hbar}, \tag{2.21}$$

где

$$E_n = \left(\frac{\pi n\hbar}{l}\right)^2 \cdot \frac{1}{2m} \tag{2.22}$$

— собственные значения энергии. Следовательно достаточно вычислить постоянные

$$A_n = A_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \Psi(x, 0) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \tag{2.23}$$

Подставляя сюда (2.13), получим

$$A_n = \frac{2}{l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^l f(2kl + x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx - \int_0^l f(2kl - x) \times \right.$$

$$\left. \times \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right\} = \frac{2}{l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2k-1}^{2k+1} f(x) \sin \frac{n\pi x}{e} dx.$$

Отсюда

$$A_n = \frac{2}{l} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \tag{2.24}$$

Это показывает, что коэффициенты Фурье функции $\Psi(x, 0)$ в интервале $0 \leqslant x \leqslant l$ являются фурье-преобразованиями функции $f(x)$ на интервале $-\infty < x < \infty$, взятыми в точках $n\pi/l$ взаимного пространства.

Отсюда легко следует, что $\Psi(x, t)$ нормирована для всех t:

$$\int_0^l \Psi\Psi^* dx = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} A_n A_{n'}^* e^{i(E_n - E_{n'})t/\hbar} \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \times$$

$$\times \sin \frac{n'\pi x}{l} dx = \frac{l}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1. \tag{2.25}$$

Подставляя в (2.24) вместо $f(x)$ выражение (2.4), получим

$$A_n = \frac{\sqrt{2}}{il} (\sigma_0 \sqrt{2\pi})^{\frac{1}{2}} \left\{ e^{-\left(\frac{v_0}{2\tau_0} + \frac{\pi\sigma_0 n}{l}\right)^2 + i\frac{\pi n x}{l}} - \right.$$

$$\left. - e^{-\left(\frac{v_0}{2\tau_0} - \frac{\pi\sigma_0 n}{l}\right)^2 - i\frac{\pi n x}{l}} \right\}. \tag{2.26}$$

Согласно (2.22) абсолютная величина импульса в состоянии n равна

$$p_n = \sqrt{2mE_n} = \frac{\pi\hbar n}{l}. \tag{2.27}$$

Отсюда, так как $\sigma_0\tau_0 = \hbar/2m$, можно записать (2.26) в виде

$$A_n = \frac{\sqrt{2}}{il}(\sigma_0\sqrt{2\pi})^{\frac{1}{2}}\left\{e^{-\frac{1}{4\tau_0^2}\left(v_0+\frac{p_n}{m}\right)^2+i\frac{x_0 p_n}{\hbar}} - \right.$$

$$\left. - e^{-\frac{1}{4\tau_0}\left(v_0-\frac{p_n}{m}\right)^2-i\frac{x_0 p_n}{\hbar}}\right\}. \qquad (2.28)$$

Учитывая, что $v_0 > 0$, так как в (2.18) $n = 1,2,\ldots$, p_n положительно, увидим, что лишь во втором члене экспонента может стремиться к нулю для

$$p_n \sim mv_0, \quad n_{\max} \sim \frac{mv_0 l}{\hbar\pi}, \quad E_{\max} \sim \frac{mv_0^2}{2}. \qquad (2.29)$$

Для этого $n_{\max}$ имеем

$$A_{\max} \sim i\frac{\sqrt{2}}{l}(\sigma_0\sqrt{2\pi})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{imv_0x_0}{\hbar}}, \qquad (2.30)$$

так что разложение (2.18) для малых τ_0 сводится к одному члену

$$\Psi(x, t) \sim i\frac{\sqrt{2}}{l}\left(\sigma_0\sqrt{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{imv_0x_0}{\hbar}} \sin\frac{mv_0x}{\hbar} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2l}}\left(\sigma_0\sqrt{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{e^{i\frac{mv_0}{\hbar}(x-x_0)} - e^{-i\frac{mv_0}{\hbar}(x+x_0)}\right\}, \qquad (2.31)$$

который представляет собой решение уравнения Шредингера, использованное Эйнштейном (см. (1) в части I) для того, чтобы продемонстрировать неполноту квантовой механики. Однако из только что проведенного рассмотрения следует, что это решение является приближенным. Точное решение имеет вид волнового пакета с коэффициентами (2.26) или (2.28). Оно полностью эквивалентно даламберову решению (2.11), которое отображает тот факт, что для ограниченного промежутка времени ($t < t_c$) квантовомеханическое движение частицы хорошо аппроксимируется классическим движением по траектории, т. е. индивидуализирующим описанием. Поэтому квантовая формула (2.31) и классическая формула (1.1) связаны непрерывным переходом, так что для макротел не имеет места парадоксальная ситуация, которую Эйнштейн считал существующей.

На нашей модели можно проиллюстрировать также и возражение Эйнштейна, основанное на интерференции вероятностей. Главным здесь является то обстоятельство, что к членам суммы (2.11) не следует добавлять фазовые множители вида $e^{i\alpha_k}$, поскольку такое добавление нарушает граничные условия периодичности. Все слагаемые этой суммы должны иметь одинаковую фазу, т. е. ко всей сумме можно добавить общий для всех слагаемых фазовый множитель $e^{i\alpha}$, исчезающий в выражении для вероятностей (2.14). Поэтому интерференционный член (2.17) действительно существует, и его нельзя ликвидировать простым усреднением по фазам. Он возникает в результате интерференции между падающей и отраженной волнами того же типа, как и в некоторых интерферометрических приборах (стоячие волны).

Теперь можно обсудить квантовомеханический случай, классически рассматривавшийся в конце части I, когда начальное распределение имеет два острых максимума: один — при x_1, другой — при x_2, т. е. мы знаем только, что частица находится либо вблизи x_1, либо вблизи x_2. Решение $\Psi(x, t)$ тогда представляет собой линейную комбинацию двух функций отдельной частицы с комплексными коэффициентами. Поскольку их относительная фаза является неопределенной, по ней надо усреднить. Таким образом, в этой ситуации не возникает никаких интерференционных эффектов. Так и должно быть, ибо простое незнание того, где находится частица при $t = 0$, не может породить физических интерференционных явлений. Наблюдаемая интерференция может быть получена лишь путем подачи частиц из одного источника в два места с помощью некоторого физического прибора, который разделяет волны де Бройля на два «когерентных» пучка, подобно тому, как это делает полупосеребренная пластинка и аналогичные приборы в оптике. Но как только делается попытка определения, в каком из двух интерферирующих каналов находится частица, возникает новое начальное состояние, так что в итоге никакой интерференции не наблюдается.

3. Заключительные замечания

Непосредственное сравнение квантовой механики с детерминистски сформулированной классической механикой является неправильным. Вместо этого сначала надо переформулировать классическую теорию — даже для случая отдельной частицы — индетерминистским статистическим способом. Тогда некоторые из различий между классической и квантовой теориями исчезнут, а оставшиеся проявятся с большей ясностью. Среди первых находится та особенность квантовой механики, что каждое измерение прерывает автоматическое протекание событий и вводит новые начальные условия — это справедливо для статистически сформулированной классической теории (так называемая редукция вероятности). Специфически квантовые эффекты бывают двух родов: взаимное отношение между максимальными точностями для координаты и скорости в начальном и, следовательно, в любом последующем состоянии (соотношение неопределенностей) и интерференция вероятностей при любом случае перекрытия двух (когерентных) ветвей функции вероятности. Для макроскопических тел оба эти эффекта вначале могут быть сделаны пренебрежимо малыми, они могут оставаться малыми очень долго — в продолжение этого времени хорошим приближением является индивидуализирующее описание традиционной классической механики. Но всегда существует критический момент времени, когда это перестает быть справедливым, и квазииндивидуальность переходит в подлинно статистический ансамбль.

1955

Литература

1. *А. Эйнштейн.* Ответ на критику. Собрание научных трудов, т. III. М., «Наука», 1966.
2. *Л. де Бройль.* Останется ли квантовая физика индетерминистской? В сб.: «Вопросы причинности в квантовой механике». М., 1955.
3. *E. Schrödinger.* Brit. Journ. Phil. Sci., 1952, 3, p. 109, 223.
4. *А. Эйнштейн.* Элементарные соображения по поводу интерпретации основ квантовой механики. Собрание научных трудов, т. III.
5. *М. Борн.* Физическая реальность. В сб.: «Физика в жизни моего поколения». М., 1963.
6. *L. de Broglie.* Wellenmechanik. Leipzig, 1929.

ДУАЛИЗМ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ [157][1]

Ведут ли себя частицы иногда как волны? Можно ли волны рассматривать как частицы? Разногласия в интерпретации квантовой механики все еще сохраняются.

В последние годы Альфред Ланде́ пытался дать новое обоснование квантовой теории, исходя из статистических неквантовых принципов, которые не могут быть взяты из классической физики. В его книгах [1*] и статьях [2*] он атакует основную квантовомеханическую концепцию, которая большинством физиков сегодня считается само собой разумеющейся. Он называет эту концепцию «дуалистической» и утверждает, что может заменить ее некоторой другой, более унифицированной.

Нам кажется, что Ланде не отдает себе отчета в исторических корнях возникновения дуалистической интерпретации и не корректно описывает ее физическую сущность. Более того, его борьба против «дуализма» в современной квантовой теории представляется сражением с ветряными мельницами.

Детальный обзор попытки Ланде найти новую основу для квантовой теории был дан Абнером Шимони на страницах «Physics Today», так что нам нет необходимости углубляться здесь в его концепции квантовой механики в целом.

Подход Ланде

Дуализм, как утверждает Ланде, является для современных физиков родом привычки, которая помогает им одновременно пользоваться такими, явно противоречащими друг другу «теориями», какими являются теории волн и частиц, для объяснения явлений микрокосмоса. Ланде утверждает, что материю можно и нужно трактовать исключительно с помощью теории, основывающейся на представлении о частицах («теория частиц»), а свет, напротив, должен рассматриваться только с позиций волновой теории;

---

[1] Статья написана совместно с В. Бимом. Цифра со звездочкой указывает номер в списке литературы, помещенном в конце статьи (с. 200—201).— *Прим. ред.*

в этом заключается то, что Ланде называет «единством в квантовой физике». Нам думается, что интерпретация Ланде представляет собой наиболее неудовлетворительный дуализм, который игнорирует самые важные открытия в физике. Более того, дуализм волна — частица, согласно Ланде, представляется последним изобретением теоретиков (особенно Нильса Бора и Вернера Гейзенберга), которые старались интерпретировать квантовую механику. Эта точка зрения, однако, является исторически неверной.

Основателем дуалистического подхода является Альберт Эйнштейн, точнее, молодой Эйнштейн. Его первая работа, посвященная этому вопросу [4*], появилась 60 лет тому назад в том же самом номере «Annalen der Physik», в котором были напечатаны и его знаменитая статья по электродинамике движущихся тел (включавшая в себя основы специальной теории относительности) и фундаментальная работа по броуновскому движению, в которой впервые доказывается — на основе экспериментальных данных — существование атомов и молекул.

Вывод Эйнштейна

Эйнштейн рассматривал равновесие излучения в полости и использовал закон излучения Планка, известный с 1900 г., которым определяется зависимость средней плотности энергии излучения u от частоты ν и температуры T. Энергия излучения $E(\nu)$, соответствующая частоте ν и заключенная в небольшой части объема V, не всегда в точности равна uV, но подвергается флуктуациям. Если излучение состоит из волн, как это было принято в то время, средний квадрат флуктуационной энергии пропорционален квадрату средней плотности энергии излучения — в соответствии с результатами, полученными Гендриком Лоренцем, т. е. $\langle\Delta E^2\rangle = u^2V^2$. Эта величина может быть также подсчитана из уравнения Планка, которое дает два члена:

$$\langle\Delta E^2\rangle = u^2V^2 + \varepsilon_0 uV, \quad \varepsilon_0 = h\nu, \qquad (1)$$

(h — постоянная Планка).

Входящий в это уравнение линейный член имеет простой смысл. Если мы будем считать, что энергия состоит из квантов величины $\varepsilon_0 = h\nu$, так что $E = \varepsilon_0 n$, где n — число таких квантов, средний квадрат флуктуаций газа квантов будет в точности равен второму члену $\varepsilon_0 uV$ уравнения — в соответствии с элементарными соотношениями статистической механики. Уравнение (1) может быть поэтому записано как формула для среднего квадрата флуктуации числа квантов $<\Delta n^2>$. Обозначая среднее число квантов через $<n>$, мы имеем $Vu = \varepsilon_0 <n>$ и тогда из уравнения (1) получаем

$$<\Delta n^2> = <n>^2 + <n>. \qquad (2)$$

Этот результат (а не объяснение фотоэффекта, как это часто отмечается) был для Эйнштейна отправной точкой в его утверждении о том, что структура света не может быть полностью описана волновой теорией, но что имеются также и кванты света (или фотоны, как мы называем их теперь).

Наиболее удивительное состоит в том, что нам необходимы оба представления о свете — корпускулярное и волновое — для того, чтобы понять уравнение (1), описывающее флуктуации, уравнение, которое, подчеркнем это еще раз, является абсолютно неопровержимым следствием закона излучения Планка.

Таким образом, утверждение Ланде о том, что нам необходима только волновая теория для света, в то время как для «материальных частиц» мы должны использовать исключительно теорию частиц, было опровергнуто уже первой работой Эйнштейна, посвященной данному вопросу. Свет не может быть описан, как показывает рассмотрение Эйнштейна, ни с помощью одних только волн, ни с помощью одних только частиц. Он не представляет собой нечто из волн и частиц, но имеет что-то общее как с теми, так и с другими. Мы не можем понять этот факт, оставаясь в рамках классической физики. Классическая теория волн годится лишь в качестве модели, описывающей световые явления, и модели несовершенной. Вначале Эйнштейн и его современники (в том числе и один из нас) не видели, что дело заключается в этом, и даже позднее этого не поняли.

Подобное рассмотрение показывает, что та же ситуация, что для света, имеет место и для материи. Статистические законы движения молекул должны быть изменены с учетом правил квантования. Классическая статистика Больцмана заменяется статистикой Бозе, названной так в честь Сатиандра Ната Бозе. Эйнштейн сразу понял фундаментальное значение этой замены. Флуктуации энергии бозевского газа вновь можно было представить двучленным выражением; один член соответствовал поведению частиц, в согласии с классической механикой, а второй — поведению классических волн. Здесь мы обнаруживаем тот же дуализм, что и в случае света.

Позднее было обнаружено, что статистике Бозе подчиняется только определенный класс частиц (например, фотоны, мезоны, атомы основного изотопа гелия He^4). Поведение другого класса элементарных частиц управляется другой статистикой, открытой Энрико Ферми и Полем Дираком. Электроны, нейтроны, протоны, атомы редкого изотопа He^3 относятся именно к этому классу частиц. Для систем, состоящих из частиц этого класса, мы имеем следующее выражение для среднего квадрата флуктуации:

$$<\Delta n^2> = -<n>^2 + <n>. \qquad (3)$$

Отрицательный знак перед квадратным членом не позволяет нам интерпретировать это выражение таким же образом, что и уравнение (2). Мы вернемся к статистике Ферми позднее.

Статистика Бозе была построена почти одновременно с созданием Луи де Бройлем волновой механики, которая базировалась на идее о том, что энергия E в теории относительности является не скаляром, а четвертой компонентой четырехвектора; три же остальные его компоненты представляют собой компоненты импульса p. Поэтому (подобно тому, как использование планковского правила квантования для изменений энергии системы, изменяющейся во времени периодически с частотой ν, дает $\Delta E = h\nu$) де Бройль постулировал изменение импульса равным $\Delta p = hk$, где k — волновое число «пространственной частоты» ($k = 1/\lambda$, λ — длина волны).

Формулировка Дюане

Ланде подчеркивает тот факт, что Вильям Дюане сформулировал правило для квантования импульса до де Бройля, не обосновывая его с позиций теории относительности, а для того чтобы объяснить дифракцию рентгеновских лучей в кристаллах с помощью корпускулярной теории света. Ланде использует формулировку Дюане только для частиц, но не для рентгеновских лучей, которые являются классическими волнами и должны рассматриваться, согласно Ланде, в качестве волн.

Он пытается объяснить интерференцию электронов, сопровождающую прохождение их сквозь кристаллическую решетку, с помощью корпускулярной теории. Это значит, он утверждает, что интерференция электронов и света на кристаллах является следствием совершенно разных процессов. Мы думаем, что это вряд ли соответствует истине. Всякий, кто видел фотографии, полученные Лауэ и Дебаем — Шеррером с электронами и рентгеновскими лучами, прошедшими через одно и то же вещество, знает, что их трудно отличить друг от друга. Мы не можем себе представить, каким образом механизмы, совершенно различающиеся по своей физической природе, могли бы привести к идентичным явлениям. Кроме всего этого, нет каких-либо причин, почему единая интерпретация, которая уже существует, т. е. квантовая механика в ее общепринятом понимании, должна быть принята неверной и почему она должна быть заменена другой интерпретацией, которая объясняет явно родственные явления двумя различными способами, причем эти различия совершенно догматически подчеркиваются.

«Квантовое правило» Дюане не привлекло к себе большого внимания, и это естественно, поскольку оно непонятно без идеи де Бройля о соответствии между частицей и волной и о том, что групповая скорость волнового пакета равна скорости отвечающей ему частицы. В этом же смысле было в свое время непонятно и квантовое правило Планка $\Delta E = h\nu$.

Задача, стоявшая перед физиками, сводилась к тому, чтобы найти смысл всем этим правилам. Необходимо было понять, что соответствующий смысл находится за пределами традиционных концепций. Первые шаги к достижепию желанной цели были сделаны в рамках матричной механики, которой дал жизнь Гейзенберг и которая была доведена до своей конечной формы им совместно с Борном и Иорданом, и, с другой стороны, дираковской теорией некоммутирующих величин, также стимулированной гейзенберговскими идеями, но развитой независимо. Обе теории были очень абстрактны, и словам «частица», «движение», «импульс» и т. д. придавалось в них чисто символическое значение. Затем Эрвин Шредингер опубликовал свою волновую механику, которая базировалась на идеях де Бройля.

Был ли Шредингер противником этих теорий?

Ланде упоминает Шредингера (так же, как и Эйнштейна) в качестве одного из противников дуалистической теории. Нам представляется, что Ланде неправильно понял также и Шредингера. Шредингер полагал, что материя обладает волновой природой. Он отрицал существование и «квантовых скачков», характерных для боровской теории электронных облаков в атомах, и утверждал, что факты, объясняемые этой теорией, могут быть описаны только с помощью волн и волновых пакетов. Он оставался верным этой точке зрения всю свою жизнь. Ланде, однако, пишет о «реалистической точке зрения» Эйнштейна и Шредингера, как если бы оба они занимали одну и ту же позицию, прямо противоположную дуализму.

В самом деле, дуализм является открытием, а не изобретением Эйнштейна, как это было нами объяснено выше. Существование дуализма было доказано структурой уравнений для флуктуаций в газах и излучении; против него нет существенных аргументов. Сам Эйнштейн никогда не пытался отрицать дуализма. Ему было совершенно ясно, что избежать дуализма с помощью обычной концепции частиц невозможно. Он пытался преодолеть соответствующие трудности, связанные с этим вопросом в целом, идя совсем по другому пути, а именно, с помощью единой теории поля, которая должна была объединить в себе гравитационное и электромагнитное поля в некоторое формальное единое целое. Основанием этой теории (или, точнее, теорий, поскольку Эйнштейн за время своей жизни составил план нескольких подобных теорий) были поля чрезвычайно абстрактного типа — несимметричные тензоры, которые подчинялись сложным дифференциальным уравнениям. В 1920 г. он писал об этих своих идеях [5*]: «Все свое свободное время я размышляю о квантовой проблеме с релятивистских позиций... Но мне никак не удается придать осязаемые формы моей навязчивой идее понять квантовую структуру с помощью дифференциальных уравнений».

Сингулярности континуума

Эйнштейн отвергал квантовую механику совсем по другим причинам, чем это делает Ланде. Он никогда не отрицал дуализма волна — частица, который он сам открыл, но отстаивал ту мысль, что частицы в качестве неких сингулярностей могут быть выведены из континуальной теории, в которой имеется переопределенность переменных. Ему, однако, не удалось достигнуть успеха на этом пути решения проблемы.

Замечания Ланде создают впечатление, что Шредингер поддерживал тезис Ланде, согласно которому материя состоит только из частиц, а свет представляет собой целиком волновое образование. Как раз наоборот: справедливо противоположное утверждение. Шредингер хотел рассматривать как материю, так и свет имеющими волновую природу и утверждал, что он нашел путь, ведущий назад к доброй старой классической теории. Точка зрения Шредингера не является обоснованной — это неоднократно отмечалось. Во-первых, концентрированный волновой пакет, который, в согласии с этой теорией, представляет частицу, не сохраняется как целое, а расплывается. Во-вторых, его волновая функция ψ распределена в трехмерном пространстве только в случае одной частицы. Для двух частиц $\psi(x_1,y_1,z_1;\ x_2,y_2,z_2)$ необходимо иметь пространство шести измерений, а для n частиц ψ оказывается функцией в $3n$-мерном пространстве. Эти функции нельзя свести к функциям в трехмерном пространстве. Таким образом, желаемое приближение к классической волновой теории оказывается иллюзией.

Дискуссия о «дуализме» или «недуализме» представляется излишней. Со времен открытия Эйнштейном уравнения для флуктуаций становится все более и более очевидным, что природа не может быть описана с помощью частиц или волн в отдельности, а только с помощью более сложной математической теории. Этой теорией является квантовая механика, которая замещает собой обе эти модели и только с определенными ограничениями представляет ту или другую из них. Квантовая теория как единое целое известна нам уже с конца 20-х годов. Нам не следует произвольно переходить от картины частиц к картине волн и пользоваться той или иной картиной без действительного понимания. Наоборот, оказывается возможным представить состояния системы различным образом, а эти представления связаны между собой совершенно определенными преобразованиями.

Среди этих представлений имеется координатное представление, из которого можно легко определить вероятность наблюдения частицы в данной точке пространства. Имеется также и импульсное представление, с помощью которого легко находится вероятность того, что частица имеет определенное значение импульса (а значит, и скорости). Поскольку, согласно де Бройлю, импульс частицы определяет соответствующее значение длины волны, это представление позволяет найти и волновые свойства системы. Указанные два представления относятся соответственно к «картине частиц» и к «волновой картине». Они берут свое начало с того времени, когда квантовая теория не была еще целиком разработана. Однако имеется неограниченное множество других представлений состояния системы, например энергетическое представление, с помощью которых легко рассчитывается энергия системы. Более того, все свойства системы могут быть подсчитаны в любом из этих представлений (например, распределение частиц в пространстве может быть вычислено и в рамках импульсного представления). Таким образом, с помощью квантовой теории можно трактовать все системы одним и тем же способом: состоят ли они из классических частиц или же классическим образом описываются с помощью полей (волн).

Бозоны и фермионы

Гораздо более фундаментальный характер представляет собой (в сравнении с различием между частицами и волнами) классификация частиц по тому признаку, подчиняются ли они статистике Бозе (такие частицы называются бозонами) или статистике Ферми (фермионы). В то время как бозоны можно сравнить с классическими частицами или волнами, как мы продемонстрировали выше с помощью рассмотрения соответствующих флуктуаций, это сравнение совершенно недействительно для фермионов, что тоже отмечалось при обсуждении уравнения (3).

Что касается утверждения Ланде о том, что им дан вывод квантовой механики на основе классических идей, хотя и не буквально тех, которые непосредственно содержатся в классической физике, то оно должно быть, конечно, тщательно проверено; Шимони в своем обзоре [3*] пишет о такой проверке. Мы добавим к этому только следующее замечание. Ланде исходит из статистических постулатов, когда он пытается дать новое обоснование квантовой теории. Эти постулаты неизвестны в классической физике, из которой Ланде черпает все свои основные концепции. Представляется не очень неожиданным, что удастся вывести теории, подобные квантовой механике, исходя из статистических постулатов. Такой вывод сам по себе может быть интересным, но не должен сопровождаться атаками на предполагаемых его противников. Наиболее удивительным аспектом подхода Ланде является догматическое использование им классических и макроскопических представлений частиц и волн в атомных масштабах и его отрицание очевидных объяснений простых экспериментальных результатов на основе этого догматического предубеждения.

Приложение

Диалог о дуализме

Ответы Альфреда Ланде на поднятые в предшествующей статье вопросы и дальнейшие комментарии Макса Борна и Вальтера Бима.

Ланде. Что касается «исторических корней возникновения дуалистической интерпретации», в которой я «не отдаю себе отчета», то, конечно, я знаю, что эйнштейновские кванты света противоположны световым волнам. Но я знаю также и то, что имеется единая квантовая теория излучения, которая отводит «фотону» роль квантового числа, соответствующего периодическим компонентам непрерывного максвелловского поля; вследствие этого становится необязательным приписывать различные ad hoc придумываемые величины — спин, взаимосвязанные электрические и магнитные свойства фотона — только для того, чтобы спасти картину частиц, дуальную волновой картине света. Световые волны являются реальными, а волны материи — искусственным построением во многих отношениях.

Дуализм стал серьезно рассматриваться только после экспериментов по дифракции электронов, которая, казалось, не может быть объяснена иначе, как на основе представления о том, что каждая материальная частица вблизи кристалла или решетки со щелями на время превращается в волну: «электрон расширяется в миллионы раз по сравнению со своим первоначальным размером, чтобы покрыть обе щели; поэтому он интерферирует с самим собой». Этой «странности», наряду с соответствующей «новой концептуальной ситуацией», отвечающей за это магическое и нефизическое превращение, можно было бы избежать, если б теоретик, занимающийся квантовой механикой примерно в 1927 г., был бы осведомлен о квантовом правиле для линейного импульса (Дюане, 1923). Это правило объясняло, что дифракция электронов естественным образом объясняется квантованием импульса дифрактора, как это показано в моих книгах и статьях. Все это было буквально откровением для многих молодых физиков, воспитанных в духе дуалистической доктрины. Умаление значения квантового правила для импульса по сравнению с E и p_{φ}, как это сделано Борном, столь же нефизично, как если б кто-либо предпочитал механические законы сохранения для E или p_{φ} соответствующему закону для сохранения p. Здесь, действительно, можно было бы спросить: «Почему теоретики-квантисты игнорируют квантовую теорию?»

Я был бы в восторге, если б мне показали хотя бы одну ссылку на литературу, в которой бы — в приложении к материальным частицам — была бы дана интерпретация Дюане, использованная им для объяснения явления дифракции. Борн был одним из тех немногих, кто знал работу Дюане, вышедшую в марте 1923 г.

Борн и Бим. Каждый физик должен принять правило Дюане [6*], которое верно описывает все эксперименты, связанные с обменом импульсами на периодических системах. Но он мало чему научится, если их признает. С другой стороны, работа де Бройля (сентябрь 1923 г.) знаменовала собой начало проникновения в истину. В этой работе правила Планка и Дюане были связаны друг с другом. Используя теорию относительности, де Бройль связал четырехвектор волнового числа и частоты с четырехвектором импульса и энергии. Статьи Дюане [7*] были хорошо известны в 20-е годы.

Ланде. Изображать Эйнштейна поборником дуализма — это значит абсолютно противоречить историческим фактам. Каждый физик знает об его упорной борьбе против точки зрения Борна и Гейзенберга, согласно которой каждая отдельная частица имеет волновые свойства (такие, как неопределенную измеримость и даже размазанное существование в pq-пространстве), поскольку они трактовали соотношение $p = h/\lambda$ как проявление волноподобности частицы. Своими многочисленными мысленными экспериментами Эйнштейн старался доказать, что частицы не характеризуются волноподобной неопределенностью, вытекающей из боровского дуализма. Многие авторы, в том числе и Борн, считают, что Бор одержал верх в этой дискуссии. Я не очень уверен, что это так, поскольку аргументы Бора нельзя выразить математически (см. с. 123 моей книги «Новые основания квантовой механики»). К тому же «сосуществование» корпускулярных и волновых флуктуаций в газе, которое, согласно Борну, доказывает, что «дуализм является фактом», было объяснено (частично — самим Эйнштейном) как результат требований симметрии в чисто корпускулярной механике бозонов и фермионов. «Факт» дуализма здесь является не больше, чем противопоставлением очевидных и не очень очевидных свойств частиц в квантовой механике, и, таким образом, вполне допускает устранение термина «дуализм», который только вносит путаницу.

Если материя состоит (в элементарной теории) из дискретных частиц, окруженных непрерывными полями, и как та, так и другие управляются одними и теми же фундаментальными принципами, мы имеем здесь совершенно другой тип дуализма. Даже Эйнштейн не мог исправить это мрачное устройство мира. Не моя вина, что в обычном трехмерном случае дифракции материя демонстрирует поведение, подобное тому, что имеет место в оптике. Однако можно очень хорошо различить эффекты, связанные с материальными частицами, с одной стороны, и электромагнитными волнами — с другой, при совершенно иных обстоятельствах. Об этом смотри в чрезвычайно своевременной статье Марио Бунге «Аналогия в квантовой теории. От понимания к бессмыслице» [8*]. И еще вот что: где я представлял Шредингера как принявшего теорию частиц и отказавшегося от своей собственной знаменитой волновой теории?

Борн и Бим. Ланде говорит: «Материя состоит из частиц, окруженных непрерывными полями». Имеется много более реально существующих вещей, чем он упоминает, и их нельзя классифицировать в терминах частиц и непрерывных полей. Имеется лучшая классификация, например, бозоны и фермионы или частицы (или кванты) с конечной массой и частицы с нулевой массой. Фотоны и мезоны имеют между собой нечто общее, так как являются бозонами, нейтроны и электроны — это фермионы. Но фотоны и нейтрино — это кванты с нулевой массой, и они подобны между собой в определенном смысле (например, с точки зрения кинематической).

Ланде. Исторически дуализм волна — частица находился накануне гибели и существовал только под другими названиями, когда сам Макс Борн в 1927 г. установил свою превосходную статистическую интерпретацию ψ-функции. Он более чем кто-либо другой подчеркнул чисто статистический характер квантовой механики, в отличие от детерминистских волн Шредингера. Тем самым он свел дуализм к совершенно нелогичному противопоставлению свойства отдельной частицы: «интерферировать с самой собой» по отношению к ее коллективным свойствам, проявляющимся в наличии вероятностных распределений в ансамбле многих одинаковых частиц и математически выражаемым с помощью комплексной волновой функции. Этот дуализм, если его можно так назвать, подобен тому, который можно приложить к человеку, больному гриппом, поскольку, с одной стороны, он является одиночной «частицей», а, с другой стороны, подъем и падение кривой распространения эпидемии имеют волнообразный вид. То, что Борн сегодня называет «догмой и предубеждением», а также моей «битвой с ветряными мельницами», вначале, может быть, и выглядело как действия одинокого Дон Кихота. Но в настоящее время к ним присоединились известные физики и философы науки, так что можно говорить о возникновении некоего «народного движения». И никто не радовался бы больше Эйнштейна триумфу борновской статистическо-корпускулярной интерпретации, если бы ей удалось устранить парадокс интерференции частиц и тем победить дуалистических призраков.

Между прочим, читатели моей статьи [2*] в «Physics Today» могли бы заметить, что математический скачок в моем выводе закона интерференции вероятности на основе неквантовых постулатов покрывался добавочным постулатом, согласно которому обобщенный закон вероятности дает при усреднении обычное правило сложения вероятностей.

Борн и Бим. Был ли бы Эйнштейн «обрадован» новым «народным движением»? Нам представляется совершенно очевидным, что Эйнштейн никогда не принимал статистического аспекта квантовой теории. Борновская статистически-корпускулярная интерпретация была частью квантовой теории, которую Эйнштейн не мог опровергнуть, но которая, как он надеялся, была только предварительным шагом, подлежащим устранению после построения лучшей теории. Эйнштейн, конечно, не был «защитником дуализма», но он нашел выражение для флуктуаций и пытался — без успеха — понять этот факт каким-то путем, более приемлемым для него, чем тот, который давала квантовая механика.

Конечно, можно сформулировать квантовую механику частиц, обойдя все термины, характерные для волновых представлений. Иногда это нетрудно сделать, а иногда это достигается очень искусственным образом. Поскольку на этом пути теряется многое в понимании, допустимо спросить: к чему эти усилия?

1968

Литература

1. *A. Lande.* Foundations of Quantum Theory, Yale Univ. Press, New Haven, 1955; From Dualism to Unity in Quantum Physics, Cambridge Univ. Press, London, 1960; New Foundations of Quantum Mechanics, Cambridge Univ. Press, London, 1965.

2. *A. Lande*. Dualism, Wissenschaft und Hypothese. Heisenbergfestschrift, 1961; Philosophia naturalis. Vienna, 1964, 8, S. 232; Brit. J. Phil. Sci., 1965, 15, p. 307; Am. J. Phys., 1965, **33**, p. 123; 1966, **34**, p. 1160; Physics Today, 1967, **20**, N 2, p. 55.
3. *A. Shimony*. Physics Today, 1966, 19, N 9, p. 85.
4. *A. Einstein*. Ann. Physik., 1905, **17**, S. 132; 1906, **20**, S. 199. Phys. Z., 1909, **10**, S. 185.
5. *A. Einstein, H. und M. Born*. Briefwechsel, 1916—1955. München, 1968.
6. *W. Duane*. Proc. Natl. Acad. Sci. U. S., 1923, **9**, p. 158.
7. *M. Jammer*. The Conceptual Development od Quantum Theory. New York, 1966; *F. Hund*. Geschichte der Quantentheorie. Mannheim, 1967.
8. *M. Bunge*. Brit. J. Phil. Sci., 1967, 18, p. 265.

О МОЕЙ РАБОТЕ ПО ДИНАМИКЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ РЕШЕТОК [156]

Возможность выступить с докладом на открытии этого конгресса, посвященного динамике решетки, я рассматриваю как большую честь. Моя первая и мои последние (чисто научные) книги носят название, в точности совпадающее с тем девизом, под которым проходит данный конгресс. Первая книга «Динамика кристаллической решетки» [1] вышла во время первой мировой войны, в 1915 г. (изд-во Тойбнер, Лейпциг), а вторая, написанная вместе с моим китайским другом Хуан Куном [2], «Динамическая теория кристаллической решетки» увидела свет в 1954 г. (изд-во Кларендон-пресс, Оксфорд). Желая представить вам краткий отчет о работе, выполненной мною и моими учениками по динамике решеток, я буду стараться избежать повторений, имея в виду доклад профессора Дебая о предыстории вопроса и обеденный спич профессора Эвальда, в котором будет главным образом освещено положение дел, сложившееся в Геттингене к 1912 г., когда фон Лауэ опубликовал свою работу, где

[1] Имеется русский перевод этой работы; она включена в кн.: *М. Борн, М. Гепперт-Майер*. Теория твердого тела. Л.—М., ГТТИ, 1935. — *Прим. ред.*

[2] Русский перевод: *М. Борн, Хуан Кунь*. Динамическая теория кристаллической решетки. М., ИЛ, 1958.— *Прим. ред.*

содержалось открытие дифракции рентгеновских лучей кристаллическими решетками; профессор Эвальд будет рассказывать также о первых моих и фон Кармана работах по удельной теплоемкости кристаллов. Я надеялся встретиться здесь с моим старым другом фон Карманом, но он умер несколько месяцев тому назад. Макс фон Лауэ, которому теория кристаллов столь многим обязана, ушел от нас несколько лет назад. Минувшей зимой мы потеряли Ч. Г. Дарвина, а вскоре вслед за этим — и Нильса Бора, который проявлял такой большой интерес к этому конгрессу, хотя и не работал в области теории кристаллов.

Позвольте мне теперь сказать вам, каким образом я заинтересовался кристаллическими решетками. В 1912 г. я был приват-доцентом в Геттингене и жил в пансионате на Николаусбергервег, обитатели которого были преимущественно молодыми учеными и студентами. Один из них, Альфред Хаар, исключительно обаятельный и умный венгерский математик, работы которого хорошо помнят и сегодня. Мы питались вместе в моей комнате. Когда ему предложили место профессора (по-моему, в Цюрихе), он рекомендовал мне своего друга Теодора фон Кармана, который должен был поселиться в его комнате. Карман был ассистентом профессора Прандтля, одного из основателей современной гидро- и аэродинамики, и вскоре стал приват-доцентом. Карман по своему характеру сильно отличался от Хаара; он не был таким дружеским и милым, а скорее ироничным, прямолинейным, в некоторых случаях даже грубым, но также и исключительно одаренным. Мы начали вместе столоваться и вскоре стали близкими друзьями. Мы обсуждали все текущие проблемы физики и механики, а однажды заговорили о работе Эйнштейна по удельной теплоемкости твердых тел. Кто из нас столкнулся с этой проблемой первым — я не помню точно, но мне кажется, что Карман, который был гораздо лучше меня знаком с научной литературой. Мы сразу отметили, что монохроматическая формула Эйнштейна может быть улучшена, если учесть взаимодействие вибраторов друг с другом. Мы начали — вполне разумно — со случая одного измерения (позднее мы нашли, что это уже было сделано ранее Лагранжем или Лапласом — я не помню, кем из них именно). Затем мы сформулировали задачу в случае трех измерений и дали ее приближенное решение. После того как мы представили статью в «Physikalische Zeitschrift» для ее опубликования, профессор Зоммерфельд приехал в Геттинген из Мюнхена, чтобы прочесть там лекцию, и мы узнали, что Дебай рассмотрел ту же задачу очень простым методом и рассказал об этом в своей лекции в Швейцарии; она вышла из печати немного раньше нашей статьи. Таким образом, приоритет в несколько недель принадлежит Дебаю. Много лет спустя мой сотрудник М. Блекман показал с помощью тщательного расчета, что при очень низких температурах борн-кармановская теория колебаний решетки лучше соответствует экспериментальным данным, чем приближение Дебая, которое использовало представление о непрерывной среде.

К тому времени Карман и я и еще двое молодых людей, Реннер и Болза, сняли дом на Дальманштрассе. Мы решили как-то его назвать, и, используя первые слоги наших фамилий, окрестили его Бокаребо; это имя звучало вполне приятно, но вскоре к нему был добавлен «испанский артикль» «Эль». Я расскажу вам, как это произошло. Мы наняли себе домохозяйку, которая была медицинской сестрой и мечтала иметь платную лечебницу, дабы заботиться о больных — телом и душой — людях. Карман убедил ее, что мы и есть такие люди, хотя и здоровые телом, зато, с точки зрения людей, к науке не имеющих отношения,— душевнобольные. Она нам готовила и председательствовала за нашим столом, за которым, помимо четырех жильцов, собиралось много молодых ученых, в том числе и Пауль Эвальд, столовавшийся вместе с нами. Вскоре наша домохозяйка, сестра Анна, сказала Карману и мне, что временами наш разговор бывает чрезвычайно непонятным, а часто и просто непристойным. Мы ответили на это: «Ну, а что можно ожидать от душевнобольных?». Но она продолжала выражать недовольство. Поэтому мы пришли к заключению, что нам необходима еще одна женщина, чтобы нейтрализовать сестру Анну, и мы поместили объявление в местной газете, что сдается комната с пансионом для студентки старших курсов. Несколько дней спустя перед нашим домом остановилось такси, из которого вышла очень привлекательная молодая черноволосая дама. Ей показали комнату, которую она сразу же сняла. Ее имя было Элла Филипсон, и вот так-то наш дом и стал известен как

«Эль-Бокаребо». Однако неприятности с сестрой Анной на этом не закончились, поскольку Элла отдавала более серьезное предпочтение нашим дискуссиям, чем беседам на домашние темы с домоуправительницей.

Однажды последняя выразила мне недовольство по поводу того, что Пауль Эвальд часто навещает Эллу. Но вскоре они были помолвлены и, таким образом, сегодня мы имеем удовольствие видеть обоих Эвальдов, Эллу и Пауля, здесь, среди нас.

Теперь, возвращаясь к нашей работе с Карманом, я должен сознаться, что в то время меня более всего интересовал не кристаллический, а квантовый аспект этой работы. Наша теория показывала, что планковская гипотеза не могла иметь какого-либо отношения к проблеме взаимодействия с поглощающим или испускающим атомом, как в то время полагал сам Планк, но означала нечто более фундаментальное в области атомной физики; нужны были новые законы механики. Это следовало из того обстоятельства, что нормальные моды колебаний — абстрактная механическая концепция — должны были квантоваться. Тот же самый результат мог быть выведен и из дебаевского рассмотрения излучения черного тела — из квантования нормальных мод электромагнитных колебаний в ящике с отражающими стенками. Но я не помню с чего началось — с нормальных мод электромагнитного поля или с них же, но в решетке.

Первая работа Кармана и моя увидели свет до открытия Лауэ. Мы считали существование решетки доказанным не только потому, что знали групповую теорию решеток, данную Шенфлисом и Федоровым,— теорию, которая объясняла геометрические особенности строения кристаллов, но также и потому, что незадолго до этого в Геттингене Эрвин Маделунг вывел первое заключение из теории решеток: соотношение между частотой инфракрасных колебаний кристаллов и их упругими свойствами. Мне представляется, что эта статья Маделунга должна рассматриваться как начало динамики решетки.

Статья фон Лауэ о дифракции рентгеновских лучей, непосредственно доказавшая существование кристаллической структуры, появилась в промежутке между временем опубликования наших первой и второй статей. Знаменательно, что и во второй нашей статье отсутствует ссылка на работу Лауэ. Я могу это объяснить только тем, что концепция решетки представлялась нам настолько хорошо установленной, что работу Лауэ мы рассматривали как желанное подтверждение старого открытия, а не как новое и волнующее открытие, каким оно и было в действительности.

Сам Лауэ не внес большого вклада в исследования кристаллических структур. Много позднее я осведомился у него: «С чем это было связано?» Его ответ был таков: «Я интересовался только фундаментальными принципами и детальные исследования предоставлял другим». Мой подход был очень сходен с подходом Лауэ. Тем не менее я продолжал работу по динамике решетки по двум соображениям. Во-первых, она указывала направление, в котором следовало строить лучшую теорию, и, во-вторых, из нее вытекало большое количество задач, над которыми могли бы работать мои ученики, имея в виду защиту докторских диссертаций.

Теперь я вновь возвращаюсь к 1912 г. Интересы Кармана и мои вскоре разошлись. Он сосредоточил свое внимание на теории жидкостей, в которой стал признанным специалистом как в научном, так и в техническом плане. Я предпочел атомную теорию и решил построить систематическую динамическую теорию кристаллических решеток.

Идею этой работы изложить не просто. Вы привыкли пользоваться теми концепциями, относящимися к геометрии и динамике, которых в то время еще не существовало. Не было еще открыто путей для представления трехмерной периодической структуры, для описания потенциальной энергии в функции отклонения от положения равновесия, для записи уравнений движения бесконечного числа частиц, для использования трехмерного фурье-анализа и т. д. Помочь разобраться в существе дела могла только модель одномерной периодической цепочки, т. е. уже было очевидно различие между акустической и оптической ветвями колебательного спектра. Я потратил много времени и усилий, чтобы доказать, что та же процедура может быть реализована и для трехмерной решетки, состоящей из атомов более чем одного типа. Проблема, которая представлялась мне наиболее трудной, покажется вам вполне тривиальной: является ли число упругих постоянных наиболее асимметричного кристалла 21 или 15? Обе эти цифры были указаны Коши: первая — при рассмотрении кристалла как непрерывной среды с симметричными свойствами, вторая — исходя из предположения, что кристалл построен из эквивалентных частиц, связанных друг с другом центральными силами. Я нашел, что эта разность, равная 6, может быть легко понята, если принять во внимание, что в общем случае кристалл не обладает простой решеткой (Бравэ), но представляет собой совокупность такого рода решеток. Эта особенность была тесно связана с различными ветвями колебательного спектра. Затем я исследовал все известные механические, электрические и оптические свойства кристаллов, включая распространение электромагнитных волн. Я знал пионерную работу о решетках, выполненную Эвальдом. На Гильберта она произвела такое впечатление, что он рассмотрел ее в одной из своих лекций различными методами, в том числе и с помощью фурье-анализа. Следуя Гильберту, можно было построить строгую и исчерпывающую теорию, с помощью которой можно было рассмотреть электромагнитные явления в кристаллах. Все эти вопросы составили вторую часть моей книги.

Метод приближения в решении уравнений колебаний решетки также восходит к Гильберту. Он подобен его рассмотрению в больцмановской трактовке уравнения столкновения в кинетической теории газов. Макроскопические феноменологические законы возникают при этом в качестве условий разрешимости приближенных уравнений. Статья Гильберта мало известна. Я не знаю, в какой мере базируется на ней работа Энскога и Чепмена.

Тем временем разразилась первая мировая война. Как раз тогда я получил предложение занять профессорское место в качестве экстраординарного профессора, что соответствует адъюнкт-профессору в США и в Берлинском университете; при этом мне вменялось в обязанность взять на себя часть преподавательской работы, которую нес на своих плечах Макс Планк. Мы переехали в Берлин весной 1915 г. и, готовясь к моему новому курсу лекций, я изложил свои результаты по динамике кристаллической решетки. Вскоре стало ясно, что они чрезвычайно обширны и запутаны, чтобы можно было публиковать их в качестве статей в периодических изданиях. Так что я решил писать книгу и начал подыскивать для нее издателя. Таковым оказалась фирма Б. Г. Тойбнера в Лейпциге. Они не оплатили мне авторского гонорара, но вместо оплаты предоставили некоторое число изданных фирмой книг и цветных картин для детских комнат (число которых в нашей семье начало расти). На этом примере видно, как осторожны издатели по отношению к молодым авторам.

Работая очень напряженно, я успел подготовить рукопись, перед тем как был мобилизован. Часть корректур я читал в условиях, далеких от комфорта: в казармах военно-воздушных сил, в распоряжение которых я был направлен вместе с группой других физиков (в их числе был и Мейсснер, ныне хорошо известный своими работами по сверхпроводимости). Мы занимались задачами установления беспроволочной связи между аэропланом и землей.

Благодаря усилиям моего друга Рудольфа Ладенбурга (позднее работавшего в Принстоне) я был направлен в другое место для ведения исследований военного характера в иной области, а именно, в области определения расстояний на основе звуковых измерений. Задача заключалась в определении расстояния до орудий, основываясь на измерениях времени поступления сигналов в несколько точек наблюдения. Среди членов нашей группы находился мой друг — Эрвин Маделунг и бывший ученик — Альфред Ланде. Ланде и я пытались продолжать научную работу. У нас было два ящика в наших столах: один — для звуковых методов измерения расстояний, а другой — для динамики решетки. Мы полагали, что командовавшие нами офицеры не сумеют усмотреть разницу между двумя типами «иероглифов». Мы хотели подсчитать энергию решетки ионного кристалла, исходя из того, что каждый ион, в согласии с Бором, описывался круговой моделью (ядро, окруженное плоскими электронными орбитами). Это приводило к выражению для потенциальной энергии, имевшему вид

$$U = \frac{\sigma e^2}{r} + \frac{b}{r^n},$$

где $n = 5$. Первый член представлял собой электростатическое взаимодействие полного заряда (e — заряд электрона), а второй — электростатическое отталкивание электронных орбит (которые следовало принять находящимися в положениях, совместимых с симметрией решетки). Оба этих слагаемых связаны с маленькой историей, о которой я хочу вам рассказать.

Ланде и я столкнулись с трудностями, связанными с суммированием кулоновских потенциалов и определяемыми плохой сходимостью ряда. Однажды Маделунг, который присутствовал на наших дискуссиях, удивил нас, предложив хорошо сходящийся метод для вычисления затруднявшей нас суммы, в которую входит константа, носящая ныне хорошо известное название постоянной Маделунга. Позднее к вычислению электростатической энергии был применен метод Эвальда, разработанный для определения встречающихся в расчетах решеток сумм, причем результаты Маделунга были подтверждены. Второе слагаемое в формуле не приводило к каким-либо математическим трудностям, и значения эти могли быть получены непосредственным суммированием. Однако и здесь возникла неприятность, связанная с некоей небрежностью. Нам надлежало определить сумму, соответствующую отталкиванию электронных орбит, распространенную по всем парам атомов в решетке. Мы записали ее в виде удвоенной суммы по всем индексам, которыми отличались атомы, но забыли поставить перед этой суммой множитель $^1/_2$, который учитывал то обстоятельство, что в такой записи каждая пара частиц учитывалась дважды. С подобной неточностью мы получили результаты, относящиеся к абсолютным постоянным решетки и коэффициенту сжимаемости и находившиеся в хорошем соответствии с данными эксперимента. Мы были очень счастливы и передали статью Эйнштейну с просьбой представить ее Берлинской академии. Но вскоре мы обнаружили нашу ошибку и были ею глубоко опечалены. Она не сказалась в сильной степени на значениях постоянных решетки, но коэффициент сжимаемости отличался от экспериментальных данных на множитель 2. Я помчался к Эйнштейну, который жил очень близко от места нашей военной службы, и попросил его забрать представленную им нашу работу. Он засмеялся и сказал: «Я уверен, что ваш метод правилен. Не отказывайтесь от своей работы, тогда ваша ошибка приведет к открытию». И он оказался прав. Мы повторили вычисления абсолютных значений, исходя из модели Бора, и определили показатель степени n на основе сравнения полученных данных с экспериментальными значениями постоянных решетки и коэффициента сжимаемости. Так мы нашли, что для щелочно-галлоидных кристаллов $n = 9$, и получили достоверное значение энергии решетки. Полученный нами результат ($n = 9$) убедил меня в том, что боровская модель атома с плоскими электронными орбитами не может быть верной. Атомы должны обладать более высокой пространственной симметрией. Это было второе свидетельство того, что в случае атомных размеров мы оказываемся перед фактом необходимости совершенно новой механики — свидетельство, полученное из данных по динамике решеток. Другие отрицательные результаты, вытекавшие из боровской орбитальной теории (например, исследование спектра гелия, которое было проделано мною совместно с Гейзенбергом), привели в конце концов, в 1925 г., к установлению квантовой механики Гейзенберга, Иордана, Борна.

Хотя я всегда и полагал, что подобные общие рассуждения имеют гораздо большее значение, чем специальные результаты, я продолжал работу, связанную с различными задачами динамики решетки, поскольку она имела ряд чрезвычайно привлекательных особенностей. Я не буду утомлять вас рассказом о многих соответствующих достижениях, но отмечу только несколько из их числа: оптическая активность (естественное вращение плоскости поляризации), анизотропные жидкости и их оптические свойства, химические приложения вопроса об энергии решетки. В последнем случае, я думаю, мы имеем первый пример опре еления теплоты реакции на основе только лишь физических данных. В ходе этой работы я имел привилегию консультироваться с великим химиком Фрицем Габером. Он развил графический способ представления моей методики, который известен сейчас как борн-габеровский цикл. Эта работа привела меня к знакомству с имиками, и я хорошо запомнил, сколь трудно было мне выступать на химических конференциях и следить за проводившимися на них дискуссиями. Причина этого в том, что мои знания в области химии никогда не выходили за пределы такпх простых соединений, какими являются щелочно-галлоидные кристаллы.

Когда в 1919 г. я стал ординарным профессором — сначала во Франкфурте, а двумя годами позднее — в Геттингене, я продолжал исследования по динамике решетки вместе с моими учениками. В частности, мы занимались термодинамической теорией кристаллов, причем принимали в расчет ангармоничность колебаний, как это предложил делать Дебай.

Мне нужно сделать сейчас скачок, чтобы перейти к работам моей школы в Эдинбурге, куда я приехал в 1936 г. в качестве преемника Чарльза Галтона Дарвина. Я отмечу только несколько моментов. В 1914 г. я опубликовал статью, посвященную алмазу. Я рассматривал там два типа сил: радиальные силы, возникающие между двумя атомами — ближайшими соседями, и угловые силы, которые охватывали три соседних атома. Таким образом, у меня были две независимые атомные константы. Но кубический кристалл характеризуется тремя упругими постоянными; поэтому теория давала одно соотношение между ними, а именно:

$$\frac{4c_{11}(c_{11}-c_{44})}{(c_{11}+c_{12})^2}=1.$$

В то время отсутствовали измерения упругих постоянных алмаза. Мне нужно было ожидать их 34 года! И вот тогда, в 1941 г., в Эдинбурге я узнал о новых ультразвуковых методах измерения упругих постоянных. Вспоминая о своей старой формуле, я написал своему другу, Францу Симону (позднее сэру Френсису Симону), в Оксфорд и попросил его предложить одному из его учеников заняться этим вопросом. Я не успел еще закончить этого письма, как почтальон принес мне конверт, в котором я обнаружил статью индийского физика Багавантама. В ней содержались результаты именно этих измерений. Сопоставляя его кривые с формулами, я получил в правой части приведенного выше выражения 1,1 вместо единицы — вполне удовлетворительное соответствие. Я попросил одну из своих учениц, мисс Смит, проверить формулу с помощью современных методов и обобщить ее включением инфракрасных частот. (Между прочим, мисс Елена Смит — человек яркой индивидуальности. К тому моменту, когда она закончила свою диссертацию и получила искомую степень, на Хиросиму была сброшена атомная бомба. Мисс Смит решила, что она не должна теперь иметь ничего общего с физикой, начала изучать право и сейчас является хорошо известным адвокатом в Абердине. Я хотел бы, чтобы и другие физики продемонстрировали бы подобную нравственную убежденность!) Эта работа дала толчок к появлению целого ряда исследований по стабильности решеток и установлению соотношений между макроскопическими постоянными на основе принятия простых и естественных предположений о силах кристаллической решетки. Я продемонстрирую это на нескольких примерах. Первый связан с трехмерной кубической решеткой Бравэ. Принимая существование произвольных центральных сил, действующих между любыми двумя атомами в решетке, так что величина соответствующего потенциала уменьшается с увеличением расстояния, можно показать, что стабильными будут только гранецентрированные решетки; простая кубическая решетка (в этих предположениях) нестабильна, а объемноцентрированная может быть — или не быть — стабильной, в зависимости от крутизны уменьшения потенциальной энергии с расстоянием. В случае гексагональных кристаллов простая решетка Бравэ вновь оказывается нестабильной, а та, которая соответствует плотной упаковке сферических частиц, — стабильной. Более того, можно показать, что совершенно независимо от закона, которому подчиняются силы, четыре упругие постоянные относятся между собой, как определенные целые числа, а именно:

$$c_{13} : c_{12} : c_{11} : c_{33} = 8 : 11 : 29 : 32.$$

Интересно, что это соотношение было также найдено профессором Либфридом; я узнал об этом после того, как вернулся в Германию. К тому времени, когда я сделал свою старую работу, были измерены (Фогтом) упругие постоянные только в случае гексагональной решетки, а именно, для кристаллического берилла. Он представляет собой сложное многоатомное соединение $Be_3Al_2(Si_6O_{18})$, но большое число атомов кислорода можно приближенно считать неким плотно упакованным агрегатом. Наблюденные данные представлялись отношением

$$8 : 11{,}6 : 32{,}6 : 28{,}6,$$

которое удивительно хорошо соответствует теоретическому.

Я не могу, однако, рассказывать обо всех работах по кристаллическим решеткам, которые составляли предмет наших исследований в Эдинбурге и развивались в различных направлениях: термодинамики и плавления, раман-эффекта, диффузного (теплового) рассеяния, пироэлектричества. Последнее явление и до сих пор представляется своеобразным, поскольку при низких температурах оно подчиняется закону T^2, а не T^4, как это характерно для температурной зависимости энергии и других термодинамических критериев. Объяснение этого обстоятельства отнюдь не просто. Некоторые из всех этих результатов представлены в моей второй книге по динамике решетки, написанной совместно с Кун Хуаном. Основной целью этой книги было систематическое развитие теории решетки на основе квантовой механики. Одна из частей посвящена теории некоторых оптических эффектов, связанных с ангармоничностью сил; она разработана Кун Хуаном. С ее помощью можно предсказать тонкую структуру спектров инфракрасного поглощения в простых кристаллах. Я был рад узнать, что эти спектры были изучены на опыте и подтвердили теорию; эта работа была выполнена в Фрайбурге.

Я ограничил область своих исследований идеальными кристаллами, хотя и отдавал себе отчет в том, что теория дефектов в реальных кристаллах гораздо более важна для практики. Эту область я оставил молодому поколению физиков.

Мои попытки установить универсально применимую систему обозначений были не очень успешными. С течением времени я был вынужден изменить и свои собственные обозначения, так что я не имею оснований жаловаться, что и другие оказывались перед такой же необходимостью. Я пришел к заключению, что уступчивость более предпочтительная, чем неуклонное следование правилам. Ну, а теперь я готов послушать отчет о том прогрессе, который достигнут в той области физики, в которой я начинал свою деятельность.

Постскриптум, написанный после окончания конгресса

Этот конгресс был для меня большим сюрпризом. Когда я вышел в отставку со своей кафедры в Эдинбурге, я продолжал читать физическую литературу. В мое время динамика решетки занимала небольшую группу специалистов. Ныне она представляется мне распространившейся по всему миру, являясь существенным разделом физики. Хотя мои годы и состояние здоровья не позволили мне прослушать все выступления и хотя многие детали ускользнули от меня из-за моей глухоты, я был сильно удивлен тем фактом, что реальный, несовершенный кристалл не заслонил собой все остальное, а что добрые старые кристаллы продолжают играть первостепенную роль. Это связано, мне кажется, с новым экспериментальным методом — рассеянием нейтронов, который позволил непосредственно наблюдать дисперсионную кривую решетки. Я сожалею, далее, что в моей вступительной речи целый ряд работ, выполненных в моем отделе в Эдинбурге, был только упомянут,— я имею в виду диффузное рассеяние рентгеновских лучей.

Дебаевская теория температурной зависимости пятен Лауэ (1913) была обобщена Уоллером (1925), который является почетным председателем нашей конференции, в его превосходной диссертации, посвященной высшим приближениям; в ней было объяснено диффузное послесвечение. В связи с этими результатами, которые я опубликовал 18 лет спустя в виде статьи в «Report of Progress of Physics» (1942—1943, Bd. **9**, p. 294), которая воспроизведена в моих «Избранных сочинениях» (т. 1, с. 587, статья № 36), я писал: «Работа Уоллера содержит законченные формулы для наиболее общего типа решеток; ничего существенного к этим формулам не было добавлено в процессе дальнейших теоретических исследований, за исключением несколько улучшенного способа представления результатов и практического применения». Мое внимание к этой проблеме было привлечено благодаря нападкам сэра Ч. Рамана и его учеников на динамику решетки.

Ч. Раман настаивал на неправильной интерпретации диффузных пятен. Я пытался отразить эти нападки в статье, написанной мною совместно с мисс К. Саржинсон («Proc. Roy. Soc.», 1941), и в докладе, упомянутом выше. Результат, который в существенной своей части содержится уже в работе Уоллера, может быть записан в компактной форме как точное соотношение между динамической матрицей D и матрицей рассеяния S (обе эти матрицы являются функциями разности $\vec{Q}$ между волновыми векторами падающей и рассеянной волн):

$$S = \frac{\hbar}{2} D^{-1/2} \coth\left(\frac{\hbar D^{1/2}}{2kT}\right).$$

Отсюда динамическая матрица может быть определена посредством измерения по рассеянию рентгеновских лучей. Подобно тому, как пятна Лауэ показывают геометрию кристаллической решетки, послесвечение дает сведения об ее динамике. К тому времени (1943) специалисты по рентгеновским лучам — за исключением немногих, в частности, таких, как Катлин Лонсдейл и се школы — не оценили, как представляется, важности этого факта.

Ныне рассеяние нейтронов является доступным методом и более эффективно, чем рентгеновские лучи. Я не изучал теорию этого метода, но я не думаю, чтобы она сильно отличалась от случая рентгеновских лучей.

Я чрезвычайно рад, что та область физики, которой я посвятил большую часть моего времени и усилий, ныне расцвела, как никогда раньше.

1965

О МОИХ РАБОТАХ [176]

Решение Геттингенской академии об издании сборника моих работ доставило мне большую радость. Содействовать этому изданию академия поручила Ф. Хунду, моему второму преемнику по кафедре теоретической физики в Геттингене. Вместе с ним из большого числа моих публикаций мы отобрали ряд работ и установили порядок их расположения. Академия пожелала, чтобы я во введении рассказал о том, как эти работы появились и как они связаны с работами моих учеников и сотрудников. Это я здесь и делаю.

I

Моя диссертация [1] относится к области теории упругости, к которой я впоследствии возвращаюсь только один раз [110]. Будучи студентом я изучал в основном математику. В моем родном городе Бреслау я начиная с 1901 г. получил солидное образование по основным дисциплинам, благодаря которому на прекрасных лекциях Розанеса, ученика Фробениуса, познакомился с областью, впоследствии оказавшейся для меня очень полезной,—с теорией матриц.

На втором году студенческой жизни я слушал в Гейдельберге главным образом лекции Лео Кенигсбергера по дифференциальной геометрии, вовсе не претендующие на строгость, но зато посредством удобных и наглядных методов раскрывающие перед слушателем огромную область. В Цюрихе на меня произвели глубокое впечатление лекции Гурвица об эллиптических функциях, в которых я впервые почувствовал дух современного анализа.

Физику и астрономию я изучал только в качестве «дополнительных дисциплин». Так же сначала было и в Геттингене, где я оказался в 1904 г. Из трех китов (Феликса Клейна, Давида Гильберта и Германа Минковского) меньше всего меня привлекал Клейн, больше всего — Гильберт. В 1905 г. я стал приват-ассистентом Гильберта и по его предложению сделал попытку решить чисто математическую проблему (доказательство трансцедентности корней бесселевых функций), но безуспешно.

В то время математика и теоретическая физика были еще тесно связаны друг с другом. Так, в одном семестре (1904 или 1905 г.) имелось одновременно два математико-физических семинара: один, руководимый Клейном и Рунге, по теории упругости, другой, руководимый Гильбертом и Минковским, по электродинамике движущихся тел. На последнем Минковский уже высказывал мысли, впоследствии ставшие столь известными, о теории относительности как геометрии в четырехмерной пространственно-временно́й области. Работы Эйнштейна в Геттингене тогда еще были неизвестны. Эта проблема меня сильно заинтересовала. В семинаре по теории упругости я тоже участвовал, но без глубокого интереса. Я старался отделаться от доклада и исполнял обязанности только содокладчика после основного доклада другого студента, который должен был говорить об устойчивости упругих тел (упругих проволок и полос). Но случилось, что за два дня накануне своего доклада этот студент заболел и мне предстояло выступать вместо него. Литературу я изучил лишь поверхностно, а времени наверстать упущенное уже больше не было. Но я заметил, что дело заключалось в том, чтобы из стационарных значений энергии упругой деформации выбрать минимальное, следовательно, все сводилось к проблеме вариационного исчисления, о котором я как раз слушал [лекции] у Гильберта. Так я набросал план, как применить к упругой линии достаточные критерии Якоби и Лежандра, и на этом построил доклад, заслуживший одобрение Клейна и Рунге. Клейн побудил философский факультет выдвинуть эту тему в качестве премиальной темы для работ этого года и потребовал, чтобы я этой премии добивался. Но так как я гораздо больше интересовался проблемой электродинамики движущихся тел, то его предложение я сразу же отклонил. Это навлекло на меня справедливый гнев «великого Феликса», не смягчившийся заметно даже и тогда, когда я, по совету моего друга, разработал все же потом тему по упругости и получил премию.

Эта работа, экспериментальную часть которой я выполнил с помощью очень простых средств в моей студенческой каморке, впервые позволила мне испытать чувство удовлетворения и радости по поводу совпадения теории с результатами измерений и показала мне, что в области математической физики я в состоянии что-то сделать без посторонней помощи и руководства. К вопросам, затронутым в этом исследовании, впоследствии я вернулся лишь один раз [110], при совершенно других обстоятельствах, о которых я затем кое-что скажу.

Работа [4] является косвенным результатом упомянутого семинара, руководимого Гильбертом и Минковским, но выполнена она без их помощи в моем родном городе Бреслау, куда я вернулся после докторских экзаменов. Моя попытка научиться экспериментировать у Люммера и Прингсгейма оказалась не очень успешной и была прекращена после затопления моей рабочей комнаты, вызванного моей небрежностью. Однако я продолжал трудиться на теоретическом поприще. Я обнаружил работы Эйнштейна по теории относительности, воодушевился ими и стал разрабатывать свою идею о собственной энергии релятивистского электрона. Результат я послал Минковскому, после чего получил от него приглашение приехать в Геттинген и помогать ему в его исследованиях. Через несколько недель после моего прибытия Минковский заболел и умер. На мою долю выпало распорядиться его физическим наследием, и мне удалось опубликовать одну из его работ. Когда я докладывал математическому обществу мою собственную работу, возник новый конфликт с Клейном, который нетерпеливо прерывал меня столь часто, что я полностью растерялся и замолк. Но Гильберт и Рунге заступились за меня и добились, чтобы я на ближайшем заседании выступил снова. На этот раз все прошло хорошо, и в результате я получил приглашение от физика-теоретика Вольдемара Фогта представить эту работу в качестве конкурсной на замещение должности доцента. Клейн не возражал. Когда я впоследствии стал его коллегой в Геттингене, между нами установилось взаимное согласие, и я на протяжении некоторого времени помогал ему при издании 11-го тома трудов Гаусса (1-я часть, дополнения по физике).

Следствием моей работы явилась обширная дискуссия в журналах о моем определении жесткости тела в теории относительности. Этот спорный вопрос привел в конце концов к тому, что Г. Герглотц с помощью моего подхода развил релятивистскую теорию упругости, в которой мое определение жесткости появляется как имеющий смысл крайний случай. Математические методы моей работы позднее были существенно улучшены Зоммерфельдом.

Работа [40] представляет собой попытку сделать доступной для физиков новое обоснование термодинамики, предложенное К. Каратеодори. Классические представления меня никогда не удовлетворяли, потому что используемые в них понятия (фиктивные круговые процессы) слишком уж напоминают о техническом происхождении учения о теплоте (паровые машины) и логически не очевидны. Я поделился этими соображениями со своим другом Каратеодори, и это послужило толчком к созданию им нового прекрасного метода. Но его представление было для физиков слишком абстрактным и не получило признания. Поэтому много лет спустя я написал эту, легкую для понимания статью. Но и на нее не обратили внимания. Из более значительных теоретиков только англичанин Р. Г. Фаулер принял обоснование Каратеодори. Много лет спустя Фаулер и я решили написать учебник термодинамики, основанный на новой точке зрения. Но вскоре Фаулер внезапно умер, и я отказался от дальнейших попыток плыть против течения. Однако своего мнения о преимуществе обоснования термодинамики по методу Каратеодори я не изменил. Поэтому меня радует, что теперь, наконец, появился учебник, основанный на этой точке зрения (П. Т. Ландсберг. «Термодинамика». Нью-Йорк, 1961).

Статья [110] является уже упомянутым выше возвращением к теории одномерных упругих систем (эластика). Дело происходило в 1940 г., я был профессором в Эдинбурге. Случилось, что в Коатбридже, пригороде большого соседнего города Глазго, внезапно обрушилась фабричная дымовая труба, причинив большой вред и приведя к человеческим жертвам. Вследствие этого возник целый клубок исков о возмещении убытков, предъявленных к фабрике, органам надзора и т. д. и прежде всего к фирме, которая на некотором расстоянии от места происшествия производила взрывы при работах в шахте. Фирма пользовалась взрывчатыми веществами Имперской химической компании (ИХК). Один инженер ИХК повторил взрывы и измерил амплитуды сотрясений. Его расчеты, основанные на формулах Рэлея для колебаний вертикальных упругих стержней, показали, что взрывы вполне могли привести к падению трубы. Так как речь шла о значительных суммах компенсации за повреждения, то привлекли к расследованию и меня. Я установил, что Рэлей полагал волну возмущения незатухающей, и провел вычисления с учетом затухания. Оказалось, что наблюдавшаяся сейсмическая взрывная волна не представляла собой никакой опасности для трубы. Таким образом ИХК была ограждена от значительных потерь. Инженер предложил, чтобы мы опубликовали наши расчеты. Я направил свою часть работы в Институт гражданских инженеров. Работа была принята, но с условием, чтобы ввести в нее небольшое обобщение, предложенное одним из компетентных сотрудников — Г. Д. Пуггом (строгий, а не только приблизительный учет затухания). Так случилось, что статья подписана совместно мною и г-ном Пуггом. Вместе с ним мы получили за нее награду — тельфордовскую премию Института гражданских инженеров. Упоминаю я об этом потому, что все прочие мои работы относятся к «более высоким сферам» и мне доставило радость увидеть, что я могу решить и практическую, и техническую задачу.

К эдинбургскому периоду также относится предлагаемый в работе [122] фурье-преобразователь, осуществленный фирмой Ферранти и довольно хорошо функционирующий. Однако на практике он, по-видимому, не получил распространения.

Последние две работы этой группы [141] и [145] не нуждаются в комментариях.

II

Вторая группа работ, посвященная кристаллической решетке, является самой большой. Она не требует пояснений, так как я время от времени публиковал книги, посвященные этой теме. Исходной точкой явилось задуманное мною совместно с моим другом Т. фон Карманом углубление теории удельных теплоемкостей твердых тел Эйнштейна. Оба мы были тогда приват-доцентами в Геттингене и жили в одном доме. Из наших ежедневных дискуссий возникла мысль улучшить «монохроматическую» теорию Эйнштейна путем определения спектра колебаний кристаллической решетки. К тому времени (1912 г.) представление о решетке было еще совсем гипотетическим. Открытие фон Лауэ интерференции рентгеновских лучей, подтвердившее это представление, было сделано после появления нашей первой работы [12]. Но в нашей второй работе [13] фон Лауэ не упоминается, что показывает, насколько само собою разумеющимся было для нас представление о кристаллической решетке. За две недели до нашей работы появилась статья П. Дебая на ту же тему; в ней теория решетки вовсе не используется, а речь идет только о конечности числа степеней свободы. Этот вариант теории еще и сегодня пользуется бо́льшим признанием, чем наш, потому что он проще. То, что он не пригоден при низких температурах, доказано моим бывшим учеником М. Блэкманом в ряде работ («Proc. Roy. Soc.», 1935, **A 148**, p. 365, 348; 1937, **A 159**, p. 416; 1938, **A 164**, p. 62). В этой области надо применять нашу, более точную теорию.

Карман вскоре переключился на гидродинамику и аэродинамику, а я продолжал работу в области кристаллической решетки, чтобы рассмотреть с этой точки зрения все свойства твердых тел. Первым примером этого является статья [19], где выводится соотношение между упругими постоянными алмаза исходя из строения его решетки и в предположении, что друг на друга действуют лишь ближайшие соседние атомы. Конечно, это соотношение должно было ждать своего экспериментального подтверждения 30 лет, пока не были разработаны сверхзвуковые методы для измерения упругих постоянных. Работа [125], заметка в «Nature» за 1946 г., содержит сравнение с опытом не только прежней формулы, но и новой, улучшенной, с целью учета действия вторых ближайших соседних атомов. Подробные расчеты опубликованы не мной, а моей ученицей (Smith H. M. I. «Philos. Trans.», 1948, **A 241**, p. 105).

Так же обстоит дело со многими работами, приведенными в этом сборнике. После того как я стал руководителем института, я должен был заботиться о докторских работах. Поэтому я часто ограничивался тем, чтобы развить идею в общих чертах или на конкретном примере и передать ее осуществление одному из моих учеников. Такие работы, большей частью докторские диссертации, естественно, отсутствуют в этих томах и в большинстве своем здесь не упоминаются... Одна моя существенная идея в этих томах вовсе не упоминается: последовательность физических процессов согласно принципам теории групп. По существу этот метод уже использовался моим учителем и предшественником по должности в Геттингене Вольдемаром Фогтом в его учебнике кристаллооптики (1910) для определения последовательности явлений. Мой план явно применить теорию групп к молекулам и кристаллам мог быть осуществлен, когда нашелся ученик, склонный к математике и имеющий нужную предварительную подготовку. Это был голландец Карел Жан Брестер. После того как работа, в которой я принимал большое участие, была закончена, он меня попросил, чтобы ему разрешили защищать ее не в Геттингене, а в Утрехте, так как это было важно для его карьеры в Голландии. Я не возражал, хотя и чувствовал, что выпускаю из рук нечто важное. С тех пор превосходная диссертация, защищенная Брестером в Утрехте и в сокращенном виде опубликованная также в «Zeitschrift der Physik» (1924, **24**, S. 324), считается первым случаем применения методов теории групп в физике, получивших позднее столь большое значение в квантовой механике благодаря работам Э. Вигнера (см., например, книгу Франка Матоши «Приложение теории групп к собственным колебаниям точечной системы». Изд. Ю. Шпрингера, 1961, с. 110).

Теория оптических вращательных способностей вытекает сама собой из «Динамики кристаллической решетки», представленной в моей первой книге (1915, § 36, с. 109). Статья [21] есть краткое изложение этой теории, статья [22] представляет собой ее применение к жидкостям и газам. Последняя статья появилась в результате вопроса, выдвинутого Дебаем: нельзя ли в учебниках, таких, например, как «Оптика» Друде, обойтись без использования искусственных моделей.

Работы [25—29] были выполнены во время первой мировой войны в комнате, занимаемой комиссией по проверке [эффективности] артиллерии. В этой комнате группа физиков работала над методом измерения звука, посредством которого по измерению разностей моментов времени регистрации выстрела несколькими станциями можно было определить местонахождение вражеского орудия. Среди этих ученых были Маделунг, Ланде и я. В свободные от службы промежутки времени мы занимались «настоящей» физикой. Ланде и я хотели подсчитать собственную энергию ионной решетки и натолкнулись при этом на две трудности: первой трудностью была плохая сходимость суммы кулоновских сил, второй — неуверенность в законе, описывающем силы отталкивания. Маделунг, прислушивавшийся к нашей дискуссии, внезапно поразил нас элегантным решением первой проблемы. Электростатические собственные энергии, отнесенные к постоянной решетки, как к единице длины, и к заряду электрона, по праву называются постоянными Маделунга. Для решения второй проблемы мы сначала попробовали рассматривать ионы как боровские атомные модели с кольцеобразным распределением заряда и полагали, что обнаружили хорошее совпадение сжимаемости, вычисленной исходя из предположения об электростатическом отталкивании таких колец, со сжимаемостью, наблюдающейся на опыте (работа [28]). Но скоро мы нашли элементарную ошибку в вычислениях: мы забыли известный множитель $^1/_2$ в двойной сумме собственной энергии. После этого мы обратили ход рассуждения и определили показатель n в зависимости силы от расстояния вида r^{-n} из сжимаемости [29], причем он оказался вдвое больше, чем следовало на основе боровской модели. После обнаружения этого я был убежден, что распределение заряда в электронном облаке атома должно обладать гораздо более высокой симметрией, чем в кольцевой модели Бора, как это затем и выявилось в квантовой механике.

Применение вычисленных энергий решетки для определения химических теплот реакции является, пожалуй, исторически первым случаем, когда удалось на основе чисто физических данных вычислять термохимические величины [30]. При сборе данных я имел возможность пользоваться советами Фрица Габера. Своим графическим представлением используемых мною круговых процессов Габер много способствовал распространению этих взглядов среди физико-химиков. В русле этого хода мыслей лежит много работ моих учеников, подобных приведенным здесь под номерами [34] и [36].

Более глубоко идут выполненные в 1921, 1922 гг. совместно с Э. Броди исследования термодинамики кристалла [42, 43, 45]. Впоследствии я возвращался к этой теме в Эдинбурге в 1939—1944 гг. (работы [98, 100, 111]). В течение этого времени были выполнены также большие исследования о влиянии тепловых движений на рассеяние рентгеновских лучей [113], об эффекте Рамана в кристалле [121] и о температурной зависимости пироэлектричества [119].

Последнюю работу этой группы [137] можно было бы столь же хорошо поместить в последующей группе (молекулы, квантовая механика). В ней рассматривается так называемое адиабатическое приближение в квантовой теории системы ядер и электронов (см. также [70, 87]) согласно методу, по которому разложение производится не по степеням отношения масс, а по собственным функциям системы электронов при неподвижных ядрах. При этом в самом грубом приближении в качестве «потенциальной энергии» движущихся ядер появляется не усредненная энергия электронов, как это обычно принимается, но эта энергия плюс добавочный член, который во многих случаях может быть, пожалуй, того же порядка величины. Этот метод представлен также в Приложении VIII к моей последней книге о кристаллах (М. Борн, Хуан Кун. «Динамическая теория кристаллической решетки». Оксфорд, Кларендон-пресс, 1954 г.). Он идентичен методу, использованному Г. Штумпфом в его книге «Квантовая теория ионных кристаллов» (1961).

III

Следующая группа работ, объединенных заголовком «Атомы, молекулы, жидкости», содержит несколько экспериментальных исследований, которые я предпринял или, точнее, которыми я руководил. Они сделаны во Франкфурте-на-Майне, где я в 1919—1921 гг. был профессором и имел в своем распоряжении институт с приборами и одного механика. Первая из этих работ относится к проблеме подвижности ионов, с которой меня познакомил Р. Лоренц, представлявший во Франкфурте физическую химию: как получается, что малые ионы движутся медленнее, чем большие? Обычный ответ таков: потому что они распухают благодаря гидратации. Я попробовал истолковать это несколько смутное представление с помощью идеи Дебая о том, что молекулы воды являются электрическими диполями [35]. В этом расчете появляется константа внутреннего трения вращения. Чтобы ее определить и сделать эффект видимым непосредственно, я предложил наполненный водой шар подвесить между двумя взаимно перпендикулярными пáрами пластин конденсаторов и подвергнуть его действию электрического вращающегося поля. Это приведет к вращению шара, измерение которого дает искомую постоянную трения вращения. Эта работа была выполнена под моим руководством и опубликована П. Лертерсом («Zs. Phys.», 1921, 4, S. 315). Естественно, она не могла войти в этот сборник.

Приблизительно в это же время Отто Штерн, приват-доцент моего института, начал свои опыты с молекулярными пучками, которые его вместе с Вальтером Герлахом, ассистентом экспериментального института в Вахсмуте, вскоре должны были привести к экспериментальному подтверждению одного из самых замечательных выводов квантовой теории — к так называемому пространственному квантованию. Штерн начал с непосредственного доказательства максвелловского закона распределения молекул по скоростям. Оно привело меня к мысли сделать измеримыми с помощью молекулярных пучков другие величины, с которыми имеет дело теория газов, но о которых до тех пор можно было судить лишь косвенно. По моему предложению моя ассистентка Элизабет Борман предприняла измерение поперечного сечения атомных соударений для пучка серебра в воздухе. Об этом речь идет в [39].

Когда я был в 1933 г. в качестве беженца в Кембридже, однажды утром в мою комнату в Кавендишской лаборатории вошел лорд Резерфорд и сказал: «При подготовке к лекции я обнаружил, что имеется экспериментатор, который носит точно такое же имя, как у вас, и который сделал замечательную работу о размерах атомов газа. Такой чистый математик, как вы, такую работу сделать не может».

Он и раньше относился ко мне чрезвычайно дружески, а теперь мой авторитет еще более возрос. Мне кажется, что этот метод непосредственного определения величин, обусловливающих взаимодействие между атомами и молекулами, с тех пор мало изменился, хотя сегодня все же имеются значительно более эффективные методы для создания и измерения молекулярных пучков, чем в то время, когда мы измеряли толщину осадка серебра посредством метода оптической интерференции. При этом мы пользовались интерференционным микроскопом, который на протяжении некоторого времени числился в каталогах фирмы Карл Цейсс, Иена.

Последняя статья этой группы, написанная совместно с Г. С. Грином, открывает серию, изданную в виде книги «Общая кинетическая теория жидкостей» (Кембридж, Юниверсити-пресс, 1949). Но она открывает также, вместе с работами Дж. Г. Кирквуда, Дж. Айвона, Г. Э. Уленбека, Дж. Э. Майера и др., новую область — современную кинетическую теорию жидкостей. Положение, сложившееся в этой области науки десять лет тому назад, отразил мой сотрудник того времени, профессор Грин, в книге «Молекулярная теория жидкостей» (North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1952). Более новый обзор содержится в книге Даниэля Массиньона «Статистическая механика жидкостей» (Париж, 1957).

IV

Следующая группа статей могла бы нарисовать картину развития квантовой механики, если бы не отсутствие в ней самой важной работы — работы Гейзенберга.

Работа [48], написанная совместно с Паули, моим первым ассистентом в Геттингене (1921—1922 гг.), выполнена еще в круге идей боровской квантовой теории. То же относится и к следующей работе [53], выполненной совместно с Гейзенбергом, в которой уже обозначаются недостатки этой теории для системы двух электронов. Работа [36] несколько выпадает из этой взаимосвязи. Работа [57] примечательна тем, что здесь, пожалуй, впервые в названии статьи появляются слова «квантовая механика». Но в отношении содержания она лишь предшествует ей и использует уже известный метод (Ладенбург, Крамерс, Гейзенберг и др.), в котором дифференциальные операторы классической механики заменяются разностными операторами. Выведенная здесь формула для возмущения второго порядка для энергии полностью совпадает с формулой, полученной позднее квантовомеханическим путем. Работа [59], выполненная Иорданом и мной, применяет тот же метод для вычисления поглощения и излучения резонатора в поле излучения, имея своей целью устранить противоречие между классической теорией поля и квантовой гипотезой при выводе формулы излучения Планка.

Эти исследования наглядно показали, что квантовая физика должна иметь дело не с отдельными состояниями, а с парами состояний, связанными с некоторыми «амплитудами перехода».

Работа [58] находится в этом ряду лишь по времени написания, а не по существу. Я считаю, что развитые в ней Франком и мною мысли имеют значение еще и сегодня.

Наконец, в квантовой механике был сделан решающий шаг. Летом 1925 г. Гейзенберг дал мне рукопись своей фундаментальной работы, в которой он развил исчисление амплитуд перехода. На меня рукопись произвела глубокое впечатление, и я послал ее в «Zeitschrift für Physik». Несколько недель спустя я заметил, что гейзенберговский способ исчисления совпадал с матричным исчислением, который я изучил у Розанеса в Бреслау, и что его квантовое условие тождественно диагональному элементу соотношения $pq - qp = h/2\pi i$. Я предположил, что это уравнение справедливо и для других элементов, и это было тотчас же выведено Иорданом, исходя из канонических уравнений движения. Отсюда возникла статья [59] и вскоре после этого — работа трех авторов [61]. Последняя содержит почти все существенные черты квантовой механики. Лично мой вклад заключался, насколько я помню, главным образом в толковании матриц как операторов в векторном пространстве с эрмитовской метрикой, которое теперь называют гильбертовым пространством, и в теории возмущений, которая была впоследствии развита Шредингером на языке волновой механики и обычно называется его именем.

Три эти работы появились в печати зимой 1925/26 г. Почти одновременно в «Proceedings Royal Society» появились первые работы Дирака. Он слушал доклад Гейзенберга в Кавендишской лаборатории в Кембридже, воспринял развитые в этом докладе идеи и достойным восхищения образом развил их дальше.

Работа [62] была выполнена мною совместно с Н. Винером в американском Кембридже — Массачусетском технологическом институте, где я находился зимою 1925/26 г. в качестве приглашенного профессора. В этой работе была сделана попытка рассматривать апериодические движения с помощью упомянутой выше идеи об операторах. Идея оказалась очень близка к правильной. Так, энергия описывалась посредством дифференциального оператора $\frac{h}{2\pi i} \cdot \frac{d}{dt}$, а перестановочное соотношение имело вид $Et - tE = h/2\pi i$, но соответствующих выводов для этих соотношений не было. Последние были сделаны Шредингером, работы которого по волновой механике появились летом 1926 г.

Во всех следующих статьях [63—67] речь идет о статистическом толковании квантовой механики. Целью их является главным образом доказать справедливость предположения, что квадрат абсолютного значения амплитуды волны $|\psi|^2$ представляет собой ее вероятность, вернее — плотность вероятности. Кроме того, в них развита квантовая механика процесса соударения [63, 64, 66] и изучены происходящие под действием внешних сил переходы [65, 71], в особенности в предельном случае медленно изменяющихся (адиабатических) воздействий. Обзор результатов этих исследований содержится в работе [67] и в Нобелевском докладе [140].

Из применений квантовой механики к частным проблемам здесь приводятся только некоторые: о теории молекул, совместно с Оппенгеймером [70] и Флюгге [87], о химических силах [77], об адсорбционном катализе — совместно с Франком [76] и Вайскопфом [78]. Работа о распаде ядра [75] является единственной работой, написанной мною в области ядерной физики.

Предпоследняя работа этой группы, выполненная совместно с В. Людвигом, имеет своей целью описать одномерное движение по инерции посредством формулы, пригодной для всех значений параметров (массы, скорости), и тем самым сделать наглядной связь статистической квантовой механики с детерминистской, классической механикой.

Большая часть работ группы, посвященной теории поля, имеет дело с нелинейными уравнениями поля.

V

Предпринятое Густавом Ми обобщение электродинамики Максвелла—Герца, для которого в работе [18] приводится прозрачный вывод закона сохранения (энергии — импульса), было лишь общей схемой, которая не могла дать никаких конкретных результатов. Когда я был вынужден в 1933 г. покинуть Германию и жил длительное время без книг и журналов в Доломитендорфе, я попробовал найти модификацию уравнений электромагнитного поля, подобно тому, как это сделал Ми, так, чтобы исчезла наконец собственная энергия точечного заряда. Это удалось [89] и могло бы столь же хорошо удаться двадцатью годами ранее. Тогда, вероятно, это следовало бы рассматривать как существенный шаг вперед. Хотя вскоре теория была в Кембридже улучшена и развита при самом активном содействии Л. Инфельда [90, 92], но существенных результатов получено не было. Обзор всех выполненных в этой области работ, в том числе и другими авторами, я дал в «Анналах» института Анри Пуанкаре (1937, 8, с. 155). Этот обзор здесь не приводится не только вследствие его объемности, но и потому что благодаря открытию многих элементарных частиц стало невероятно, чтобы имело смысл рассматривать электромагнитное поле и его источники обособленно друг от друга. Правда, Дирак недавно подхватил эту теорию («Proc. Roy. Soc.», 1960, **A 257**, p. 32). Идея, на которую указывается в конце работы [90] (линеаризация с помощью матриц Дирака), кажется ему привлекательной. Она приводит к билинейным уравнениям поля, линейным как для максвелловских величин поля, так и для спинорных величин поля.

Статья [96] включена лишь потому, что обсуждаемое в ней видоизменение формулы излучения Планка недавно рассматривалось более общим способом М. Штраусом («Phys. Bl.», 1961, **17**, H. 38, S. 452).

Идея, лежащая в основе работы [99], заключается в том, что симметрия между координатой q и импульсом p в перестановочном соотношении $pq - qp = h/2\pi i$ может иметь далеко идущие последствия. Вместе с К. Фуксом мы проследили эту мысль дальше и получили некоторый весьма интересный в математическом отношении результат. Но он оказался неплодотворным, и поэтому мы ограничились только первой работой в данном направлении.

О содержащихся в этой группе биографических статьях можно сказать лишь то, что в большинстве своем они написаны по случаю. Только некрологи для «Obituary Notices Royal Society» о Планке [133] и Зоммерфельде [138] являются результатом подробного изучения.

За пределами этого сборника оказались работы, которые ни к чему не привели, статьи-повторения и статьи, посвященные новому изложению; наконец — почти все популярные или наполовину философские сочинения, которые большей частью собраны в других книгах.

1963

ПРИЛОЖЕНИЯ

Н. Кеммер, Р. Шлапп

МАКС БОРН[1]

ЖИЗНЬ

Юные годы

Макс Борн родился 11 декабря 1882 г. в Бреславле, столице тогдашней прусской провинции Силезии. Его дед по отцовской линии, Маркус Борн, был первым евреем, получившим от прусского правительства официальную должность районного врача. Его отец, Густав Борн,— известный эмбриолог, заведовавший кафедрой в Бреславском университете. Работы Г. Борна по эмбриологии в какой-то мере предвосхитили современное учение о половых гормонах. Мать Борна, Маргатет Кауфман, происходила из семьи предпринимателя, работавшего в текстильной промышленности. Она умерла, когда мальчику было всего лишь четыре года. Вероятно, от матери Борн унаследовал прошедшую через всю его жизнь любовь к музыке. Как драгоценное сокровище, он хранил альбом матери, содержавший автографы Брамса, Клары Шуман, Шарвенка, Сарасате и многих других знаменитых музыкантов. После смерти матери за Максом и его младшей сестрой в течение четырех лет присматривала гувернантка; в 1890 г. Густав Борн женился снова, и хотя его вторая жена и была превосходной матерью для своих приемных детей, между ними и ею так и не возникло близости. Однако дом Борнов, с характерной для него культурной и научной атмосферой, оказал стимулирующее влияние на развитие Макса в тот период, когда формировалась его личность.

К числу друзей его отца в те годы относились Пауль Эрлих, основатель хемотерапии, и Альберт Найссер, бактериолог.

Гимназия кайзера Вильгельма в Бреславле, в которой учился юный Борн, представляла собой обычное учреждение гуманитарного типа; главными предметами, препода-

---

[1] *N. Kemmer, R. Schlapp*. Max Born (1882—1970). In: Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society, 1905.

вавшимися в ней, были латынь, греческий и немецкий языки; но наряду с этим изучались математика, физика, история и современные иностранные языки. Хотя Борн и не относился к числу особенно успевающих учеников, энтузиазм его учителя, доктора Машке, преподававшего физику, передался и ему. К этому времени получили известность эксперименты Маркони по беспроволочному телеграфированию, и Машке воспроизвел некоторые из них со своими учениками. Он с успехом осуществил передачу сигналов из одной комнаты в соседнюю. Борн часто вспоминал испытанное им чувство досады, когда их директор, которого оторвали от его гуманитарных изысканий, чтобы посмотреть на последние чудеса техники, не проявил при этом ни малейших признаков воодушевления.

Университетское образование

Незадолго до того, как Борн закончил гимназию, умер его отец. Следуя его совету не торопиться с выбором специальности, а сначала походить на лекции по различным предметам и только после этого принять какое-либо решение о своей будущей карьере, Макс Борн в течение 1901—1902 гг. прослушал в Бреславском университете курсы физики, химии, зоологии, философии, логики, математики и астрономии. Он нашел действительно интересными для себя только два последних предмета и решил стать астрономом.

По традиции, характерной для немецких студентов тех лет, он не оставался все время в Бреславле, а во время летних семестров переходил в университеты Гейдельберга (1902 г.) и Цюриха (1903 г.), наслаждаясь полной очарования и культурных возможностей жизнью этих городов. Именно в Гейдельберге он встретил Джеймса Франка, который стал его другом на всю жизнь и коллегой по Геттингену. В Цюрихе на лекциях Гурвица по эллиптическим функциям Борн впервые приобщился к серьезной математике. Возвращаясь в университет своего родного города на зимние семестры и проводя там большую часть каникулярного времени, Борн имел возможность — в доме Найссера — близко познакомиться с известными писателями и музыкантами, включая таких, как Герхарт Гауптман, Бузони, Артур Шнабель, Эдвин Фишер и Карл Флеш.

Из числа товарищей Борна по Бреславскому университету двое — Отто Теплиц и Эрнст Хеллингер — решили посвятить себя математике. Именно от них он услышал о трех геттингенских пророках — Клейне, Гильберте и Минковском. Борн решил совершить туда паломничество; поначалу он посещал лекции Гильберта и Минковского, и вскоре Гильберт предоставил ему неоплачиваемое место «приватного ассистента», причем в число основных обязанностей Борна входила подготовка чистовых записей лекций — на основе заметок профессора. Но гораздо более ценную привилегию Борн усматривал в возможности находиться в тесном контакте с Гильбертом, а также сопровождать его и Минковского во время их прогулок по лесам, разбросанным вокруг Геттингена. Во время этих прогулок дискутировались не только проблемы математики, но и целый ряд философских, социальных и политических вопросов. В 1905 г. семинар, руководимый Гильбертом и Минковским и посвященный электродинамике движущихся тел, направил внимание Борна в сторону вопросов, которые стали позднее основой специальной теории относительности. В дальнейшем Борном было с большим мастерством написано элементарное изложение этого предмета. Однако в 1905 г., в том году, когда увидела свет первая работа Эйнштейна по теории относительности, имя Эйнштейна не было известно в Геттингене, хотя самим Минковским и была развита четырехмерная формулировка электродинамики.

Борн посещал также семинар по теории упругости, которым руководили Феликс Клейн и Карл Рунге. Борн, вызвавший недовольство Клейна неаккуратным посещением курса лекций, должен был в связи с болезнью однокурсника выступить с кратким сообщением о проблеме упругой устойчивости. Поскольку у него не было времени для изучения литературы, он непредвзято подошел к решению этой задачи и произвел при этом столь благоприятное впечатление на Клейна, что тот представил его работу в качестве конкурсной на получение ежегодной университетской премии, имея в виду, что Борн примет участие в конкурсе. Поначалу Борн отказался внести свое имя в список соискателей, тем самым снова обидев Клейна, но вскоре капитулировал перед ним, согласился подать работу на конкурс и завоевал премию. Однако он счел все же нежелательным идти на риск и сдавать Клейну экзамен по геометрии. Этот предмет Клейн выбирал в качестве устного экзамена для получения докторской степени; Борн заменил ее на астрономию, изучение которой начал еще в Бреславле.

В то время директором обсерватории был Карл Шварцшильд, и на его астрофизическом семинаре Борн изучил многие вопросы, относившиеся к астрофизике: кинетическую теорию газов, электродинамику и аберрацию оптических инструментов. Он посещал также теоретические и экспериментальные курсы Вольдемара Фогта. Можно утверждать, что из этих курсов возникли зародыши тех идей, которые были развиты Борном в наиболее важных его позднейших работах.

Отношения Борна со Шварцшильдом складывались более удачно, чем с Клейном, и докторский экзамен, состоявшийся в январе 1907 г., прошел успешно, причем экзаменатором Борна был Шварцшильд, а не Клейн, которого так боялся экзаменующийся. Основу диссертации Борна составляла удостоенная премии конкурсная работа, посвященная устойчивости упругой деформации. В течение всей своей жизни Борн сохранил привязанность к этому своему первому научному детищу, на примере которого он почувствовал радость самостоятельного постижения проблемы и испытал удовлетворение от того, что предсказанные им результаты оказались в полной гармонии с данными опыта.

В годы, проведенные Борном в Геттингене, он познакомился с замечательной группой молодых математиков и физиков: Хеллингером, Теплицем, а позднее — Курантом, Эрхардом Шмидтом и Каратеодори. Спустя много лет Борн пытался (без особого успеха, как он нам говорил) популяризировать довольно абстрактную и общую формулировку фундаментальных принципов термодинамики, данную Каратеодори и свободную от искусственной концепции обратимых тепловых машин. Только теперь, когда прошло 50 лет, этот подход Каратеодори проложил себе дорогу в учебники, хотя Р. Фаулер в Кембридже еще в начале 20-х годов (под влиянием работы Борна) перевел статьи Каратеодори из «Physikalische Zeitschrift» и распространял их приватно среди своих коллег.

После получения степени доктора Борн должен был, по существовавшему порядку, провести один год на военной службе, но его болезнь (начинавшаяся астма) позволила сократить этот срок. Однако приобретенный за это время жизненный опыт, по его рассказам, укрепил в нем антипатию ко всему, что связано с военной службой. Затем последовал полугодовой визит в Кембридж. В качестве слушателя курсов повышенного типа в колледже Кайуса Борн прослушал лекции Д. Д. Томсона и Джозефа Лармора, а также посещал курс практических занятий Г. Сирля. Он считал чрезвычайно интересными лекции и лекционные демонстрации Д. Д. Томсона; что касается Лармора, то, по его мнению, он сильно уступал как лектор Минковскому. Однако в этом случае, вероятно, имелись и определенные языковые трудности, как становится ясным из брошенного Борном замечания о том, что ему было трудно разбирать «ирландский диалект» Лармора.

Вернувшись в Бреславль, Борн занялся экспериментальной работой под руководством Люммера и Прингсгейма, но вскоре вновь вернулся к теории. Именно к этому времени относится обращение Борна к статьям Эйнштейна, опубликованным в 1905 г. и посвященным теории относительности, причем он был сразу же очарован ими. Комбинируя идеи Эйнштейна с математическими методами Минковского, Борн нашел новый и более строгий путь для вычисления электромагнитной массы электрона и послал свою рукопись в Геттинген Минковскому. В результате Минковский пригласил его вернуться в Геттинген, чтобы принять участие в работе по теории относительности. Но их сотрудничество продолжалось всего несколько недель — с декабря 1908 г. по январь 1909-го — и было прервано трагической смертью Минковского (после операции аппендицита). Борн вспоминал, как удручен он был, чувствуя, что его надежды потерпели крушение, как он снова пережил столкновение с Клейном и как, направляемый добрыми советами Рунге, убедил Гильберта в правильности своих идей.

В конце концов в 1912 г. Фогт предоставил Борну должность приват-доцента. Его коллегами в Геттингене были, помимо Теплица и Куранта, Германн Вейль и Теодор фон Карман. В сотрудничестве с фон Карманом Борн развил хорошо известную теорию удельной теплоемкости твердых тел (теория Борна—Кармана), положившую начало программе исследований, которыми в течение многих лет занимался как сам Борн, так и его ученики, и которая ставила своей целью объяснение свойств твердых тел, особенно кристаллов, на основе данных о структуре их решетки.

В 1913 г. Борн женился; его женой стала Хедвига Эренберг, дочь профессора права Геттингенского университета.

Берлин и Франкфурт (1914—1921)

Внезапное начало, в августе 1914 г., мировой войны совпало по времени с открытием вакансии на кафедре Берлинского университета, смежной с кафедрой, возглавлявшейся Максом Планком. Борн приехал в Берлин весной 1914 г. и вскоре оказался вовлеченным в военные дела; однако он успел закончить рукопись своей книги о динамике кристаллических решеток. Некоторое время он служил радиооператором германских военно-воздушных сил, после чего был переведен в артиллерию, где на него возложили исследовательские работы, связанные с распространением звука. Весьма характерно, что, возглавляя эту акцию, Борн считал своим долгом вовлечь в работу как можно больше бывших своих коллег и учеников, которых для этого специально отзывали с фронта. В их числе был Альфред Ланде́, с которым Борн продолжал сотрудничать и после войны по вопросам, относящимся к кристаллам.

В эти мрачные годы войны и последовавшей после перемирия блокады Борна в чрезвычайной степени поддерживала дружба с Эйнштейном, берлинским коллегой которого он теперь стал и с которым еще до этого состоял в переписке (касавшейся в основном вопросов теории относительности). Немаловажным фактором, связывавшим их друг с другом, была любовь к музыке. Эйнштейн играл на скрипке, Борн — на рояле; вместе они часто исполняли скрипичные сонаты.

В 1919 г. Макс фон Лауэ (в то время профессор во Франкфурте-на-Майне) предложил Борну обменяться кафедрами: Берлин привлекал Лауэ возможностью работать рядом с его любимым учителем Максом Планком. По соглашению между обоими университетами такой обмен состоялся, и Борн в апреле 1919 г. прибыл во Франкфурт-на-Майне в качестве ординарного профессора университета и директора Института теоретической физики. Институт располагал средствами, необходимыми и для проведения экспериментальной работы (там даже имелся механик), которая была развернута Отто Штерном, ассистентом Борна, сумевшим найти отличное применение имевшемуся в распоряжении Института оборудованию.

Штерн развил метод атомных пучков, которые были им использованы для проверки максвелловского закона распределения молекул по скоростям. Впоследствии Штерн вместе с Герлахом (ассистентом Ваксмута, возглавлявшего Институт экспериментальной физики) выполнил знаменитый «опыт Штерна — Герлаха», связанный с квантованием векторов в пространстве. Надо добавить, что тогда же, во Франкфурте, А. Ланде, гость борновского института, получил свою известную формулу, характеризующую структуру мультиплетов и аномальный эффект Зеемана.

Геттингенская школа (1921—1933)

По прошествии двухгодичной работы во Франкфурте Борн был приглашен на должность директора Физического института Геттингенского университета в качестве преемника Питера Дебая. Несмотря на то, что Борн временами занимался экспериментальными исследованиями по физике, он не чувствовал себя достаточно квалифицированным, чтобы возглавить работы большой лаборатории. Ему удалось убедить Министерство просвещения пригласить в качестве помощника по экспериментальной части своего старого товарища Джеймса Франка. Как стало ясно уже через несколько лет, этот выбор оказался очень удачным, поскольку в 1925 г. Франк был удостоен Нобелевской премии (вместе с Густавом Герцем) за исследования по возбуждению атомов.

В течение первых лет геттингенского (третьего в научной карьере Борна) периода его деятельности Борн и его ученики продолжали работу по динамике решеток, в частности по термодинамике кристаллов, к которой они привлекли и Э. Броди. К этому времени относится появление большой обзорной статьи, написанной по предложению Зоммерфельда для «Энциклопедии математических наук» (в 1923 г. статья была издана отдельной книгой под названием «Атомная теория твердого тела»).

Вскоре, однако, основные интересы Борна переместились в область квантовой теории. Ему особенно повезло:

его ассистентами и сотрудниками стали Вольфганг Паули и Вернер Гейзенберг, а среди одаренных студентов был Паскуаль Иордан. С этим последним он предпринял попытку (лишь отчасти удачную) развить новую «квантовую механику» (этот термин принадлежит Борну), используя уравнения в конечных разностях, в которые входила постоянная Планка. В 1925 г. Гейзенберг, исходя из предпосылки о том, что ненаблюдаемые величины не должны непосредственным образом входить в теорию, развил математический аппарат, который в случае приложения его к простым объектам типа гармонического осциллятора дал обнадеживающие результаты. Именно Борн, с его более обширным математическим багажом, обнаружил, что символическое исчисление, развитое Гейзенбергом, эквивалентно матричной алгебре. Вскоре новая теория получила систематическое развитие в статье Борна, Гейзенберга и Иордана; она заняла свое место в числе классических работ по теоретической физике. Шредингер в 1926 г. выполнил работу по «волновой механике», в которой он ввел непрерывную комплексную величину — волновую функцию ψ, удовлетворявшую дифференциальному уравнению с определенными граничными условиями (позднее сам Шредингер установил, что его уравнение с математической точки зрения эквивалентно новой квантовой механике). Эта работа стимулировала Борна в его размышлениях о физическом смысле шредингеровской волновой функции ψ. Шредингер хотел целиком отказаться от самой идеи частиц и трактовал величину $e|\psi|^2$ как плотность непрерывно распределенного электрического заряда (здесь e — заряд электрона). Борн, однако, находившийся под впечатлением экспериментальных исследований своего коллеги Франка, относящихся к столкновениям атомов и молекул, был убежден в том, что идея частиц не может быть просто отброшена в пользу представления о непрерывном распределении. Используя высказанные ранее Эйнштейном идеи о взаимосвязи между световыми волнами и фотонами, согласно которым квадрат амплитуды этих волн в данной точке должен был определять вероятность нахождения в ней фотона, Борн выдвинул интерпретацию $|\psi|^2$ — квадрата модуля шредингеровской волновой функции как плотности вероятности в конфигурационном пространстве. Успешное рассмотрение вопроса о столкновении частиц, предпринятое Борном в терминах рассеяния

ψ-волн, подтвердило правильность идеи о статистической интерпретации $|\psi|^2$ и внесло большой вклад в полное разъяснение корпускулярно-волнового дуализма. Хотя это представление вскоре широко распространилось, должно было пройти двадцать восемь лет до того времени, когда этот фундаментальный вклад Борна получил должное признание в виде Нобелевской премии, присужденной ему в 1954 г.

В течение зимнего сезона 1925/26 г. Борн читал курс лекций в Массачусетском институте технологии, которые он назвал «Проблемами атомной динамики». В 1928 г. вместе с большой группой европейских ученых он посетил Россию. Эти поездки в соединении с напряженной работой по руководству его институтом в Геттингене (а Институт теоретической физики стал к тому времени местом паломничества для большого числа молодых и активных физиков-теоретиков со всего света) сказались на состоянии здоровья Борна и заставили его прервать примерно на один год исследовательскую и преподавательскую деятельность. Борн говорил, что с тех пор ему уже никогда не удавалось в полной мере восстановить свою былую трудоспособность; вместе с тем именно в течение этого года относительного бездействия им была написана его замечательная монография по оптике.

Изгнание из Германии

В мае 1933 г., вскоре после прихода к власти Гитлера, Борн был отстранен от работы на своей кафедре и покинул Германию. После краткого отдыха в итальянском Тироле он принял приглашение приехать в Кембридж в качестве лектора фонда Стокса. Там Борн получил степень «магистра искусств» и право преподавания в колледжах Кайуса и св. Джона. В Кембридже он занимался (совместно с Л. Инфельдом) нелинейной электродинамикой — модификацией электромагнитной теории Максвелла, поставив перед собой задачу исключить трудности, связанные с бесконечной собственной энергией электрона. Полученные при этом результаты нельзя было, однако, совместить с квантовой теорией. В это же время он написал свой известный учебник «Атомная физика», выдержавший семь изданий, а также популярную книжку «Беспокойная Вселенная». Когда истек срок его пребывания на посту стосовского лектора, Борн принял предложение Ч. В. Рамана о полугодовой работе в его институте в Бангалоре — возможность, которая очень обрадовала и самого Борна, и его супругу; с научной точки зрения, впрочем, пребывание там не было особенно плодотворным.

Кафедра в Эдинбурге

После Бангалора Борн внимательно отнесся к предложению о возможности переезда в Москву. Но как раз в это время оказалось вакантным место заведующего Тэйтовской кафедрой натуральной философии Эдинбургского университета, поскольку занимавший эту кафедру Чарльз Дарвин был избран профессором Христианского колледжа в Кембридже. Борн стал, таким образом, его преемником в Эдинбурге и приступил там к работе в октябре 1936 г. Вскоре вслед за этим он был избран членом Королевского научного общества в Лондоне.

В Эдинбурге Борн очень быстро создал научную школу по континентальному образцу. При этом, однако, он не добился полного успеха в реформе подготовки студентов-выпускников для своей кафедры; большинство его аспирантов не были уроженцами Великобритании, а прибыли в нее из разных мест, иногда в качестве политических изгнанников из континентальной Европы. Профессор Р. Фюрт, работавший ранее в «немецком университете» в Праге и с начала войны сотрудничавший с Борном в Эдинбурге, так описал (в письме к авторам данной статьи) характерные для Борна методы руководства работой своих научных сотрудников. «Теоретические исследования,— писал Фюрт,—обычно проводились в большой комнате в подвальном помещении физического корпуса университета (бывшей больницы) на Друммонд-стрит. Там находился письменный стол Борна, а также несколько длинных столов, за которыми обычно сидело полдюжины сотрудников, в том числе и я. По утрам Борн обходил своих аспирантов, спрашивая, как продвинулась их работа и не могут ли они рассказать об ее результатах. Он консультировал аспирантов, а иногда передавал им подробные расчеты, относящиеся к их задаче и выполненные им накануне. Та удивительная легкость, с которой он мог переключаться от одного вопроса на другой во время этой «инспекторской прогулки», была действительно впечатляющей! Будучи столь неправдоподобно быстр в своей работе, Борн часто проявлял большое нетерпение, когда находил, что подопечный не успел довести до конца расчеты, которые ему предложено было сделать всего лишь за день до этого. Вторую половину утра Борн посвящал лекциям для наиболее успевающих студентов старших курсов, участию в делах факультета и своим собственным исследованиям. Впрочем, большую их часть он выполнял в послеобеденное и вечернее время у себя дома».

Семнадцатилетнее пребывание Борна в Эдинбургском университете предоставило ему много возможностей для всевозможных поездок, часто продолжительных, на конференции и в университеты, в Англии и за ее пределами (включая конгрессы в Париже, Бордо, Советском Союзе). Один семестр он преподавал в Египте; он читал также Вайнфлетовские лекции в Оксфорде.

Годы войны (1939—1945) не сильно изменили характер научных исследований Борна, однако существенно уменьшилось число его студентов. Он не привлекался к проведению каких-либо военных работ; участие в них противоречило бы его общим взглядам. После окончания войны исследовательская деятельность школы Борна продолжала успешно развиваться, привлекая к себе сотрудников со всех концов света. Главными помощниками Борна в это время были Р. Фюрт, Г. С. Грин, Э. Вольф и пресловутый К. Фукс.

Годы после выхода в отставку

В конце 1952/53 учебного года, достигнув предельного возраста (70 лет), Борн покинул свою кафедру. Вскоре после этого Борны построили себе дом и поселились в Бад Пирмонте, маленьком и уединенном курорте неподалеку от Геттингена. Друзья Борна испытали чувство удовлетворения, узнав, что он получил компенсацию за убытки, понесенные им от гитлеровского режима (возмещение конфискованного имущества, восстановление прав на пенсионное обеспечение), а кроме того, он (так же, как и Франк и Курант) получил почетное гражданство Геттингена, учитывая заслуги перед университетом этого города, подлинным украшением которого Борн являлся.

В Бад Пирмонте Борн продолжал научную работу и предпринял новые издания нескольких своих книг. Он проявлял все большую активность в делах, связанных с социальной ответственностью ученых...

Борн был удостоен многих почестей. Помимо того, что он был, как уже отмечалось, Нобелевским лауреатом и членом Королевского общества, он был почетным членом русской, индийской, румынской, перуанской и королевской ирландской академий, иностранным членом Королевской академии Дании и Королевской академии Швеции, национальной Академии наук США. Среди прочих его наград надо упомянуть медаль Стокса Кембриджского университета, медаль Хьюза Королевского общества, премию Макдугалла — Брисбейна и юбилейную Ганнинговскую премию Эдинбургского королевского общества, премию Телфорда Института гражданских инженеров, медаль Макса Планка, выдаваемую Немецким физическим обществом. Он был почетным доктором университетов Бристоля, Бордо и Эдинбурга и почетным членом Колледжа Кайуса в Кембридже. Особенное удовлетворение он испытал, узнав, что две школы в Федеративной Республике Германии получили его имя и что была утверждена медаль Макса Борна.

Он умер в больнице в Геттингене 5 января 1970 г., оставив после себя вдову, сына и двух дочерей.

ТРУДЫ

В рамках этой статьи невозможно дать сколько-нибудь адекватную оценку вклада Макса Борна в науку. Часть его работ мы обойдем молчанием, ограничившись их кратким упоминанием в предыдущих разделах и в приложенной библиографии. И все же останется огромное число работ, впечатляющее разнообразием областей его деятельности, к изложению которых мы и переходим.

Придерживаясь, по возможности, хронологического порядка, в качестве первой области исследований Борна отметим динамику кристаллических решеток. В своих автобиографических заметках Борн, говоря о вкладе в эту область, ограничивается очень беглыми замечаниями. Бо́льшую информацию об его ретроспективном взгляде на эти исследования можно получить из приветствия, с которым он обратился к Международной конференции по динамике решетки, происходившей в августе 1963 г. в Копенгагене. Но и там его ссылка на работу Маделунга, которая положила, по его словам, начало исследованиям по динамике решетки, свидетельствует о недооценке им значения его собственных работ. Все без исключения лица, консультациями которых мы пользовались в процессе подготовки этой мемориальной статьи, с очевидностью дали понять, что считают Борна отцом этой области физики.

Начало этим работам Борна положило исследование, проведенное им совместно с фон Карманом (как это уже было нами отмечено ранее). Интерес двух ученых к вопросам динамики твердых тел был стимулирован появлением статьи Альберта Эйнштейна об удельной теплоемкости кристаллов (1907). В копенгагенской лекции Борн утверждал, что фон Карман был, вероятно, первым, кто заметил эту работу, ибо был он «большим знатоком научной литературы». Совершенно ясно, что интерес двух молодых людей должен был быть вызван сочетанием двух факторов. С одной стороны, Эйнштейн продемонстрировал замечательно простой и плодотворный пример того, как удельная теплоемкость твердых тел может быть описана в терминах возникающих в них колебаний, если к этим колебаниям применить планковскую квантовую формулу. А с другой стороны, отсутствовала ясная физическая картина описания всего механизма этих колебаний. В частности, Борн, и в этом видно несомненное влияние на него школы, пройденной у Фогта, был знаком с математическими основами теории кристаллической структуры, развитыми Шёнфлисом и Федоровым. Таким образом, оба молодых ученых были хорошо подготовлены к тому, чтобы задаться вопросом, который можно считать решающим для всей проблемы: каким образом существующее представление о *структуре* может быть связано с идеями *механики*, чтобы получить представление о кристалле как о новой динамической системе? Эта система, несомненно, должна быть сложной, поскольку в данном случае имеется большое число степеней свободы, но несомненно и то, что она должна характеризоваться ей самой присущей простотой, связанной с «организующим началом» внутренней ее симметрии.

В первой совместной работе Борна и фон Кармана [12] фактически рассматриваются все основные идеи динамики решетки.

Для современного читателя представляется затруднительным отдать себе отчет в том, в какой степени эти идеи были тогда новыми, высказанными впервые, потому что сейчас они буквально вошли в самую плоть физики. Представление о том, что независимые степени свободы кристалла должны быть сопоставлены с нормальными модами колебаний всего тела в целом, а не с колебаниями небольших групп частиц; широкое использование трехмерных преобразований Фурье; «периодические граничные условия», введенные для того, чтобы избежать трудностей, сопряженных с поверхностными эффектами; анализ, ведущий к понятиям акустической и оптической ветвей колебательного спектра; рассмотрение предела длинных волн и переход к непрерывному (континуальному) описанию — все это введено в рассмотрение в первой работе [12]; все то, что последовало за этим в исследованиях Борна и многочисленных его учеников, непосредственно было построено на фундаменте, заложенном этой работой. Данные работы сами по себе, как и, в равной мере, превосходные книги Борна, не нуждаются здесь в пересказе, но одно-два замечания могут считаться уместными, чтобы лучше уяснить место, занимаемое этими исследованиями в развитии всей современной физической мысли вообще и в последовательности хода мысли самого Борна, в частности. Сам Борн в своем копенгагенском докладе подчеркнул, что эта работа была начата и продолжалась при твердом убеждении автора в том, что кристаллическая решетка является физической реальностью, хотя к моменту начала исследований экспериментальное доказательство этой гипотезе еще не было дано работами фон Лауэ и Брэгга. В промежуток времени между публикацией первой [12] и второй [13] работ Борна и фон Кармана стали известны опыты Лауэ, однако и во второй работе о них еще не упоминается. Очевидно, убежденность самих авторов в правильности их основного предположения не нуждалась в каких-либо экспериментальных доказательствах.

Другое развитие эта область физики получила в исследовании Дебая (проведенном почти одновременно с борн-кармановскими работами), посвященном удельной теплоемкости твердых тел. Основные идеи Дебая, относившиеся к этому предмету, совпадали с идеями Борна и Кармана. И физика у него была та же, однако методы решения проблемы были совершенно другими. Борновский подход в этом случае, как и в большинстве других его работ, сводился к тому, чтобы рассмотреть проблему во всей ее сложности, развить математическую формулировку ее с необходимой общностью и только после этого перейти к рассмотрению более простых, более доступных для решения (и обычно наиболее интересных с точки зрения физики) примеров в качестве ясно очерченных специальных и предельных случаев, вытекающих из общего формализма теории.

Дебай предпочитал иную линию атаки. Его формулировка проблемы проводилась в терминах модели, которая не претендовала на то, чтобы с самого начала быть справедливой во всех деталях, но вместо этого решительно использовала смелые упрощения — замену реального кристалла квазиконтинуальной моделью, которая оказалась способной представить основные особенности теории в несравненно более простой форме. На широчайшие круги физиков работа Дебая об удельной теплоемкости (основное приложение динамики кристаллов, относящееся к раннему периоду ее развития) оказала гораздо большее влияние, чем более утонченная теория Борна—Кармана. Прошло много лет, прежде чем после большой работы, выполненной Борном, его учениками и другими учеными стала очевидной практическая необходимость продвинуться в область, лежащую за пределами применимости приближения Дебая. Позднейшие исследования деталей в поведении удельной теплоемкости полностью подтвердили правильность борн-кармановского подхода к проблеме. В качестве одного из важных примеров можно привести работу Блэкмана по удельной теплоемкости при низких температурах, в которой наблюдательные данные удалось сопоставить с колебательными спектрами, определяемыми полной динамикой кристалла, в результате чего «температура Дебая» оказалась зависящей от температуры.

Прежде чем обсуждать последующие работы Борна в других областях динамики кристаллов, полезно сделать замечание об одном аспекте проблемы удельной теплоемкости, которому Борн впоследствии придавал большое значение. Хотя динамическая часть работ Эйнштейна, Дебая и в еще большей степени Борна и Кармана полностью основывалась на классической физике колебательных систем, ее приложение к описанию тепловых свойств покоилось на представлениях квантовой теории, которая была развита Планком прежде всего в области термодинамики излучения. Все формулы для удельной теплоемкости в упомянутых теориях включали в себя постоянную Планка h и теряли физический смысл в пределе $h = 0$. Теория Планка к тому времени получила признание, но это не означало, что физика, лежащая в ее основе, была хорошо понята. Точный механизм, благодаря которому квантовая постоянная столь могущественным образом обнаруживает свое присутствие в определении термодинамического равновесия, был в большой степени предметом спекулятивных построений. Все еще спорным оставался вопрос о том, связана ли справедливость формулы излучения Планка с новыми специальными ограничениями на взаимодействие между излучением и веществом, его испускающим или поглощающим, или же с видоизменением динамики Максвелла или Ньютона в применении к описанию некоторых систем.

После работы Борна и Кармана стало ясно, что теория Планка в приложении к описанию динамики решетки имеет дело не с отдельными атомами или группами атомов кристалла (как это было в теории Эйнштейна), но скорее с нормальными модами колебаний. После этого стало в высшей степени сомнительным, чтобы какая-либо простая модификация механизма взаимодействия могла оправдать планковскую процедуру. Как замечает Борн, на этом этапе в его сознании стала расти убежденность в том, что понимание квантов требует совершенно новой механики, которая должна будет заменить механику Ньютона. Так возникло следующее звено между двумя областями исследований, с которыми наиболее прочно ассоциируется имя Борна.

Теперь, чтобы в какой-то мере воздать должное Борну, нам следует обратиться к огромному числу научных работ ученого, охватывающих всю его творческую биографию, которые можно рассматривать как логическое продолжение работ Борна—Кармана. Из них очень трудно сделать выбор, и, по-видимому, у нас нет для этого другого способа, чем последовать выбору самого Борна, который он сделал при публикации в 1963 г. «Избранных трудов». Мы обсудим лишь некоторые из этих важнейших работ. Независимо от принципа выбора, необходимо упомянуть работу 1914 г. «К теории пространственной решетки алмаза» [19], которая представляет подробное и обстоятельное применение общих принципов работ Борна—Кармана к случаю одного конкретного вещества — алмаза, очень характерная кристаллическая структура которого к тому времени уже была установлена Брэггами. Во вступительных замечаниях к этой статье Борн указывал, что алмаз представляет уникальную возможность проверки его теоретических идей. Многие физические свойства алмаза установлены очень хорошо, и систематическое применение к нему Борном принципов динамики решетки оказалось в ретроспективе поистине краеугольным камнем прогресса в этой области. Правда, в смысле детального сравнения с экспериментом результаты работы могут показаться довольно ограниченными. В центральной проблеме удельной теплоемкости было показано, что полная динамика решетки (с учетом взаимодействия только ближайших соседних атомов) приводит в пределе низкой температуры к теории Дебая, а в пределе высокой температуры — к теории Эйнштейна. Однако оставался еще свободный параметр, который в то время не мог быть найден из измерений удельной теплоемкости. Теоретическое определение его требовало более детальных сведений о силах взаимодействия в кристалле алмаза, чем те, которые были известны в то время. Но, помимо этого, в работе дается полное изложение нового подхода к определению межатомных и межмолекулярных сил в кристаллах, который лишь косвенно затрагивался в первоначальных работах Борна—Кармана. Низкочастотные колебания, предсказываемые динамикой решетки, являются, конечно, звуковыми волнами, и их частоты, полученные из динамики решетки при некоторых предположениях относительно межмолекулярных сил, должны быть связаны с материальными константами теории упругости. Учение о симметрии кристалла в макроскопической теории упругости было разработано в значительной мере бывшим учителем Борна Фогтом и, несомненно, хорошо знакомо Борну. Уже давно было известно, что молекулярная теория упругости, основанная на простой картине частиц, расположенных в вершинах решетки Бравэ и взаимодействующих посредством центрально-симметричных сил, не соответствует макроскопической теории, поскольку не приводит к достаточному числу независимых констант упругости. Борн показал, что его новый подход свободен от этого недостатка простой молекулярной теории. В случае действительной решетки алмаза, не являющейся решеткой Бравэ, можно получить все те константы, которые требуются в макроскопическом подходе. Для этого нужно предположить наличие сил, зависящих от углов между векторами относительного положения атомов углерода. С другой стороны, при некоторых упрощающих предположениях, сделанных Борном, возникало новое соотношение между константами упругости алмаза. Экспериментальные данные того времени не давали возможности подтвердить или опровергнуть это соотношение, и Борн должен был дожить до эдинбургского периода, чтобы увидеть свои идеи подтвержденными на опыте.

То, о чем мы говорили до сих пор, относилось к роли динамики решетки в определении термодинамических и упругих свойств вещества. Дальнейшее развитие подхода приводит к включению в рамки той же картины вопросов об электромагнитных взаимодействиях в кристаллической решетке. В качестве выдающегося примера работ Борна на эту тему можно, следуя его собственному выбору, указать работу об оптической активности [21], написанную в период, закончившийся его военной службой во время первой мировой войны. Здесь было известно явление, описание которого на основе предшествующих воззрений требовало введения специальной «гиротропной силы», не имевшей обоснования в фундаментальной теории. В рамках динамики решетки стало возможным получить полное описание этого явления, причем природа его оказалась связанной со структурами, обладающими низкой степенью симметрии. Таким образом, Борну удалось разрешить более сложную проблему, чем в предыдущей работе, и в его мастерском подходе она получает замечательно четкое и прямое объяснение.

В связи с этим будет уместно, несмотря на временное отклонение от основной темы нашего обсуждения — физики кристаллов, упомянуть работу Борна 1915 г. [22] об оптической активности жидкостей и газов. Здесь не сказываются специфические черты динамики решетки, но вместе с тем весь дух решения проблемы (предложенной Борну Дебаем) очень близок к предыдущей работе. При этом мы снова встречаемся с примером фундаментального исследования, изложение которого характеризуется чрезвычайной ясностью и последовательностью и со всей несомненностью вскрывает принципы, лежащие в основе определенного физического явления. Окончательный результат, гласящий, что для наличия у вещества оптической активности его молекулы должны содержать не менее четырех атомов (на современном языке — должна существовать возможность определения «винтового направления»), в настоящее время можно считать очевидным исходя из представлений, основанных на теории групп. Однако это не умаляет значения и красоты первого в истории вывода этого результата.

Последние замечания заставляют нас вспомнить еще об одном направлении работы борновской мысли, которое не нашло отражения в его опубликованных работах, если не считать упоминания в предисловии к «Избранным трудам». Будучи учеником Фогта, Борн, как уже было сказано, хорошо представлял себе мощь теории групп как инструмента, помогающего в формулировке новых идей и в решении физических задач. Те из наших современников, кто изучает соответствующую область физики, найдут множество подтверждений этому, особенно в двух описанных работах. Вместе с тем в этот период Борн не написал ни одной статьи, которая была бы явно связана с теорией групп. Однако, по его словам, он был инициатором работы о применении теории групп к молекулам и кристаллам, которую он предполагал написать совместно с нидерландским студентом Брестером. Фактически же работа была опубликована за подписью одного Брестера (в полном виде — как диссертация Утрехтского университета); это было сделано для обеспечения его научной карьеры в Нидерландах. Сам Борн считал, что его мысли на этом этапе знаменовали определенный шаг вперед по пути, которым позже шли Вигнер и др., отталкиваясь от квантовой механики.

Возвращаясь опять к области физики кристаллов, необходимо отметить еще несколько работ Борна [27—29], выполненных им, частично совместно с Ланде, во время первой мировой войны, когда он был также в близких отношениях с Маделунгом. Предметом исследований Борна в этих работах были ионные решетки, для которых по меньшей мере часть взаимодействия должна иметь очевидную электростатическую природу. Предполагалось, что постоянная решетки и коэффициент сжимаемости кристалла могут быть вычислены при некоторых простых допущениях о законе взаимодействия. Борн рассказывал о том, как он и Ланде, упорно пытавшиеся решить задачу суммирования кулоновских потенциалов, были поражены и восхищены тем ее решением, которое получил Маделунг. Однако после того, как эта в сущности математическая трудность была преодолена, главной проблемой, представляющей наибольший интерес, становилось построение модели для определения короткодействующих сил, обеспечивающих стабильность ионной решетки. Какие модели для этого были в их распоряжении? С точки зрения нашего современника трудно представить себе, но фактически у них не было другого выбора, кроме предположения о том, что ионы состоят из атомных ядер и окружающих их электронов, движущихся по *плоским боровским орбитам.* При этом плоскости орбит должны были иметь совершенно определенное расположение в рассматриваемом кристалле: здесь существенное значение имела симметрия кристаллической решетки. Современных читателей вряд ли удивит, что подобные попытки, хотя и замечательные по изобретательности и показательные в отношении стиля научных исследований Борна, не привели к полному успеху. В процессе работы был период, когда соавторам казалось, что им удалось количественно объяснить значения постоянной решетки и коэффициента сжимаемости для простых ионных кристаллов; однако в дальнейшем обнаружилась элементарная алгебраическая ошибка, приводившая к занижению вычисленного коэффициента сжимаемости в 2 раза. Окончательный результат означал, что исходная модель с потенциалом r^{-5} должна быть заменена другой, ранее неизвестной, в которой потенциал имел бы вид r^{-9}. Примечательно, что значение показателя $n = 9$ вместо $n = 5$ соответствует ожидаемому в модели с большей степенью симметрии, чем у модели плоских орбит. Эта работа хотя и является с нынешней точки зрения совсем устаревшей, заслуживает упоминания, поскольку Борн подчеркивал, что отрицательный результат применения боровской модели атома и сведения о наличии более высокой симметрии послужили для него значительным толчком в направлении поиска новой внутренне согласованной квантовой механики.

Теперь мы перейдем к послевоенному (после первой мировой войны) периоду научной биографии Борна, начиная с которого доминирующей темой его научных работ уже нельзя считать физику твердого тела и теорию кристаллической решетки. Все в большей мере его внимание начинают привлекать проблемы квантовой теории; об этом пойдет речь ниже. Однако Борн и все возрастающее число его сотрудников продолжают вносить вклад в область физики, близко связанную с обсуждавшимися пионерными работами. Здесь нет возможности уделить всем им то внимание, которого они заслуживают. Мы ограничимся лишь упоминанием некоторых разделов физики, для которых они стали основополагающими.

Изучение ионных кристаллов явилось первым мостом между физическими и химическими методами исследования вещества. Физика оказалась в состоянии количественно предсказывать значения энергии кристаллической решетки; химиков же интересовали в первую очередь значения тепловыделения в химических реакциях. Проанализировав галогениды щелочных металлов, Борн показал, что, зная потенциалы ионизации таких молекул, можно связать между собой указанные физические и химические величины. Это был первый пример определения теплоты химической реакции на основании одних только физических данных, и поэтому работа Борна [30] является краеугольным камнем теоретической химии. Это отчетливо сознавал Габер, автор ставшего широко известным способа изложения идей Борна.

Другое направление работ связано с учетом конечных размеров кристалла и определением его поверхностной энергии. Последующие работы посвящены распространению динамической теории на случай больших амплитуд колебаний, т. е. учету ангармоничности и ее влияния на удельную теплоемкость при высоких температурах. В этих работах, написанных совместно с Э. Броди [42, 43], применяются некоторые методы общей механики (Гамильтона—Якоби), которым суждено было приобрести огромное значение в последующем развитии квантовой механики.

Наконец, следующим неизбежным и в определенном смысле заключительным шагом в создании динамики решетки как части законченной физической теории была термодинамика кристаллов. Работой Борна [46] на эту тему (также совместной с Э. Броди) мы закончим наш перечень того, что было сделано им в обсуждаемой области за период, непосредственно предшествовавший созданию квантовой механики.

В последующие годы Борном написан ряд важных работ, явившихся продолжением ранних работ по динамике решетки. Интересна работа [83], написанная в сотрудничестве с Д. Э. Майером и посвященная ионным кристаллам. В ней Борн возвращается к вопросам, изучавшимся им в период первой мировой войны, но уже с новых позиций, исходя из квантовой механики. С течением времени стало ясно, что первая работа на эту тему содержала ряд неизбежных дефектов. Работа Лондона о силах Ван-дер-Ваальса с очевидностью показала, что эти силы в квантовой механике играют чрезвычайно важную роль наряду с электростатическими и короткодействующими силами прежних теорий. Значительно прояснился вопрос, почему каждое вещество предпочитает свою, вполне определенную кристаллическую решетку. Кроме того, появились серьезные доводы в пользу отказа от описания сил отталкивания степенным законом и замены его экспоненциальным. Так был получен потенциал Борна—Майера, который привел к вполне согласованным значениям энергии решетки; из них затем были получены очень хорошие значения энергии электронного сродства для галогенов.

Мы оставим без внимания большое число довольно самостоятельных работ. Новый расцвет физики твердого и жидкого состояния в работах Борна наблюдается в эдинбургский период. Опять появляется большое число работ и самого Борна [100, 102, 103, 107], и совместных публикаций с более молодыми сотрудниками, но очень значительное количество их остается подписанными лишь его учениками. Связь с предыдущими работами Борна довольно очевидна. Так, проблема стабильности кристаллической решетки обсуждается в серии из девяти работ; Борн является автором первой и последней из них [100, 107]. Уже говорилось о том, что экспериментальная проверка предсказаний Борна относительно констант упругости алмаза была проведена именно в этот, более поздний период. Борн вспоминал, что эти новые эксперименты стимулировали его дальнейшую работу, результатом которой явился ряд общих теорем о стабильности кристаллической решетки, справедливых при весьма широких предположениях относительно сил взаимодействия. Эта работа перекликается с некоторыми идеями Борна, опубликованными ранее, в эдинбургский период [98], согласно которым плавление отождествляется с исчезновением константы упругости. Хотя такая картина плавления не получила широкого признания и, казалось, не отражала существа явления, интересно отметить, что самые последние идеи, относящиеся к этой проблеме, оказываются значительно ближе к точке зрения Борна, чем это можно было предвидеть. Было установлено, что некоторые переходы между двумя твердыми фазами сопровождаются исчезновением не константы упругости, но частоты нормальной моды колебаний (не обязательно акустической). Более того, в некоторых недавних работах аналогичное рассмотрение применяется к переходу между твердой и жидкой фазой, т. е. к плавлению.

Наиболее значительной темой, развивавшейся эдинбургской школой последователей Борна, было влияние теплового движения на рассеяние рентгеновских лучей. Соответствующие работы [103, 109, 114] послужили дополнительным подтверждением справедливости подхода, основанного на динамике решетки, и его значение после этого стало общепризнанным. К сожалению, это привело к длительной и не совсем сдержанной дискуссии с Ч. В. Раманом, который пытался объяснить результаты своих собственных и других наблюдений на основании совершенно иной картины явления. Сейчас не вызывает сомнения, что Борн и его последователи были абсолютно правы, когда искали объяснение «дополнительных пятен Лауэ» в теории, разработанной Борном за много лет до этого.

В течение этого периода Борн и Брэдберн [120, 121] применили динамику решетки также к рассмотрению рамановского рассеяния. Их статья об эффекте Рамана второго порядка и сейчас остается одной из наиболее авторитетных работ на эту тему.

Вскоре после этого Борн вызвал к жизни еще одно направление развития теории твердого тела, которое, как это ясно сейчас, оказалось весьма важным. В 1951 г. он написал две статьи [136, 137] об ангармонических колебаниях большой амплитуды в кристалле, для которых применение теории возмущений является совершенно необоснованным. Возможно, потому, что эти статьи были напечатаны на немецком языке в не слишком широко читаемых изданиях, они остались сравнительно мало известными. Даже работы ученика Борна, Хутона [2], для которого эти статьи служили отправным пунктом, привлекли к себе внимание [3] раньше, чем было по достоинству оценено значение статей Борна в современном контексте «приближения самосогласованных фононов».

Интерес Борна к молекулярной теории жидкостей стимулировался работами Власова и дискуссиями с Р. Фюртом. Он пытался разработать обобщение кинетической теории, которое позволило бы применить ее к жидкостям. Им было предложено обобщение уравнения Больцмана, основанное на последовательном использовании уравнений непрерывности в пространствах координат, скоростей, ускорений и т. д. отдельных молекул и введении некоторого статистического описания, позволяющего решить эту систему взаимно связанных уравнений. Этот метод был изложен в серии статей [123, 126, 127, 130], написанных совместно с Грином и др. Совершенно естественным является тот факт, что основные идеи Борна, по существу своему весьма простые, одновременно возникли и у других. Кирквуд с сотрудниками примерно в это время начал публикацию серии статей, весьма важную статью на эту тему написал также Боголюбов. Очень изящная работа Ивона в то время не была известна за пределами Франции. Однако редко бывает так, чтобы независимые работы полностью перекрывались, и в публикациях борновской школы имеется ряд специфических деталей, которые оказали существенное влияние на развитие молекулярной теории жидкостей и значение которых, по-видимому, еще ярче проявится в будущем.

Квантовая механика и фундаментальные проблемы физики

Хотя не подлежит никакому сомнению, что уже создание теории динамики кристаллической решетки и неоспоримые заслуги в ее развитии позволяют причислить Макса Бор-

[2] *D. I. Hooton.* Z. Phys., 1955, **142**; Phil. Mag. (7-th ser.), 1958, **46**, p. 422, 433, 485 and 701; (8-th ser.), 1958, **3**, p. 49.

[3] *N. R. Werthamer.* Amer. J. Phys., 1969, **37**, p. 763.

на к крупнейшим физикам нашего столетия, сам он эту часть своей научной деятельности расценивал невысоко по сравнению с его вкладом в разработку и установление принципов квантовой механики. В 1954 г. с довольно значительным опозданием его роль в великой революции физической мысли была по достоинству оценена присуждением ему Нобелевской премии, и самому Борну эта оценка, вне всякого сомнения, доставила такое удовлетворение, которого он не испытывал бы от награды за любые другие его работы. Тем не менее оценка вклада Борна в создание квантовой механики сопряжена с некоторыми трудностями. Триумфу 1925 г., разделявшемуся Борном, предшествовал долгий подготовительный период, который здесь нет возможности осветить во всех деталях. В предыдущем разделе мы обращали внимание на то, как Борн во многих случаях испытывал ощущение, что его работа может получить полное завершение только после создания радикально новой квантовой механики. Об этом же писал нам профессор Гейзенберг, которому мы благодарны за его любезность. Научным руководителем Гейзенберга в первые годы был Зоммерфельд; кроме того, он общался с Паули, а также с Бором и Крамерсом. Все это способствовало формированию его интересов в том направлении, в котором позднее произошел решающий прорыв, породивший квантовую механику. Вместе с тем он подчеркивает, что именно особый дух Геттингена, твердая уверенность Борна в том, что только создание новой, внутренне согласованной квантовой механики могло быть провозглашено целью фундаментальных исследований, явились решающим фактором в окончательном созревании его идей. Поэтому вполне закономерным было то, что после первой основополагающей статьи Гейзенберга квантовая механика активно развивалась всей геттингенской школой и в том числе Максом Борном, вносившим огромное богатство собственных оригинальных мыслей и, кроме того, руководившим своими младшими коллегами.

Однако, прежде чем переходить к более подробному освещению «золотого периода», мы вернемся к более ранним работам Борна, относящимся к тому разделу физики, который связан с фундаментальными вопросами квантовой теории.

Среди опубликованных работ Борна можно найти упоминание «квантовой гипотезы» в статье [16] 1913 г. и боровских орбит в статье [27] 1918 г., совместной с Ланде. Первое явное обращение к квантованию встречается в работе [43], совместной с Броди, где обычный для того времени метод перехода от классического к квантовому описанию применялся к общим колебательным системам. Первая работа, целиком посвященная непосредственно квантованию простых механических систем [48], написана им вместе с Паули всего лишь в 1922 г. Можно вполне определенно считать, что она знаменует собой начало нового периода, когда Борн присоединился к небольшой группе ученых, прилагавших усилия к решению самой загадочной и трудноразрешимой проблемы из всех, с которыми сталкивалась физика до тех пор.

Если не по содержанию, то, во всяком случае, по форме статья Борна и Паули довольно близка к почти одновременно появившейся статье Борна и Броди [43], первоначальная цель которой была связана с проблемами динамики решетки. В первой из этих статей предметом изучения была многопериодическая система такого же типа, как и те, к которым тогда применялись известные правила квантования Бором, Зоммерфельдом и др. В обеих работах главное затруднение состояло в том, как следует трактовать эти правила при наличии возмущения системы. Как и можно было ожидать, решение этого вопроса оказалось далеким от завершенности; связь между дискретными и непрерывными значениями энергии системы не поддавалась описанию с помощью известных в то время методов. Авторы выражали беспокойство также в связи с неудовлетворительностью методов Зоммерфельда в применении к задаче о скрещенных электрическом и магнитном полях.

Трудности, содержащиеся в проблеме жидкого гелия, как мы знаем сейчас, требовали для своего разрешения не только новой квантовой механики, но и существенно большего. Поэтому, когда Гейзенберг с Борном объединили усилия для написания работы [53], посвященной гелию, эта работа, по-видимому, не явилась серьезной вехой в развитии физики, так что мы можем не задерживать на ней внимание. Мы пока не будем также останавливаться на весьма многочисленных работах, которые хотя и посвящены вопросам квантовой теории, но связаны в основном с решением частных физических задач, а не с центральной проблемой построения всего здания квантовой механики. Борн не обходил своим вниманием и фундаментальные проблемы, и вскоре появилась его статья «О квантовой механике» [57], видимо, впервые содержащая в заглавии слова «квантовая механика»; она датируется 1924 г. В ней анализируются дисперсионная формула Крамерса и работа Гейзенберга об аномальном эффекте Зеемана. Борн уже довольно отчетливо представляет себе контуры будущей теории, но вместе с тем очевидно, что место решающего прорыва от него ускользает. Основная идея статьи состоит в применении метода, использованного Крамерсом для описания возмущения атомной системы световой волной, к исследованию состояний Бора — Зоммерфельда в многоэлектронном атоме, где взаимодействие электронов рассматривается как возмущение.

К 1925 г. сотрудником Борна оказывается Иордан, работавший над теми же вопросами, и их совместная работа [59] о квантовании апериодических процессов, вероятно, может рассматриваться как последняя неудачная попытка достигнуть прорыва. На этот раз анализируется вопрос, как классическое рассмотрение многопериодической системы с апериодическим возмущением можно сопоставить с правилами квантования Бора и принципом соответствия.

Описание периода 1924—1925 гг. с точки зрения оценки значения работ Борна и его сотрудников почти полностью совпадает с законченной главой из истории квантовой механики; однако теперь мы подошли к такому моменту этой истории, когда центральной фигурой на ее сцене безоговорочно становится Гейзенберг. Имеются достоверные сведения, что идеи, позволившие воплотить в реальность мечты Борна о создании самосогласованной квантовой механики, возникли у Гейзенберга в то время, когда он ненадолго покинул Геттинген и не поддерживал контакта с коллегами, но он познакомил Борна со своими результатами на очень ранней стадии их получения. Во всех работах этого периода и последующих Борн настойчиво подчеркивал, что новая концепция квантовой механики целиком принадлежит Гейзенбергу. Тем не менее было бы несправедливым по отношению к Максу Борну ограничиться только констатацией этого исторического факта.

Статьи из Геттингена по новой квантовой механике появлялись в такой последовательности:

1. Пионерная работа Гейзенберга.

2. Работа [60] Борна и Иордана, основывающаяся на работе Гейзенберга.

3. Совместная работа [61] Борна, Гейзенберга и Иордана.

То, что сегодня подразумевается под гейзенберговской формулировкой квантовой механики, несомненно содержится в этих трех работах, и фактически не так уж трудно в них различить ту долю, которая принадлежит Максу Борну [4].

Гейзенберг вначале поставил задачу отыскания такого теоретического формализма, который отвергал бы использование величин, принципиально не измеримых экспериментальными средствами. Он смог дать некоторые вполне точные и подробные рецепты видоизменения дисперсионной формулы Крамерса (а в принципе — и других подобных выражений, использовавшихся в то время в процедуре квантования), заменив классические переменные совершенно новыми, специфически квантовыми объектами. При таком подходе классические переменные рассматривались как функции координат, описывающих по отдельности каждую из боровских орбит атома, причем формулы включали по две орбиты или больше. После этого каждой переменной сопоставлялся некоторый квантовый объект, с самого начала относившийся к различным парам орбит и, следовательно, связанный каким-то не совсем еще ясным способом с переходами между квантовыми состояниями. Хотя правила Гейзенберга возникли на чисто интуитивной основе и не имели сколько-нибудь строгого обоснования, их формулировка была весьма убедительной, поскольку было очевидно, что предлагаемая процедура является вполне однозначно определенной, довольно легко может быть применена в тех случаях, когда предшествующие попытки получить самосогласованное решение приводили к чрезвычайным усложнениям, а результаты оказываются по меньшей мере столь же удовлетворительными, как и полученные до тех пор.

Одним из частных результатов работы Гейзенберга было то, что на новом языке условие квантования Бора—Зоммерфельда принимало вид алгебраического выражения очень простой структуры.

---

[4] Авторы не видят оснований для несогласия с оценкой вклада Борна, сделанной им самим. О ней можно вполне определенно судить на основании замечаний, содержащихся как в перечисленных статьях, так и в других публикациях этого периода.

Статья Борна и Иордана [60] полностью воспринимает проделанный Гейзенбергом анализ и подводит под его наводящие рассуждения серьезную базу вполне разработанного математического формализма. В ней показано, что правила Гейзенберга являются некоторыми утверждениями алгебры матриц (этот раздел математики в то время не был широко известен физикам), а его условие квантования, заменившее условие Бора—Зоммерфельда, эквивалентно диагональной части матричного равенства

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i} I. \tag{1}$$

Соотношение, полученное Гейзенбергом, мы сегодня записали бы в виде

$$\sum_k (p_{nk}\, q_{kn} - q_{nk}\, p_{kn}) = \frac{h}{2\pi i}, \tag{2}$$

но только Борну и Иордану принадлежит такая форма записи этого соотношения, так же как и его обобщение в виде (1). Из формулы (1) следует также обращение в нуль недиагональных элементов в левой части равенства. Это было предсказание, которое в то время не могло быть проверено экспериментально. Сам Борн говорил, что он считает установление соотношения (1) одним из двух своих важнейших достижений в разработке основ квантовой механики, однако он все же не совсем справедлив по отношению к себе в оценке того, насколько важным было осознание полного соотношения (1) на столь ранней стадии развития квантово-механических воззрений. В остальной части статьи Борна и Иордана демонстрируется, как первоначальное предложение Гейзенберга о видоизменении формулы Крамерса может быть ясно выражено на матричном языке, а также делаются первые осторожные шаги к внутренне согласованному описанию электромагнитного взаимодействия атомных систем.

Третья работа, подписанная тремя авторами [61], характеризуется значительно большей широтой охвата вопросов и уверенностью авторов в том, что их выводы покоятся на твердой основе. Если первые две статьи ограничиваются рассмотрением динамических систем с одной степенью свободы, то в третьей статье подход является столь же общим, как и полное гамильтоновское описание, правда, с одним ограничением — условием периодичности системы. Вызывает большое сожаление, что эта оригинальная статья редко попадает в руки современных читателей. В ней очень много такого материала, который годился бы для любого стандартного учебника: канонические преобразования и их использование в теории возмущений, соотношения коммутации для момента количества движения и все получающиеся из них следствия, существование одновременно дискретного и непрерывного спектра, двучленная формула для флуктуаций энергии поля излучения (здесь приводится также сравнение с соответствующей ситуацией в теории кристаллической решетки)— все это содержится в статье, и можно не сомневаться, что доля участия в ней Макса Борна была весьма существенной.

Последующие работы Борна ясно показывают, что его внимание особенно привлекал вопрос о трактовке непрерывных спектров в матричном подходе, т. е. об описании непериодических процессов, примером которых является рассеяние. Напомним, что эта проблема занимала большое место в сознании Борна уже в начале 20-х годов.

Выяснению проблемы в значительной степени способствовал волновой подход Шредингера. Хорошо известно, что исходный пункт построений Шредингера был совершенно иной, чем у Гейзенберга и Дирака, и поначалу создавалось впечатление, что он предлагает совсем другую атомную механику, не содержащую элемента разрывности (квантовых скачков), столь характерного для ранней фрагментарной теории атома. Именно это обстоятельство представлялось Шредингеру наиболее серьезным доводом в пользу правильности его подхода. Однако вскоре он сам доказал, что, несмотря на кажущуюся полную противоположность, его и матричная теории в математическом отношении эквивалентны, и поэтому Борну не потребовалось в корне перестраивать способ своего мышления, чтобы воспользоваться методами Шредингера. Более того, именно в силу заинтересованности Борна изучением апериодических явлений, в которых отсутствует дискретный спектр уровней энергии, шредингеровский подход к квантовой механике оказался для него очень удобным. До появления шредингеровской трактовки представители геттингенской школы пользовались исключительно языком «наблюдаемых» (термин Дирака) и соответствующих им матриц. Понятие волнового вектора (или волновой функции, на языке Шредингера), описывающего квантовое состояние, не входило в теорию явным образом. Только в статье Борна, Гейзенберга и Иордана волновой вектор фигурировал в том разделе, где говорилось о связи матричной механики с теорией квадратичных форм. Борн отмечал в своих воспоминаниях, что уже тогда размышления над многомерными векторами этой теории зародили в нем идеи, которые он позднее развил. Они впервые были опубликованы в виде короткой заметки [63] в журнале «Zeitschrift für Physik», а затем в классической статье [66]; обе работы имеют одинаковое название «К квантовой механике процессов соударения». Содержание этих работ хорошо известно и не требует подробного пересказа. В интерпретации Борна шредингеровская волновая функция характеризует вероятность нахождения частицы в различных точках пространства; он без колебаний принимает допущение, что вероятностный элемент является составной частью физического содержания уравнений, претендующих на титул фундаментальных уравнений динамики частицы. Борн ясно утверждает, что такой взгляд является прямым развитием той ситуации, которая возникла в электродинамике после введения Эйнштейном представления о фотонах. Он смог продемонстрировать довольно детальный анализ (позднее вошедший во все учебники) того, как из такой картины получается совершенно точное математическое описание всего, что экспериментатор в действительности наблюдает в опытах по рассеянию. Когерентная суперпозиция функций состояния — специфическая черта квантовой механики — с самого начала учитывается вполне корректным образом. Эти работы, бесспорно, знаменуют собой начало коренного переворота в мышлении физиков, а в дальнейшем — и в мышлении всего человечества вообще. Именно в первую очередь за них Максу Борну была присуждена Нобелевская премия.

Можно утверждать, что эти работы дали ответ на вопрос, каким образом физик должен сопоставлять результаты своих экспериментов с выводами, следующими из формализма квантовой механики. Правда, это не означает, что все содержание «статистической интерпретации» было или могло быть вполне понято в то время. Значительно более глубокий анализ процесса наблюдения и измерения, их интерпретация на основе особых свойств физического мира, данные главным образом Гейзенбергом (формулировка принципа неопределенности) и Бором (принцип дополнительности), справедливо считаются следующим важнейшим шагом в этом направлении. Несомненно, большинство физиков вскоре стали воспринимать идеи так называемой копенгагенской школы как вполне удовлетворительную формулировку новых представлений. Сегодня физики продолжают почти непрерывно спорить о философском смысле картины, оказавшейся столь эффективной в повседневной физической практике. При этом они, как правило, исходят из концепции, развитию которой положили начало работы Борна. Однако следует отметить, что довольно значительное число ведущих физиков старшего поколения, работавших до 1925 г., не согласились принять тот образ мысли, который предлагался этой интерпретацией атомной физики. Среди них по меньшей мере четверо принадлежат к числу основателей квантовой теории: Планк, Эйнштейн, де Бройль и Шредингер. В течение многих лет Борн затратил немало времени и сил на то, чтобы достигнуть согласия по философской интерпретации квантовой механики с Шредингером и особенно с Эйнштейном, который до самой своей смерти (об этом мы уже говорили) оставался его близким другом, несмотря на острое расхождение в этом вопросе. Вряд ли есть необходимость вникать в историю их спора; скажем только, что не затихавшая с годами дискуссия Борна и Эйнштейна была в одной из самых активных своих стадий как раз в период выхода Борна в отставку с эдинбургской кафедры. Хотя попытки Борна отвести эйнштейновскую критику «статистической интерпретации» квантовой механики оказались недостаточными для преодоления затруднений Эйнштейна во всей глубине, их результатом на этом позднем этапе научной карьеры Борна был свежий подход к общей проблеме, потребовавшей совершенно оригинального анализа. Он показал, что и в классической статистике практическая невозможность разумного сопоставления любому наблюдаемому процессу каких-то точных начальных условий приводит к возникновению многих черт, весьма типичных для квантовомеханического подхода. Развитие этих соображений содержится в работе [146], написанной совместно с Людвигом (1958), а вся история дискуссии между Борном и Эйнштейном получила замечательное документальное отображение в опубликованной их переписке [178].

Здесь будет, пожалуй, уместным затронуть — по необходимости кратко— некоторые другие публикации Борна, в которых он выходит за рамки частной проблемы интерпретации квантовой механики и высказывает замечания, обнаруживающие его общую философскую позицию. Борн никогда не отважился писать работы по философии чисто специального порядка, но он во многих местах демонстрирует осведомленность в отношении различных философских идей. Он довольно подробно посвящает нас в свои философские воззрения в нескольких опубликованных эссе [135] и лекциях, часть которых в числе статей по другим вопросам была напечатана в сборниках «Физика в жизни моего поколения» [171, 184] и «Моя жизнь и взгляды» [176, 188]. Философские мысли Борна составляют также часть фона в его переписке с Эйнштейном.

После создания в 1926 г. квантовой механики ею стало заниматься несравненно больше людей, чем когда-либо имели отношение к этой области знаний. Ясно, что если бы геттингенская школа и не была ликвидирована ходом политических событий, она все равно не смогла бы очень долго оставаться в прежнем положении лидера. В каждом научном центре внимание неизбежно должно сконцентрироваться лишь на некоторых из огромного числа возникших новых областей исследования. Продолжая прежние направления своей работы, Борн вместе с последовательно сменявшимися учениками в Геттингене, Кембридже и Эдинбурге работал над рядом вопросов типа «прикладной квантовой теории». Часть из них уже обсуждалась, множество других можно почерпнуть из библиографии. Мы упомянем еще одну работу, которая особенно заставляет вспоминать о Борне тех, кто работает в области молекулярной физики. В совместной работе с Оппенгеймером [70] проведено систематическое разделение движения электронов, колебательного и вращательного движения в молекуле, причем способ исследования и поныне считается стандартным. Однако сам Борн говорил, что его значительно больше беспокоило стремление к углублению понимания законов природы, выходящих за пределы квантовой механики. Около 1930 г. всем, кто занимался подобными фундаментальными вопросами, стало ясно, что объединение теории относительности с квантовой механикой представляет новые, чрезвычайно большие трудности. Эта проблема далека от полного разрешения и сегодня; она породила обширную область экспериментальных и теоретических исследований — физику высоких энергий. Бурное развитие этой области началось сразу после 1925 г., и надо отметить, что Борн не оставался долго в его главном русле. В частности, он был только сторонним наблюдателем становления современной ядерной физики, начало которому положило открытие нейтрона. Способ мышления, ставший сегодня обычным для теоретиков-«фундаменталистов», не был широко принят им на вооружение, и его собственный подход к предмету не соприкасался близко с работами других.

Примерно в то время, когда Борн ненадолго поселился в Кембридже, он начал разрабатывать новый подход к электродинамике, одной из задач которого было преодоление трудностей, связанных с бесконечной собственной энергией электрона; тогда это была одна из самых насущных фундаментальных проблем. Борн сам впоследствии писал, что его теория вполне могла бы появиться на четверть столетия раньше. Эта теория, известная под названием «теории Борна—Инфельда», не получила всеобщего признания, несмотря на всю ее внутреннюю красоту и отсутствие в ней проблемы собственной энергии электрона. Примечательно, однако, что предсказываемые ею нелинейные эффекты электродинамики, по крайней мере в качественном отношении, весьма сходны с многими эффектами современной теории, которая в то время только создавалась, а сейчас считается наиболее приемлемой.

Несколько лет спустя, в Эдинбурге, Борн предложил принципиально новый подход к построению теории, которая была бы развитием квантовой механики, а именно, принцип взаимности. Если в качестве символа научной революции 1925 г. выбирать какое-нибудь математическое выражение, то им должно быть уравнение (1) на с. 257. Борн предлагает возвести на принципиальную основу явную симметрию этого уравнения по отношению к координате q и импульсу p. Подробный анализ возможностей, открываемых этим руководящим принципом, проведен Борном совместно с его учеником Грином. Хотя эти идеи не имеют видимой связи с работами, проводившимися в то время другими учеными, Грин впоследствии установил их близость к проблеме изучения «внутренней структуры» элементарных частиц — сложной области, изобилующей специфическими, до сих пор не поддающимися полному выяснению вопросами.

Борн — автор учебников

Оценка значимости вклада Макса Борна в науку будет совершенно неполной, если не сказать по меньшей мере о некоторых выдающихся книгах и монографиях, работа над которыми всегда на протяжении его многолетней научной деятельности являлась одним из самых значительных ее составляющих. Эти книги замечательны как по широте рассмотренных в них вопросов, так и по разнообразию уровня изложения, рассчитанного на различные категории читателей.

На одном конце этого спектра располагаются основополагающие работы Борна по динамике решетки, написанные им на разных этапах его исследований в этой области и открывающиеся «Динамикой кристаллической решетки» [158], изданной в 1915 г. В этой книге были собраны работы, которые в то время фактически представляли поле деятельности только самого Борна. Последней в ряду этих книг стоит монография, написанная им совместно с Кун Хуаном [170] и увидевшая свет в 1954 г. Она и сегодня является важнейшей и ключевой книгой, необходимой для работы нынешнего поколения физиков, научные интересы которых относятся к этой огромной и широко развитой области физики.

В промежутке же между этими двумя книгами уместилось два обзора, вышедших из-под пера Борна: статья для «Энциклопедии математических наук», изданная в виде отдельной книги в 1923 г. [161], и совместная с Марией Гепперт-Майер статья в «Handbuch der Physik», также увидевшая свет отдельным изданием [166] в 1933 г.

Борн написал две книги по квантовой механике. Каждая из них в существенной степени проигрывает от того, что была в свое время приспособлена к нуждам данного момента. В своих «Лекциях по атомной механике» [162] Борн представил мастерски выполненную картину классической.механики многопериодических систем, которые были столь важны для понимания атомной структуры в период, предшествовавший 1925 г. Эта книга вышла из печати как раз тогда, когда родилась квантовая механика, и получила в то время гораздо меньше признания, чем она заслуживала благодаря необычайно прозрачному разъяснению охватываемого ею круга проблем. Непосредственным продолжением указанной работы Борна можно считать написанную им (совместно с Иорданом) «Элементарную квантовую механику» [164], относившуюся к тому времени, когда еще не стали известными идеи Шредингера и Дирака, открывшие дорогу к более доступному рассмотрению ряда относящихся к этой области вопросов.

Квантовая механика и динамика решетки — это те две области науки, в которых появление книг, написанных Борном, является естественным и закономерным. Однако чрезвычайно замечателен тот факт, что два наиболее хорошо известных курса, ему принадлежащих, относились к теоретической оптике, т. е. предмету, который никогда не занимал центрального места в области его исследований. Первая из этих книг [165] была издана в Германии незадолго до того, как Борн оказался в изгнании. Она оказала немедленное воздействие на преподавание оптики и, несомненно, имела бы еще большее на него влияние (сказанное относится как к немецкому оригиналу, так и к сразу же появившимся переводам на другие языки), если бы не политическая обстановка того времени. Однако к тому моменту, когда Борн решил вновь обратиться к этой теме, выяснилась необходимость существенной переработки книги.

В 1959 г. были изданы «Принципы оптики» Борна и Э. Вольфа [172]. Эта книга, как и предшествующее ее издание, представляла собой систематическое изложение предмета, базировавшееся на электромагнитной теории всех оптических явлений, которые могли быть описаны в терминах непрерывного распределения материи. Изложение предмета было при этом существенно модифицировано, а круг рассмотренных вопросов расширен. О значении этой книги говорит то обстоятельство, что уже сейчас увидело свет ее четвертое издание.

Для тех, кто недостаточно знаком с ранними работами Борна, может показаться, что его выдающийся вклад в разъяснение основ эйнштейновской теории относительности, нашедший свое выражение в книге [159] (переведенной на несколько иностранных языков), также не находится в непосредственной связи с областью его собственных работ. В самом деле, за исключением раннего периода научной деятельности Борна, работы по теории относительности не были главной темой его исследований. Несмотря на это книга Борна, посвященная идеям и приложениям эйнштейновских работ, сыграла очень большую роль не только в момент ее появления: можно и сейчас утверждать, что она остается почти непревзойденной.

Данное Борном изложение основ теории относительности находится на таком уровне, который делает его книгу полезной для гораздо более широкого круга читателей, чем любая из других, ранее названных его работ; однако она не принадлежит к числу тех, которые наиболее популярны именно среди физиков. Такая популярность характерна для «Атомной физики» [167], которая получила очень широкое распространение в качестве учебника для студентов старших курсов в странах, говорящих на английском языке. Эта книга совмещает в себе замечательное по образности изложение основной части предмета и исключительно полезные математические приложения; вероятно, найдется немного физиков, которые не оценили бы на опыте своих собственных исследований важность этого труда.

Следующей в числе научно-популярных книг Борна должна быть названа его «Беспокойная Вселенная», адресованная совершенно неподготовленному читателю; к ней примыкают различные публикации последних лет его жизни, которые, однако, не связаны с физикой столь прямым образом и о которых будет упомянуто ниже.

Физик и общество

Статья Борна и Людвига от 1958 г. должна быть названа последней научной работой Макса Борна — в узком смысле этого понятия. Однако это была далеко не последняя из его публикаций. Хотя некоторые из последующих его работ несли в себе элементы воспоминаний, но в общем и целом они были далеки от экскурсов в прошлое. С самого начала его ухода на пенсию — если не раньше — он определил новую цель своей деятельности: это были проблемы мира и будущего человечества. Борн не был вовлечен в научные и политические события, достигшие кульминационной точки в ядерных взрывах в Хиросиме и Нагасаки. Однако как ученый он совершенно ясно понимал значение той революции в судьбах и делах людей, которую ознаменовали эти события, а также и ту катастрофу, на грань которой они могли поставить — или поставили — человечество. Будучи людьми исключительно впечатлительными и отзывчивыми, Борн и его жена Хедвиг оказались с неизбежностью вовлеченными в лидирующую группу лиц, кто настаивал на том, что их коллеги должны отдать себе отчет в масштабах опасности и выработать моральные принципы, определяющие их политическую позицию.

В 1955 г. от имени девяти известных ученых был выпущен манифест; среди этих ученых были Бертран Рассел и Эйнштейн (подписавший манифест незадолго до своей смерти). В манифесте подчеркивались масштабы той угрозы, перед лицом которой оказалось человечество в связи с разрушительной мощностью водородной бомбы, и еще большей потенциальной опасности, которая связана с радиоактивностью, сопровождающей ядерные взрывы. Чувства, выраженные в этом документе, сразу же нашли отклик в заявлении, сделанном группой из 18 Нобелевских лауреатов, встреча которых проходила на острове Майнау (озеро Констанцы). В нем было подчеркнуто, что любая будущая война может привести к гибели человечества, что для поддержания мира равновесие, основанное на страхе, более не обеспечивает устойчивой безопасности и что только отказ от войн может гарантировать выживание человечества. Заявление было составлено Борном, Ганом и Гейзенбергом. Совместно с Рассел-Эйнштейновским манифестом оно послужило началом Пагуошского движения, которое с тех пор играет важную роль в содействии установлению связей и взаимопонимания между учеными в области мировой политики.

Двумя годами позднее, когда ядерная политика ФРГ явилась предметом активных обсуждений, Борн выступил в качестве одного из лидеров движения «18 геттингенцев», которые сделали достоянием масс свои соображения о том, что политика ядерного вооружения является политикой самоубийства, и декларировали, что они будут категорически отказываться от участия в какой-либо научной работе, связанной с производством, испытанием или разрушительным действием ядерного оружия. Они настаивали на том, чтобы правительство ФРГ отказалось от использования такого вооружения в любой его форме.

Существует показательный параллелизм между той готовностью, с которой Борн сразу же принял новые идеи, возникшие в 1925 г. в атомной физике, и столь же естественной его уверенностью в том, что революция в наших моральных принципах и политическом мышлении является единственной надеждой на существование человечества в мире ядерного оружия. Найдется ли кто-либо, кто станет утверждать, что Борн ошибался?

Задача сбора биографических материалов для этой мемориальной статьи была чрезвычайно облегчена благодаря автобиографической части работы Борна «Моя жизнь и взгляды». Мы рады выразить признательность за помощь в этом плане профессору Г. В. Р. Борну за советы. Мы благодарны за содействие в оценке значимости научной работы Борна профессорам членам Королевского общества М. Блекману и В. Кохрану, Р. Фюрту, Г. С. Грину, В. Гейзенбергу (иностранному члену Королевского общества), Ф. Хунду, Д. Майеру, М. Гепперт-Майер, Айвору Валлеру и Э. Вольфу.

ОСНОВНЫЕ ТРУДЫ М. БОРНА

Статьи

1. Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie in Ebene und Raum unter verschiedenen Grenzbedingungen. Preisschrift und Inaugural-Dissertation. Dieterichsche Univ. Buchdruckerei Göttingen, 1906.
2. Die träge Masse und das Relativitätsprinzip. Ann. Physik, 1909, 28, 571—584.
3. Über eine Verallgemeinerung der Eulerschen Knickformel. Physik. Zschr., 1909, **10**, 383—387.
4. Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips. Ann. Physik, 1909, **30**, 1—56, 840.
5. Über die Dynamik des Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips. Verh. Dtsch. Physik. Ges., 1909, **11**, 617—623; Physik. Zschr., 1909, 10, 814—817.
6. Über die Definition des starren Körpers in der Kinematik des Relativitätsprinzips. Physik. Zschr., 1910, **11**, 233—234.
7. Eine Ableitung der Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern vom Standpukte der Elektronentheorie (Aus dem Nachlass von Hermann Minkowski bearbeitet). Math. Ann., 1910, 68, 526—551.
8. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Verh. Dtsch. Physik. Ges., 1910, **12**, 457—467.
9. Zur Kinematik des starren Körpers im System des Relativitätsprinzips. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1910, 161—179.
10. Alte und neue Fragen der Physik. Physik. Zschr., 1910, **11**, 1234—1257.

11. Elastizitätstheorie und Relativitätsprinzip. Physik. Zschr., 1911, 12, 569—575.
12. (mit Th. v. Karman). Über Schwingungen in Raumgittern. Physik. Zschr., 1912, 13, 297—309.
13. (mit Th. v. Karman). Zur Theorie der spezifischen Wärme. Physik. Zschr., 1913, 14, 15—19.
14. (mit Th. v. Karman). Über die Verteilung der Eigenschwingungen von Punktgittern. Physik. Zschr., 1913, 14, 65—71.
15. Zum Relativitätsprinzip: Entgegnung auf Herrn Gehrckes Artikel: «Die gegen die Relativitätstheorie erhobenen Einwände». Naturwiss., 1913, 1, 92, 191.
16. Zur kinetischen Theorie der Materie. Naturwiss., 1913, 1, 297—299.
17. (mit R. Courant). Zur Theorie des Eötvösschen Gesetzes. Naturwiss. 1, 674 (1913); Physik. Zschr., 1913, 14, 731—740.
18. Der Impuls-Energie-Satz in der Elektrodynamik von Gustav Mie. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1914, 23—37.
19. Zur Raumgittertheorie des Diamanten. Ann. Physik, 1914, 44, 605—642.
20. Die elektronentheoretische Bergründung der Elektrodynamik bewegter Körper. Jb. Radioakt., 1914, 11, 301—307.
21. Über die optische Aktivität der Kristalle. Elster-Geitel-Festschrift, 391—403, Vieweg, Braunschweig, 1915.
22. Über die natürliche optische Aktivität von Flüssigkeiten und Gasen. Physik. Zschr., 1915, 16, 251—258.
23. Einsteins Theorie der Gravitation und der allgemeinen Relativität. Physik. Zschr., 1916, 17, 51—59.
24. Elektronentheorie des natürlichen optischen Drehungsvermögens isotroper und anisotroper Flüssigkeiten. Ann. Physik, 1918, 55, 177—240.
25. Über die Maxwellsche Beziehung zwischen Brechungsindex und Dielektrizitätskonstante und über eine Methode zur Bestimmung der Ionenladung in Kristallen. S. B. Preuß. Akad. Wiss. Berlin, 1918, 604—613.
26. Über die ultraroten Eigenschwingungen zweiatomiger Kristalle. Physik. Zschr., 1918, 19, 539—548.
27. (mit A. Lande). Über die absolute Berechnung der Kristalleigenschaften mit Hilfe Bohrscher Atommodelle. S. B. Preuß. Akad. Wiss. Berlin, 1918, 1048—1068.
28. (mit A. Landé). Kristallgitter und Bohrsches Atommodell. Verh. Dtsch. Physik. Ges., 1918, 20, 202—209.
29. (mit A. Landé). Über die Berechnung der Kompressibilität regulärer Kristalle aus der Gittertheorie. Verh. Dtsch. Physik. Ges., 1918, 20, 210—216.
30. Eine thermochemische Anwendung der Gittertheorie. Verh. Dtsch. Physik. Ges., 1919, 21, 13—24.
31. Vom mechanischen Äther zur elektrischen Materie. Naturwiss., 1919, 7, 136—141.
32. Die Elektronenaffinität der Halogenatome. Verh. Dtsch. Physik. Ges., 1919, 21, 679—685.
33. (mit O. Stern). Über die Oberflächenenergie der Kristalle und ihren Einfluß auf die Kristallgestalt. S. B. Preuß. Akad. Wiss. Berlin, 1919, 901—913.

34. (mit Elisabeth Bormann). Zur Gittertheorie der Zinkblende. Verh. Dtsch. Physik. Ges., 1919, 21, 733—741.
35. Über die Beweglichkeit der elektrolytischen Ionen. Z. Physik., 1920, 1, 221—249.
36. (mit Elisabeth Bormann). Die Elektronenaffinität des Schwefelatoms. Z. Physik, 1920, 1, 250—255.
37. Das Atom. Naturwiss., 1920, 8, 213—226.
38. Die Brücke zwischen Chemie und Physik. Naturwiss., 1920, 8, 373—382.
39. Eine direkte Messung der freien Weglänge neutraler Atome. Physik. Zschr., 1920, 21, 578—581.
40. Kritische Betrachtungen zur traditionellen Darstellung der Thermodynamik. Physik. Zschr., 1920, 22, 218—224, 249—254, 282—286.
41. Über einen direkten mechanischen Nachweis des Dipolcharakters von Flüssigkeitsmolekeln. Verh. Dtsch. Physik. Ges., 1921 (3), 2, 53.
42. (mit E. Brody). Über die spezifische Wärme fester Körper bei hohen Temperaturen. Z. Physik, 1921, 6, 132—139.
43. (mit E. Brody). Über die Schwingungen eines mechanischen Systems mit endlicher Amplitude und ihre Quantelung. Z. Physik, 1921, 6, 140—152.
44. Über elektrostatische Gitterpotentiale. Z. Physik, 1921, 7, 124—140.
45. Zur Thermodynamik der Kristallgitter. Z. Physik, 1921, 7, 217—248.
46. (mit E. Brody). Zur Thermodynamik der Kristallgitter II. Z. Physik, 1922, 11, 327—352.
47. (mit E. Brody). Bemerkungen zu unseren Abhandlungen «Über die Schwingungen eines mechanischen Systems mit endlicher Amplitude und ihre Quantelung» und «Über die spezifische Wärme fester Körper bei hohen Temperaturen». Z. Physik, 1922, 8, 205—207.
48. (mit W. Pauli, jr.). Über die Quantelung gestörter mechanischer Systeme. Z. Physik, 1922, 10, 137—158.
49. Hilbert und die Physik. Naturwiss, 1922, 10, 88—93.
50. (mit E. Hückel). Zur Quantentheorie mehratomiger Molekeln. Physik. Zschr., 1923, 24, 1—12.
51. (mit W. Heisenberg). Über Phasenbeziehungen bei den Bohrschen Modellen von Atomen und Molekeln. Z. Physik, 1923, 14, 44—55.
52. (mit M. v. Laue). Max Abraham. Physik. Zschr., 1923, 24, 49—53.
53. (mit W. Heisenberg). Die Elektronenbahnen im angeregten Heliumatom. Z. Physik, 1923, 16, 229—243.
54. Quantentheorie und Störungsrechnung. Naturwiss., 1923, 11, 537—542.
55. (mit W. Heisenberg). Zur Quantentheorie der Molekeln. Ann. Physik, 1924, 74, 1—31.
56. (mit W. Heisenberg). Über den Einfluß der Deformierbarkeit der Ionen auf optische und chemische Konstanten. I. Z. Physik, 1924, 23, 388—410.
57. Über Quantenmechanik. Z. Physik, 1924, 26, 379—395.
58. (mit J. Franck). Quantentheorie und Molekelbildung. Z. Physik, 1925, 31, 411—429.

59. (mit P. Jordan). Zur Quantentheorie aperiodischer Vorgänge. Z. Physik, 1925, **33**, 479—505.
60. (mit P. Jordan). Zur Quantenmechanik. Z. Physik, 1925, **34**, 858—888.
61. (mit W. Heisenberg und P. Jordan). Zur Quantenmechanik II. Z. Physik, 1926, 35, 557—615.
62. (mit N. Wiener). Eine neue Formulierung der Quantengesetze für periodische und nichtperiodische Vorgänge. Z. Physik, 1926, 36, 174—187.
63. Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge. Z. Physik, 1926, **37**, 863—867.
64. Quantenmechanik der Stoßvorgänge. Z. Physik, 1926, 38, 803—827.
65. Das Adiabatenprinzip in der Quantenmechanik. Z. Physik, 1926, **40**, 167—192.
66. Zur Wellenmechanik der Stoßvorgänge. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1926, 146—160.
67. Quantenmechanik und Statistik. Naturwiss., 1927, 15, 238—242.
68. Physical Aspects of Quantum Mechanica. Nature, 1927, **119**, 354.
69. Über die Bedeutung der Stoßvorgänge für das Verständnis der Quantenmechanik. Atti Congr. Intern. dei Fisici Como-Pavia-Roma 1927, 1928, 2, 443—447.
70. (mit R. Oppenheimer). Zur Quantentheorie der Molekeln. Ann. Physik, 1927, **84**, 457—484.
71. (mit V. Fock). Beweis des Adiabatensatzes. Z. Physik, 1918, **51**, 165—180.
72. Kongreß der Assoziation der russischen Physiker. Naturwiss., 1928, **16**, 741—743.
73. Sommerfeld als Begründer einer Schule. Naturwiss., 1928, **16**, 1035—1036.
74. Antoon Lorentz. Nächr. Ges. Wiss. Göttingen, 1928, 69—73.
75. Zur Theorie des Kernzerfalls. Z. Physik, 1929, 58, 306—321.
76. (mit J. Franck). Beitrag zum Problem der Absorptionskatalyse. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1930, 77—89.
77. Zur Quantentheorie der chemischen Kräfte. Z. Physik, 1930, **64**, 729—740.
78. (mit V. Weisskopf). Quantenmechanik der Adsorptionskatalyse. Z. physik. Chem., 1931, B **12**, 206—227, 478.
79. (mit G. Rumer). Ansätze zur Quantenelektrodynamik. Z. Physik, 1931, **69**, 141—152.
80. Faraday-Jahrhundertfeier und British Association in London. Naturwiss., 1931, **19**, 932—934.
81. Das Grenzgebiet von Physik und Chemie. Umschau, 1931, 35, 509—511.
82. Was sind die chemischen Kräfte? Umschau, 1931, 35, 532—534.
83. (mit J. E. Mayer). Zur Gittertheorie der Ionenkristalle. Z. Physik, 1932, 75, 1—18.
84. Eine Bemerkung über den Elektronenradius. Naturwiss., 1932, **20**, 269.
85. Die ultraroten Eigenfrequenzen der Alkalihalogenidkristalle. Z. Physik, 1932, 76, 559—560.
86. (mit M. Göppert-Mayer). Dynamische Gittertheorie der Kristalle, Handb. d. Physik, 2. Aufl., 1933, **24/2**, 623—794.

87. (mit S. Flügge). Zur Quantenmechanik des Zweiatomsystems. Ann. Physik, 1933, 16, 768—780.
88. (mit M. Blackman). Über die Feinstruktur der Restsrahlen. Z. Physik, 1933, 82, 551—558.
89. On the Quantum Theory of the Electromagnetic Field. Proc. Roy. Soc., 1934, A **143**, 410—437.
90. (mit L. Infeld). Foundations of the New Field Theory. Proc. Roy. Soc., 1934, A **144**, 425—451.
91. (mit L. Infeld). Remarks on the Paper by Frenkel on Born's Theory of the Electron. Proc. Roy. Soc., 1934, A **146**, 935.
92. (mit L. Infeld). On the Quantisation of the New Field Equations, I. Proc. Roy. Soc., 1934, A **147**, 522—546.
93. Quantum Elektrodynamics. Internat. Conf. on Physics, London, 1934, 1, 19—27.
94. Some Philosophical Aspects of Modern Physics. Proc. Roy. Soc. Edinb., 1936, 57, 1—18.
95. The Statistical Mechanics of Condensing Systems. Physica, 1937, 4, 1034—1044.
96. A Suggestion for Unifying Quantum Theory and Relativity. Proc. Roy. Soc., 1938, A **165**, 291—303.
97. Relativity and Quantum Theory. Nature, 1938, **141**, 327.
98. Thermodynamics of Crystals and Melting. J. Chem. Physics, 1939, 7, 591—603.
99. Reciprocity and the Number 137. I. Proc. Roy. Soc. Edinb., 1939, 59, 219—223.
100. On the Stability of Crystal Lattices I. Proc. Camb. Phil. Soc., 1940, 36, 160—172.
101. Aspects of Theoretical Physics. Nature, 1940, **145**, 528—530.
102. (mit R. Fürth). The Stability of Crystal Lattices III. Proc. Camb. Phil. Soc., 1940, 36, 454—465.
103. (mit R. D. Misra). On the Stability of Crystal Lattices IV. Proc. Camb. Phil. Soc., 1940, 36, 466—478.
104. Otto Toeplitz. Nature, 1940, **145**, 617.
105. Sir J. J. Thomson. Nature, 1940, **146**, 356.
106. Sir J. J. Thomson. Proc. Phys. Soc., London, 1941, 53, 305—310.
107. On the Stability of Crystal Lattices IX. Proc. Camb. Phil. Soc., 1942, 38, 82—99.
108. Corrigenda. Proc. Camb. Phil. Soc., 1944, 40, 262—263.
109. Effect of Thermal Vibrations on the Scattering of X-Rays III. Proc. Roy. Soc. A, 1942, **180**, 397—413.
110. (mit H. Ll. D. Pugh). Vibration of a Thin Vertical Cantilever Caused by Damped Harmonic Disturbance of the Ground. J. Instn. Civil Engrs., 1942, 18, 279—293.
111. The Thermodynamics of Crystal Lattices. I. Discussion of the Methods of Calculation. Proc. Camb. Phil. Soc., 1943, 39, 100—103.
112. Dr. Arnold Berliner. Nature, 1942, **150**, 284.
113. Theoretical Investigations on the Relation between Crystal Dynamics and X-Ray Scattering. Rep. Progr. Phys., 1943, 9, 294—333.
114. (mit G. H. Begbie). Thermal Scattering of X-Rays by Crystals. Nature, 1943, **152**, 19.
115. (mit H. W. Peng). Quantum Mechanics of Fields. I. Pure Fields. Proc. Roy. Soc. Edinb., 1944, 62, 40—57.
116. (mit H. W. Peng). Quantum Mechanics of Fields. II. Statistics of Pure Fields. Proc. Roy. Soc. Edinb., 1944, 62, 92—102.

117. (mit H. W. Peng). Quantum Mechanics of Fields. III. Electromagnetic Field and Electron Field in Interaction. Proc. Roy. Soc. Edinb., 1944, 62, 127—137.
118. (mit R. Schlapp). Pieter Zeeman. Roy. Soc. Edinb. Year Book, 1943—1944, 25—27.
119. On the Quantum Theore of Pyroelectricity. Rev. Mod. Physics, 1945, **17**, 245—251.
120. (mit Mary Bradburn). The Raman Effect in Rock Salt. Nature, 1945, **156**, 567.
121. (mit Mary Bradburn). The Theory of the Raman Effect in Crystals, in Particular Rock Salt. Proc. Roy. Soc., 1947, **A 188**, 161—178.
122. (mit R. Fürth und R. W. Pringle). A Photo Electric Fourier-Transformer. Nature, 1945, **156**, 756.
123. (mit H. S. Green). A General Kinetic Theory of Liquids. I. The Molecular Distribution Functions. Proc. Roy. Soc., 1946, **A 188**, 10—18.
124. Professor Heinrich Rausch von Traubenberg. Nature, 1946, **157**, 328.
125. Elastic Constants of Diamond. Nature, 1946, **157**, 582.
126. (mit H. S. Green). A General Kinetic Theory of Liquids. III. Dynamical Properties. Proc. Roy. Soc., 1947, **A 190**, 455—474.
127. (mit H. S. Green). A Kinetic Theory of Liquids. Nature, 1947, 159, 251.
128. (mit H. S. Green). The Kinetic Basis of Thermodynamics. Proc. Roy. Soc., 1948, **A** 192, 166—180.
129. Professor V. M. Goldschmidt, For. Mem. R. S. Nature, 1947, 159, 701.
130. (mit H. S. Green). Quantum Theory of Liquids. Nature, 1947, 159, 738.
131. Die Quantenmechanik und der zweite Hauptsatz der Thermodynamik. Ann. Physik, 1948, **3**, 107—114.
132. (mit K. C. Cheng). K teorii sverchprovodimosti. Dokladi Ak. Nauk USSR, 1948, 62, 313—318.
133. Max K. E. L.Planck. Obit. Notices Roy. Soc., 1948, **6**, 161—188.
134. Einstein's Statistical Theories. The Library of Living Philosophers, 1949, **7**, 163—177.
135. Physics and Metaphysics. Mem. Manch. Lit. and Phil. Soc. 91, 35—53; Science News 17, 9—27.
136. Die Cültigkeitsgrenze der Theorie der idealen Kristalle und ibre Überwindung. Gött. Akad. Festschr., 1951.
137. Kopplung der Elektronen- und Kernbewegung in Molekeln und Kristallen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, 1951, N 6.
138. Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld. Obit. Notices Roy. Soc., 1952, 8, 275—296.
139. Physical Reality. Philosophical Quarterly, 1953, 3, 139—149.
140. Die statistische Deutung der Quantenmechanik. Les Prix Nobel en 1954, Stockholm, 1955.
141. Continuity, Determinism and Reality. Dan. Mat. Fys. Medd., 1955, **30**, № 2.
142. Erinnerungen an Albert Einstein. Math. u. Naturwiss. Unterricht, 1956, 9, Heft 3, 97—105.
143. Physik und Relativität. Naturwissenschaftl. Rundschau, 1956, 11, 417—424.

144. Max Planck 1858—1947. In: Die Großen Deutschen, Propyläen-Verlag bei Ullstein, Berlin, 1957.
145. (mit W. Biem). Zum Uhrenparadoxon. Proc. Acad. of Sci. Amsterdam, 1958, Series B, 61, № 2, 119—120.
146. (mit W. Ludwig). Zur Quantenmechanik des kräftefreien Teilchens. Z. Physik, 1958, 150, 106—117.
147. Ein Besuch bei den Raumfahrern und das Uhrenparadoxon. Physik. Bl., 1958, 14, 207.
148. Der Relativitätsbegriff in der Physik. Sammlung, 1958, 13, 346.
149. Sir Francis Simon F. R. S. Z. physik. Chem., N. F., 1958, 16, IX—XVII.
150. Erinnerungen an Hermann Minkowski zur 50. Wiederkehr seines Todestages. Naturwiss., 1959, 46, 501.
151. Voraussagbarkeit in der klassischen Mechanik. Physik. Bl., 1959, 15, 342.
152. Erinnerung an Max von Laues Entdeckung der Beugung von Röntgenstrahlen durch Kristalle. Z. f. Kristallogr., 1959, 112, 1.
153. Die Physik und die Ismen. Physik. Bl., 1960, 16, 147.
154. Erwin Schrödinger. Physik. Bl., 1961, 17, 85.
155. Bemerkungen zur statistischen Deutung der Quantenmechanik. In: W. Heisenberg und die Physik unserer Zeit. S. 103—118. Vieweg, Braunschweig, 1961.
156. Reminescences on my work on the dynamics of crystal lattices. In: Proceedings of the International Conference on Lattice Dynamics at Copenhagen. 1964.
157. (mit W. Biem). Dualism in Quantum Theory. Phisics Today, 1968, 21.

Книги

158. Dynamik der Kristallgitter. Leipzig, 1915.
159. Die Relativitätstheorie Einsteins und ihre physikalischen Grundlagen. Berlin, 1920.
160. Der Aufbau der Materie. Drei Aufsätze über moderne Atomistik und Elektronentheorie. Berlin, 1920.
161. Atomtheorie des festen Zustandes (Dynamik der Kristallgitger). Leipzig, 1923.
162. Vorlesungen über Atommechanik, I. Berlin, 1925.
163. Probleme der Atomdynamik, I. Die Struktur des Atoms; II. Die Gittertheorie des festen Zustandes. Berlin, 1926.
164. (mit P. Jordan). Elementare Quantenmechanik (II. Band der Vorlesungen über Atommechanik). Berlin, 1930.
165. Optik: Ein Lehrbuch der elektromagnetischen Lichttheorie. Berlin, 1933.
166. (mit M. Göppert-Mayer). Dynamische Gittertheorie. Berlin, 1933.
167. Atomic Physics. (Übersetzt von J. Dougall). London u. Glasgow, 1935.
168. Natural Philosophy of Cause and Chance. Oxford, 1949.
169. (mit H. S. Green). A General Kinetic Theory of Liquids. Oxford, 1949.
170. (mit Kun Huang). Dynamical Theory of Crystal Lattices. Oxford, 1954.
171. Physics in my generation. London, 1956, 1969.

172. (mit E. Wolf). Principles of Optics. London, 1959.
173. Einstein's Theory of Relativity. Revised Edition, prepared with the collaboration of Günther Leibfried and Walter Biem. New York, 1962.
174. (und andere.) Naturwissenschaften heute, 1965.
175. (mit L. Infeld). Erinnerungen an Einstein. Berlin, 1967.
176. My Life and Views. New York, 1968.
177. (und andere). Ansblick auf die Zukunft. Gütersloh, 1968.
178. Born—Einstein Briefwechsel, 1916—1955. München, 1969.
179. Problems of atomic dynamics. Reprint from the 1926 ed. Cambridge, 1970.

Книги М. Борна на русском языке

180. Теория относительности Эйнштейна. Пг., «Наука и школа», 1922.
181. Оптика. Харьков—Киев, ГНТИ, 1937.
182. Теория относительности Эйнштейна и ее физические основы. Л.—М., ОНТИ, 1938.
183. (в соавторстве). Теория твердого тела. М.—Л., 1938.
184. Физика в жизни моего поколения. М., ИЛ, 1963.
185. Эйнштейновская теория относительности. М., «Мир», 1964; 2-е изд. М., «Мир», 1972.
186. (в соавторстве с Э. Вольфом). Основы оптики. М., «Наука», 1970; 2-е изд. М., «Наука», 1973.
187. Воспоминания. Успехи физических наук, 1970, 102, № 1, с. 152—166.
188. Моя жизнь и взгляды. М., «Прогресс», 1973.

Литература о М. Борне

189. *H. Vogel*. Physik und Philosophie bei M. Born. Berlin, 1968.
190. *W. Heisenberg*. Max Born zum Gedächtnis. «Phys. Bl.», 1970, 26, № 2, 49—54.
191. *G. Heckmann*. Max Borns öffentliches Nirken. «Phys. Bl.», 1970, 26, № 2, 55—57.
192. *С. Г. Суворов*. Макс Борн и его философские взгляды. В сб.: *М. Борн*. Физика в жизни моего поколения. М., ИЛ, 1963, с. 464—534.
193. *М. Э. Омельяновский*. Послесловие. В кн.: *М. Борн*. Моя жизнь и взгляды. М., «Прогресс», 1973, с. 159—172.
194. *С. Г. Суворов*. О теориях познания — Макса Борна и диалектического материализма. Успехи физических наук, 1976, 118, № 4, с. 641 — 671.

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН

СОДЕРЖАНИЕ