С. П. ТИМОШЕНКО

ИСТОРИЯ НАУКИ О СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

С КРАТКИМИ СВЕДЕНИЯМИ ИЗ ИСТОРИИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ТЕОРИИ СООРУЖЕНИЙ

перевод с английского
В. И. КОНТОВТА
под редакцией
А. Н. МИТИНСКОГО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1957

17. Луи Мари Анри Навье

Знаменитый мемуар Кулона 1773 г. содержал правильные решения для целого ряда важных проблем механики материалов, но инженерам потребовалось более 40 лет, чтобы их достаточно понять и использовать в практических целях [1]). Очередной крупный успех в нашей науке был достигнут Луи Мари Анри Навье [2]) (1785—1836). Правда, его первые печатные труды, несмотря на то, что он начал работать уже после смерти Кулона, совершенно не отразили достижений его предшественника. Навье родился в Дижоне в семье состоятельного адвоката. В возрасте 14 лет он потерял отца и был взят в дом своего дяди, знаменитого французского инженера Готэ, отдавшего много внимания воспитанию мальчика. В 1802 г. Навье, выдержав конкурсные экзамены, поступил в Политехническую школу, а в 1804 г., по окончании ее, был

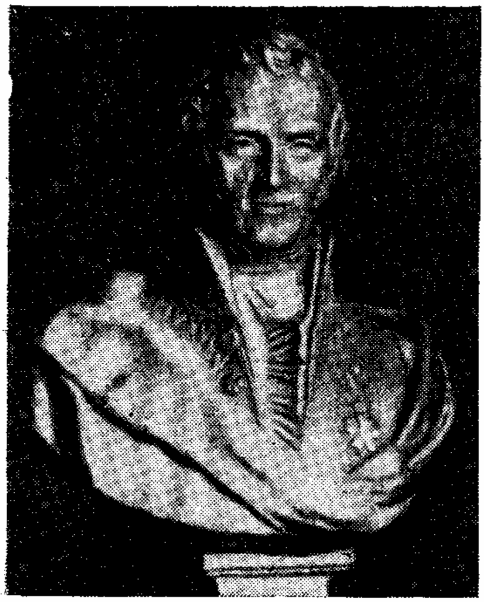
со дня рождения, Под ред. акад. В. И. Смирнова, Изд. АН СССР, 1947.) (*Прим. перев.*)

[1]) Понселе в своем, упомянутом выше, историческом обзоре различных теорий арок отмечает: «Мемуар Кулона на немногих страницах захватывает так много, что на протяжении последующих 40 лет внимания инженеров и ученых не хватило на то, чтобы разработать вполне хотя бы одну из них».

[2]) Биография Навье и полный перечень его печатных трудов приводятся в третьем издании его книги по сопротивлению материалов, вышедшем в Париже в 1864 г. под редакцией Сен-Венана.

принят в Школу мостов и дорог, где ранее учился, а затем преподавал математику его дядя. Готэ пользовался всяким случаем, чтобы наполнить теоретические занятия своего племянника практическими познаниями из области строительства мостов и каналов. Благодаря этому Навье ко времени завершения образования в 1808 г. оказался хорошо подготовленным, чтобы методами теоретического исследования решать практические проблемы.

Немедленно же ему представилась возможность применить свои познания и способности в ответственной работе. Готэ, скончавшийся в 1807 г., был занят в последние годы своей жизни подготовкой трактата о мостах и каналах. Этот труд остался незаконченным, и именно Навье пришлось взять на себя окончательную редакционную обработку и издание трех томов этого сочинения. Первый том, содержавший историю строительства мостов, а также описания важнейших новых мостов, вышел из печати в 1809 г., второй вышел в 1813 г., а последний, посвященный сооружению каналов, появился в 1816 г. Чтобы привести текст этой работы в соответствие с уровнем современного ему состояния знаний, Навье внес в разных местах многочисленные редакционные дополнения и примечания. Они сейчас представляют большой исторический интерес, поскольку отражают развитие механики упругого тела к началу XIX века. Сравнивая эти примечания с позднейшими трудами Навье, мы получаем возможность оценить тот прогресс, который был добыт нашей наукой за время его жизни главным образом благодаря его собственным усилиям. Примечание на стр. 18 второго тома представляет в этом отношении особый интерес; в нем излагается полная теория изгиба призматического бруса, причем из нее можно заметить, что для Навье остались тогда неизвестными важный мемуар Парана (см. стр. 60) и работа Кулона. Не придавая, подобно Мариотту и Якову Бернулли, существенного значения вопросу о положении нейтральной линии, Навье считает ее совпадающей с касательной к контуру поперечного сечения с вогнутой стороны. Он принимает также, что формула Мариотта (см. стр. 34) достаточно точна для вычисления прочности балки и занимается исследованием ее прогибов. Исходя из некоторых не вполне приемлемых допущений, он выводит выра-



Луи Мари Анри Навье.

жение для жесткости при изгибе, включающее два члена, и утверждает, что для определения входящих в формулу постоянных необходимо использовать результаты испытаний бруса на изгиб и на сжатие.

Этих ошибочных взглядов Навье держался, однако, не долго: в 1819 г., когда он начал читать свои лекции по сопротивлению материалов в Школе мостов и дорог, некоторые ошибки в его теории были уже устранены [1]). Но метод, с помощью которого устанавливалось положение нейтральной линии, продолжал оставаться неправильным, а именно, Навье предполагал, что эта линия делит поперечное сечение таким образом, что момент относительно ее растягивающих напряжений равен моменту сжимающих напряжений. Лишь в первом печатном издании (1826) его лекций это утверждение было исправлено, и вместо него доказано, что для материалов, следующих закону Гука, нейтральная линия должна проходить через центр тяжести поперечного сечения.

Навье опубликовал в 1813 г. новое издание «Инженерной науки» («La science des ingénieurs») Белидора, а в 1819 г. переиздал первый том его «L'architecture hydrolique». В обеих этих книгах мы встречаемся с многочисленными важными примечаниями, внесенными Навье с целью приблизить их содержание к требованиям своего времени.

В 1820 г. Навье представил в Академию наук свой мемуар об изгибе пластинок, а в следующем, 1821 г. появилась его знаменитая работа, формулирующая основные уравнения математической теории упругости.

Занятый теоретическими исследованиями и редактированием книг, Навье в то же время всегда имел и какую-либо практическую работу, связанную обычно со строительством мостов. В этой области в конце XVIII и в начале XIX столетия произошли большие перемены. До этого времени основным материалом, применявшимся в строительстве ответственных мостов, был камень, теперь же все более и более широкое применение стал получать металл. Англия в это время была наиболее передовой индустриальной страной, и широкое использование металлов в промышленности началось впервые именно в этой стране. Джон Смитон (John Smeaton, 1724—1792) [2]) был первым крупным инженером, применившим чугун в конструкциях ветряных мельниц, водяных колес и насосов. Первый чугунный мост был построен в 1776—1779 гг.

---

[1]) См. примечание Сен-Венана на стр. 104 его «Истории сопротивления материалов и теории упругости», приложенной к его знаменитому изданию книги: N a v i e r, Resumé des leçons, ... de la résistance des corps solides, Paris, 1864.

[2]) Биография Смитона приведена в первом томе «Reports of John Smeaton F. R. S.», London, 1812.

Авраамом Дэрби (Abraham Darby) через реку Северн [1]). Другие последовали за Англией, и на рубеже века чугунные мосты появились в Германии и во Франции [2]). Эти мосты выполнялись в виде арок с тем, чтобы материал работал преимущественно на сжатие. Эти сооружения нового типа не всегда были достаточно прочны, и некоторые из них терпели аварии.

Инженеры пришли к выводу, что чугунные мосты не могут быть признаны безопасными для больших пролетов, и перешли к системе висячих мостов, основной принцип которой восходит к глубокой древности. Несколько весьма древних сооружений этого типа было найдено в Китае и Южной Америке [3]). Но первые висячие мосты, оказавшиеся способными противостоять суровым требованиям более близких к нам времен, были построены в Северной Америке в конце XVIII столетия. Джэмс Финли (J. Finley) построил первый висячий мост в Пенсильвании в 1796 г. В начале XIX века в этом штате существовало уже довольно много таких мостов. Самым крупным из них был мост через реку Счуйлкилл (Schuylkill) близ Филадельфии. Британские инженеры последовали примеру американцев, в результате чего на протяжении первой четверти XIX века было построено много таких мостов и в Англии. Крупнейший из них—через реку Менэй (Menai) со средним пролетом 165 *м* (550 фут.) был спроектирован и построен (1822—1826) Тельфордом [4]) (1757—1834).

Французское правительство чрезвычайно заинтересовалось этим новым направлением в мостостроении, и Навье был послан в Англию для изучения искусства сооружения висячих мостов. После двух поездок (в 1821 г. и 1823 г.) он представил свой отчет-

---

[1]) Описание этого моста, его постройки и дальнейшей судьбы, а также рисунок моста приведены, в частности, в журнале «Известия собрания Инж. п. с.», № 3, 1897, стр. 43—44. (*Прим. ред.*)

[2]) Начало строительства чугунных мостов в России относится к 1783—1784 гг., когда по проектам Камерона в верхнем парке б. Царского Села (ныне г. Пушкин) были построены два «китайских» мостика. В последующие годы в парках Царского Села было построено еще несколько оригинальных по форме арочных и балочных чугунных мостиков; см. Щусев П. В., Мосты и их архитектура, М., 1953, стр. 221—226. В 1806—1818 гг. через каналы и реки Петербурга было построено шесть чугунных арочных мостов по проектам архитектора Геста пролетом 15—32 *м*, составленных из отдельных косяков; некоторые из них существуют и поныне; их описание см. «Отеч. записки», т. V, 1821, стр. 212 и «Журнал Гл. упр. п. с. и публ. зд.», т. XXXI, 1860, отдел вспом. наук, стр. 1 и далее. (*Прим. ред.*)

[3]) Любопытные исторические данные, относящиеся к металлическим мостам, можно найти в лекциях по металлическим мостам Мертенса (Mehrtens G. C., т. 1, Lpzg, 1908). См. также Jakkula A. A., A History of suspension bridges in bibliographical form, Texas Agricultural and Mechanical colledge, 1941.

[4]) См. Gibb A., The story of Telford, London, 1935, а также Smiles, Lives of the enqineers, т. 2. (Имеется русский перевод. *Прим. перев.*) Тельфорд учредил Лондонский институт гражданских инженеров (1821) и оставался президентом этого Института до конца своей жизни.

мемуар о висячих мостах (Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus, 1823), в котором не только приводится исторический обзор этой области строительства и даются описания важнейших существовавших тогда висячих мостов, но и излагаются теоретические методы расчета таких сооружений [1]). В течение 50 лет этот отчет был одним из важнейших литературных источников по вопросам проектирования висячих мостов; и по сей день он еще сохранил отчасти свое значение.

В 1824 г. Навье был избран в члены Академии, а в 1830 г. получил назначение на должность профессора по кафедре математики и механики в Политехнической школе. Его лекции «Resumé des leçons de mécanique» были изданы и на протяжении многих лет пользовались широкой популярностью среди французских инженеров.

18. Книга Навье по сопротивлению материалов

В 1826 г. появилось первое печатное издание книги Навье по сопротивлению материалов [2]), содержащее главнейшие его открытия в этой области. Если мы сравним эту книгу с аналогичными сочинениями XVIII века, то ясно заметим тот большой сдвиг, который совершила механика материалов за первую четверть XIX века. Инженеры XVIII века пользовались экспериментом и теорией с целью установления формул для вычисления предельных (разрушающих) нагрузок, Навье же с самого начала указывает, насколько важно знать предел, до которого сооружения ведут себя идеально упруго и не получают остаточных деформаций. В пределах упругости деформацию можно считать пропорциональной силе и установить сравнительно простые формулы для вычисления ее величин. За пределом же упругости зависимость между силами и деформациями получается очень сложной и вывод простых формул для определения разрушающих нагрузок становится невозможным. Навье полагает, что если применять формулы, выведенные для расчета по упругому состоянию существующих сооружений, обнаруживших свою достаточную прочность,

[1]) В то время английские инженеры не очень интересовались теорией. Так, например, Брьюстер (Brewster) сообщает о Тельфорде следующее: «Он питал необычайное отвращение к математическим занятиям и не изучил даже элементов геометрии; эта странность дошла до того, что когда нам случилось рекомендовать одного нашего юного друга для поступления в его проектное бюро, причем мы обосновали нашу рекомендацию тем, что наш кандидат был отличным математиком, Тельфорд без колебаний заявил, что подобные познания скорее дисквалифицируют кандидата, чем подтверждают его пригодность для занятия подобной должности».

[2]) Копии лекций Навье распределялись среди студентов с 1819 г. Сен-Венан, являвшийся одним из слушателей этих лекций, ссылается именно на этот материал, обсуждая некоторые ошибки в ранних работах Навье.

то таким путем можно установить значения безопасных напряжений для различных материалов и в дальнейшем пользоваться этими данными при назначении надлежащих размеров в проектах новых сооружений.

В первых двух главах своей книги автор исследует простое сжатие и простое растяжение призматического бруса, причем отмечает, что для полного описания механических свойств материала недостаточно дать только его предел прочности, но необходимо также установить и его модуль упругости E, который определяется у Навье как отношение нагрузки, приходящейся на единицу площади поперечного сечения, к произведенному ею относительному удлинению[1]). Так как для определения модуля упругости E требуются измерения весьма малых удлинений, соответствующих упругой области, то из имевшегося в его распоряжении экспериментального материала Навье смог извлечь лишь весьма скудные данные для своей цели. Поэтому он поставил свои собственные опыты над железом, которое он применял в сооружении моста Инвалидов в Париже[2]). Таким путем он определил модуль упругости E для этого материала.

Третья глава посвящена изгибу призматического бруса, и здесь Навье с самого начала принимает, что изгиб происходит в той же самой плоскости, в которой действует нагрузка, в связи с чем его исследование может относиться лишь к балкам, имеющим плоскость симметрии и нагруженным в этой плоскости. Полагая, что поперечные сечения остаются плоскими при изгибе, и применяя три уравнения статики, он заключает, что нейтральная линия проходит через центр тяжести поперечного сечения и что кривизна оси определяется уравнением

$$\frac{EI}{\rho} = M, \tag{a}$$

где I является моментом инерции поперечного сечения относительно нейтральной линии. Считая прогибы малыми и совмещая ось x с осью балки, он получает зависимость

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M. \tag{b}$$

Со времени Эйлера этим уравнением пользовались для вычисления прогибов консолей и симметрично нагруженных свободно опертых балок. Навье применяет его для любого вообще случая поперечного загружения простой балки, причем кривая прогибов описывается у него в отдельных участках пролета балки

[1]) Модуль упругости был введен впервые в механику упругого тела Томасом Юнгом (см. стр. 114). Но последний давал ему другое определение. В настоящее время общее признание получило определение Навье.

[2]) См. Rapport et mémoire sur les ponts suspendus, 2-е изд., стр. 293.

различными уравнениями. Чтобы пояснить расчетный метод Навье, рассмотрим балку, нагруженную сосредоточенной силой P в точке C (рис. 43). Обозначая угол, который касательная к упругой линии в C образует с горизонтальной осью, через α, он находит выражения

$$f_b = \frac{Pa}{l}\frac{b^3}{3EI} + b\operatorname{tg}\alpha, \qquad f_a = \frac{Pb}{l}\frac{a^3}{3EI} - a\operatorname{tg}\alpha$$

для прогибов в B и в A (при отсчете их от оси x). Из равенства этих прогибов он заключает, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Pab(a-b)}{3EIl}.$$

Зная α и пользуясь приведенным выше выражением для изогнутой оси консоли, можно написать уравнение кривых прогиба для обоих участков балки AB.

Тем же приемом решает Навье и задачу об изгибе балки (рис. 43), когда равномерная нагрузка распределена лишь по отдельному ее участку. Вычисляя для этого случая наибольшее напряжение, он ошибочно допускает, что максимальный изгибающий момент в балке имеет место под центром тяжести нагрузки.

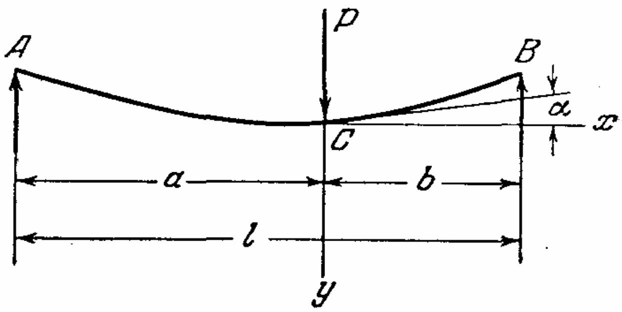


Рис. 43.

Навье первый разработал общий метод решения статически неопределенных задач в механике материалов. Он утверждает, что такие задачи представляются неопределенными лишь постольку поскольку телам приписывается абсолютная жесткость, но что, приняв во внимание их упругость, мы всегда имеем право присоединить к уравнениям статики еще некоторое число уравнений, выражающих условия деформации, так что в нашем распоряжении всегда окажется достаточное число зависимостей, чтобы найти все неизвестные величины. Рассматривая, например, нагрузку P, поддерживаемую несколькими расположенными в одной плоскости стержнями (рис. 44), Навье указывает, что если стержни абсолютно жестки, то задача получается неопределенной. Он вправе приписать произвольные значения усилиям во всех стержнях, за исключением двух, и определить усилия в этих последних, воспользовавшись уравнениями статики. Но задача становится определенной, если учесть упругость стержней. Если u и v—горизонтальная и вертикальная составляющие смещения точки O, то можно выразить удлинения стержней и действующие в них усилия в виде функций от u и v. Написав затем два уравнения статики, можно найти u и v, а по ним определить и усилия во всех стержнях.

Переходя к статически неопределенным задачам изгиба, Навье начинает со случая балки, заделанной одним концом и свободно

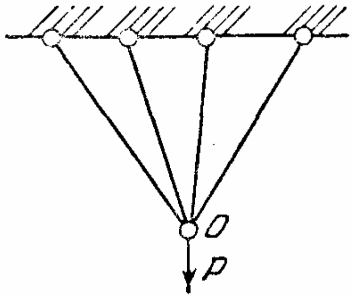


Рис. 44.

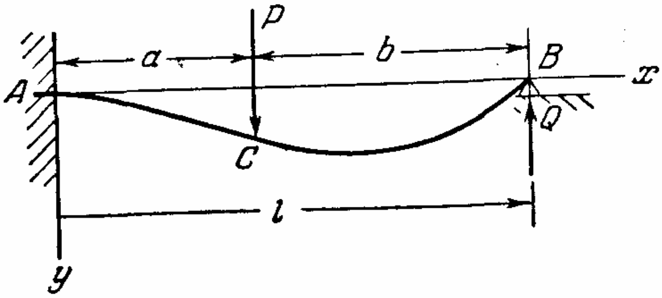


Рис. 45.

опертой на другом (рис. 45). Обозначая статически неопределимую реакцию в B через Q, он получает следующие уравнения:

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2}=P(a-x)-Q(l-x),$$

$$EI\,\frac{dy}{dx}=P\left(ax-\frac{x^2}{2}\right)-Q\left(lx-\frac{x^2}{2}\right),$$

$$EIy=P\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)-Q\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)$$

для участка AC балки и

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2}=-Q(l-x)$$

для участка CB. Интегрируя это уравнение и замечая, что в точке C оба участка изогнутой оси имеют общую касательную и общую ординату, он находит:

$$EI\,\frac{dy}{dx}=\frac{Pa^2}{2}-Q\left(lx-\frac{x^2}{2}\right),$$

$$EIy=P\left(\frac{a^2x}{2}-\frac{a^3}{6}\right)-Q\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right).$$

Так как при $x=l$ прогиб равен нулю, он получает из последнего уравнения

$$Q=\frac{P(3a^2l-a^3)}{2l^3}.$$

Поскольку значение опорной реакции определено, устанавливается и уравнение кривой прогиба для обоих участков балки.

Тот же прием Навье использует и в расчете балки, заделанной на обеих опорах, а также балки, лежащей на трех опорах. Мы видим, что нахождение кривых прогиба путем интегрирования и вычисления лишних неизвестных (статически неопределимых величин) было полностью разработано Навье. Но эпюры изгибающего момента и поперечной силы, столь широко применяемые в настоящее время, отсутствуют в его исследованиях, и этим обстоятельством, вероятно, хорошо объясняется, почему в некоторых случаях положение точки максимума для изгибающего момента устанавливалось им неправильно.

Навье останавливается также на случаях изгиба призматического бруса, находящегося под совместным воздействием осевой и поперечной сил. Рассмотрев продольный изгиб колонны

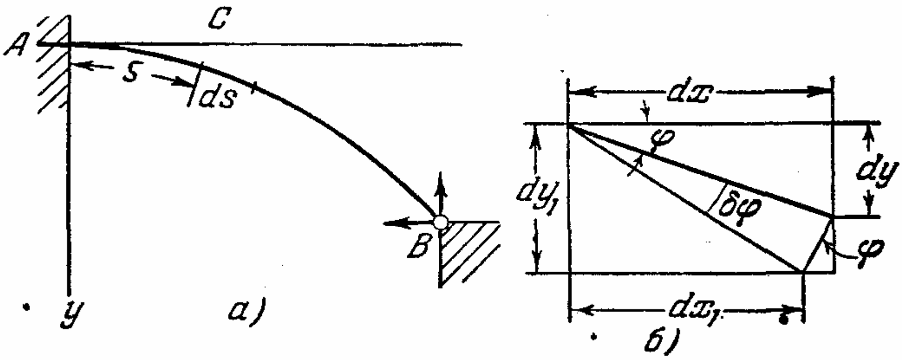


Рис. 46.

при осевом сжатии, он переходит к случаям внецентренного сжатия и растяжения и изучает действие силы, приложенной на конце колонны под некоторым углом к оси. Его формулы для определения наибольшего изгибающего момента и наибольшего прогиба в этих случаях много сложнее, чем формулы для случая действия одной лишь поперечной нагрузки, и в его время они, вероятно, мало применялись. Впоследствии, однако, в связи с возраставшим использованием в сооружениях гибких стержней эти формулы приобрели большое значение, и для того, чтобы облегчить их применение, были составлены подробные таблицы для вычислений.

В своей книге Навье внес много ценного в теорию изгиба кривого бруса. Уже Эйлер высказал гипотезу, что при изгибе первоначально искривленного бруса изгибающий момент пропорционален приращению кривизны. Навье принимает формулу

$$EI\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)=M$$

и использует ее для исследования изгиба кривого бруса AB (рис. 46, a), заделанного концом A. Взяв некоторый элемент ds у точки C, он заключает в связи с приведенным уравнением, что угол, образуемый двумя смежными поперечными сечениями, изменяется в результате изгиба на величину $M\,ds/EI$. Поэтому поперечное сечение C при изгибе поворачивается на угол

$$\delta\varphi = \int_0^s \frac{M\,ds}{EI}.$$

Вследствие этого начальные проекции dx и dy элемента ds примут новые значения dx_1 и dy_1 (рис. 46, *б*), и мы найдем:

$$dx_1 - dx = -ds\,\delta\varphi \sin\varphi = -dy \int_0^s \frac{M\,ds}{EI},$$

$$dy_1 - dy = ds\,\delta\varphi \cos\varphi = dx \int_0^s \frac{M\,ds}{EI}.$$

Интегрируя, Навье получает компоненты смещения некоторой точки C при изгибе в следующем виде:

$$x_1 - x = -\int_0^s dy \int_0^s \frac{M\,ds}{EI},$$

$$y_1 - y = \int_0^s dx \int_0^s \frac{M\,ds}{EI}.$$

С помощью этих уравнений можно решать статически неопределенные задачи изгиба кривого бруса. Рассматривая, например, симметричную двухшарнирную арку, нагруженную в ключе сосредоточенной силой P (рис. 47), мы имеем статически неопределимый распор H, величина которого может быть найдена из условия, что горизонтальное перемещение шарнира B должно быть равно нулю. Тогда

$$\int_0^s dy \int_0^s \frac{M\,ds}{EI} = 0.$$

Из этого уравнения Навье вычисляет распор H для параболических и круговых арок. Аналогично им проводится расчет и в том случае, когда нагрузка равномерно распределена по пролету. Все эти вычисления основываются на том допущении, что длина элементов, подобных показанному на рис. 46, *б*, остается неизменной. В заключение Навье показывает, каким образом может быть принято в расчет сжатие, производимое осевой силой.

Последняя глава книги посвящена тонким оболочкам, и в ней также имеются некоторые оригинальные исследования самого Навье. Он начинает с обсуждения формы равновесия идеально гибкой нерастяжимой нити AB, подвергнутой нормальному давлению в плоскости кривой AB (рис. 48), причем заключает (из условий равновесия элемента mn), что

$$S = \mathrm{const}, \qquad \frac{S}{\rho} = p,$$

где S—растягивающее усилие в нити, ρ—радиус кривизны. Таким образом, кривизна в некоторой точке должна быть пропор-

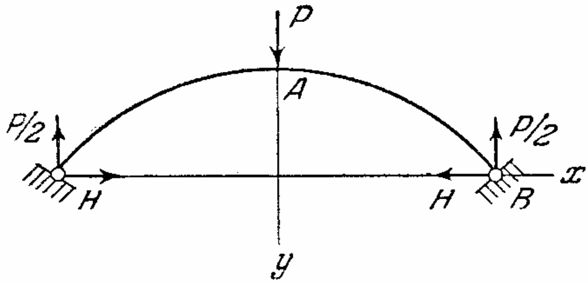


Рис. 47.

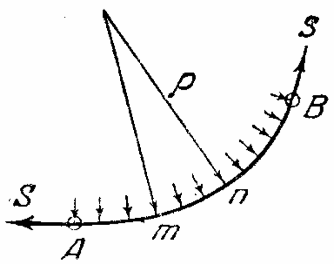


Рис. 48.

циональна давлению в этой же точке. Взяв бесконечно длинный лоток (рис. 49, *а*), наполненный жидкостью и поддерживаемый равномерно распределенными силами S, Навье задается вопросом, при каких условиях оболочка не будет подвергаться изгибу, и по-

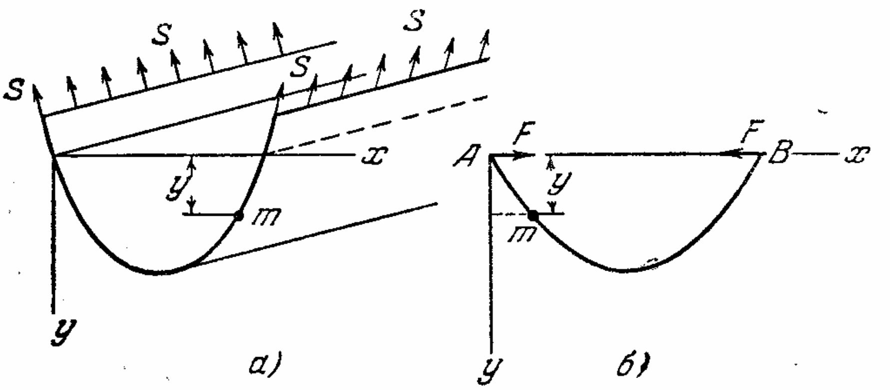


Рис. 49.

казывает, что это имеет место в том случае, когда кривизна в некоторой ее точке m пропорциональна глубине y. Профиль, удовлетворяющий этому условию, может быть получен изгибанием гибкой первоначально плоской полосы AB силами F, как показано на рис. 49, *б*, поскольку изгибающий момент и кривизна изогнутой оси в каждой точке m, очевидно, пропорциональны y.

Рассматривая тонкую оболочку, подвергнутую равномерному натяжению S и нормальному давлению p, из условий равновесия Навье находит уравнение

$$S\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1}\right) = p.$$

Отсюда он получает выражение для растягивающего напряжения в сферической оболочке толщиной h:

$$\sigma = \frac{S}{h} = \frac{p\rho}{2h}.$$

Навье провел испытания [1]) тонких железных сферических оболочек диаметром около 0,3 *м* (1 фут), толщиной 2,5 *мм* (1″). Подвергая их внутреннему давлению, достаточному для того, чтобы вызвать разрыв, он нашел, что предельное сопротивление материала в этом случае остается приблизительно тем же, что получается из испытаний на простое растяжение.

В книге Навье имеются дополнительные главы, касающиеся подпорных стен, арок, пластинок и ферм. О них будет сказано дальше. Мы видим, что в книге даны удовлетворительные решения многих задач строительной механики, хотя для того, чтобы привести их к окончательному виду с современной точки зрения, было бы необходимо дополнить их исследованием касательных напряжений при изгибе балки, а также исследованием изгиба балки в плоскости, не совпадающей с плоскостью действия сил. Эти две задачи, как мы увидим, были решены позднее, после смерти Навье.