АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИНСТИТУТ
ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ
И ТЕХНИКИ

Развитие современной физики

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1964

Ответственный редактор

Б. Г. КУЗНЕЦОВ

ОТ РЕДАКЦИИ

Этот сборник является в известном смысле продолжением сборника «Эйнштейн и развитие физико-математической мысли» (М., Изд-во АН СССР, 1962). Настоящий сборник содержит статьи советских и зарубежных физиков-теоретиков и историков науки, в которых рассматриваются коренные проблемы учения о пространстве, времени и веществе. К их числу относятся проблемы, связанные с именем Нильса Бора. После смерти Бора некоторые советские и зарубежные ученые передали в редакцию сборника стенограммы докладов, воспоминания и статьи, посвященные памяти Бора. Мы публикуем эти материалы. Они, разумеется, не исчерпывают даже основных проблем, связанных с именем Бора. Институт истории естествознания и техники Академии наук СССР предполагает вернуться к этим проблемам и выпустить специальный сборник с анализом мировоззрения и творчества Бора. В нем будут даны оценки основных идей Бора и попыток их интерпретации. Редакция не может согласиться с некоторыми оценками в публикуемых статьях, но характер дискуссионных проблем требует не беглых замечаний, а всестороннего анализа концепций дополнительности, соответствия и т. д. Сравнительно всесторонний анализ будет дан в предполагаемом специальном сборнике.

Вторая часть настоящего сборника посвящена проблемам аксиоматизации физики. Эти проблемы, видимо, будут становиться все более актуальными: современная физика напряженно ищет исходные принципы, из которых однозначным образом вытекали бы методы, применяемые в квантовой теории поля и в современной теоретической физике в целом. Большую роль при этом может сыграть исторический анализ попыток вывести методы теоретической физики из некоторых общих оснований, которые были предприняты в прошлом.

В этом сборнике помещены переводы классических работ Каратеодори об аксиоматизации термодинамики и теории относительности и статьи о развитии идеи аксиоматизации физики.

Редакция надеется, что выпуск сборника повысит интерес к историческому анализу в кругах физиков и актуализирует историко-физические исследования.

НИЛЬС БОР И СОВРЕМЕННАЯ ФИЗИКА

И. Е. ТАММ
Москва

Нильс Бор и Альберт Эйнштейн — это, несомненно, два величайших физика XX в. Бор был не только основателем квантовой теории, которая открыла человечеству путь к познанию нового мира — мира атомов и элементарных частиц, позволила овладеть атомной энергией. Труды Бора, наряду с работами Эйнштейна, оказали решающее влияние на физику нашего века и на современное научное мировоззрение в целом. Торжество теории относительности и теории квантов, основателями которых были Эйнштейн и Бор, на блестящих примерах продемонстрировало общие закономерности развития научного познания. Так как наши знания не априорны, а вытекают из анализа и обобщения всего человеческого опыта, всякое проникание человека в новую, неизведанную область явлений влечет необходимость коренного пересмотра и обобщения основных наших понятий и представлений, даже таких, как время, пространство, как понятие физической закономерности.

Это, конечно, не означает, что каждый новый этап развития науки отметает все прежнее. С каждым новым шагом выявляются границы применимости тех понятий и тех законов, которые ранее считались универсальными, вскрываются закономерности более общего характера, Требования к каждой новой теории становятся все более жесткими — ведь она не только должна объяснять вновь открытые факты, но и включать в качестве частного случая все ранее открытые закономерности, указывая точные границы их применимости. Так, основы классической физики содержатся в более общих законах теории относительности и теории квантов, из которых они вытекают в условиях, когда скорости тел малы по сравнению со скоростью света, а пространственно-временные масштабы явлений и массы тел таковы, что так называемое действие велико по сравнению с квантовой постоянной.

Однако еще в начале нашего века было широко распространено мнение, что незыблемые и нерушимые основы науки уже созданы. Такой крупный физик как Кельвин (В. Томсон) в речи, произнесенной по случаю наступления нового, XX в., сожалел о последующих поколениях физиков, которым остались лишь сравнительно мелкие доделки в воздвигнутом и в основном завершенном здании науки. Кельвин проявил необычайную проницательность, сказав, что на чистом и ясном небосводе физики осталось только два «облачка»: одно, связанное с опытом Майкельсона, другое — с излучением черного тела и законом Планка. Как известно, именно из этих «облачков» и возникли теория относительности и квантовая теория и в свою очередь именно благодаря торжеству этих теорий воззрения, типа высказанных в начале века даже таким крупным ученым, как Кельвин, в настоящее время встречаются только среди ретроградов (которых, впрочем, и сейчас не так уже мало). Именно благодаря этому мы подходим ныне без предубеждений, а, наоборот, с энтузиазмом к новому, пока еще только намечающемуся этапу развития физической теории, необходимость в котором выявилась при изучении свойств и взаимодействий элементарных частиц высоких энергий и который по своей новизне и фундаментальности, несомненно, будет сравним с теорией относительности и квантовой теорией.

Этим отношением к новому, пониманием того, что, идя вперед, мы должны менять многое в самых основах наших воззрений, мы обязаны в значительной степени трудам Нильса Бора.

Такая эволюция физики оказала большое влияние и на другие отрасли естествознания. И можно только присоединиться к мечтаниям видного физико-химика Хавемана (ГДР) о том времени, когда и философы будут почитать величайшим счастьем для себя появление новых открытий, противоречащих основным их понятиям и представлениям.

Вся жизнь — в поисках нового

В 1912 г. двадцатишестилетний Нильс Бор после окончания Копенгагенского университета работает в Манчестере у Резерфорда, которого он считал своим учителем и высоко ценил как человека и ученого. С этого времени проблемы атома и атомного ядра стали основным интересом Бора, сохранившимся до конца его жизни.

До последнего времени недостаточно известно, что именно молодой Бор впервые или, во всяком случае, независимо ни от кого, сформулировал такое основное понятие, как понятие атомного номера элемента, понял, что величина заряда ядра определяет строение его электронной оболочки и что сходство химических свойств изотопов обусловлено одинаковостью заряда их ядер, и осмыслил закон радиоактивного смещения ядер при α- и β-распаде. Тот же интерес к атомному ядру привел его через 24 года (в 1936 г.) к созданию представления о компаунд-ядре, образующемся при захвате ядром нейтрона, к представлению, которое играет столь фундаментальную роль во всей нейтронной физике.

Первая знаменитая работа Бора, в которой сформулированы основы его теории, относится к 1913 г. В ней не только объяснен спектр водорода, но и спектр ионизированного гелия.

Интересно, что хотя спектр ионизированного гелия и наблюдался ранее Пикерингом в спектрах звезд и Фаулером в спектре электрического разряда в смеси водорода и гелия, однако он приписывался не гелию, а водороду. Это недоразумение было разрешено только опытами Ивенса (Evans), который под влиянием Бора начал изучать электрический разряд в чистом гелии. Но при этом, как рассказал Бор в лекции, посвященной памяти Резерфорда, возникла драматическая ситуация: оказалось, что формула Бора для спектра водорода не дает при замене в ней заряда ядра с 1 на 2 точного совпадения со спектром ионизированного гелия. Однако Бор вскоре объяснил это расхождение, указав на необходимость учитывать движение ядра, что сводится к тому, что в его формулу нужно вставлять не массу свободного электрона, а его приведенную массу $mM/(m+M)$ (где M — масса ядра), которая имеет различные значения для водорода и для гелия.

Бор с самого начала осознавал всю значимость его квантовых постулатов. Уже в 1913 г. в одном из своих докладов он сказал: «Я надеюсь, что говорил достаточно ясно для того, чтобы вы поняли, насколько сильно приведенные рассуждения отклоняются от той замечательно последовательной системы понятий, которую по праву называют классической электродинамической теорией... Я пытался дать вам почувствовать, что со временем все-таки можно будет привести новые понятия в какую-то систему».

Всем известно, что боровская теория проложила путь к созданию последовательной квантовой механики. Однако не всем ясна вся значимость роли Бора в дальнейшем развитии его идей. Она двояка.

Нельзя переоценить, во-первых, непосредственное решающее влияние Бора на новое творческое поколение теоретиков и, во-вторых, всей значимости данного им глубокого анализа принципиальных основ теории.

Что касается первой стороны дела, то в течение многих лет большинство крупнейших молодых теоретиков того времени (Гайзенберг, Паули, Дирак, Ландау, Пайерлс, Клейн, Крамерс, Блок, Вейсскопф и многие другие) регулярно собирались в Копенгагене для творческих дискуссий, проходивших под большим влиянием Бора.

Мне хочется напомнить, что когда Бор был в последний раз в Советском Союзе в мае 1961 г., после его доклада на семинаре у П. Л. Капицы Л. Д. Ландау задал ему вопрос: «Каким Вы обладали секретом, который позволил Вам в такой степени концентрировать вокруг себя творческую теоретическую молодежь?». На это Бор ответил: «Никакого особого секрета не было, разве только то, что мы не боялись показаться глупыми перед молодежью».

Это очень характерное высказывание Бора, ненавидевшего чванство, зазнайство, высокомерие и отличавшегося поразительной скромностью. Вместе с тем, действительно, никакая дискуссия не может быть плодотворной, если ее участники боятся задавать вопросы, которые могут обнаружить пробелы в их осведомленности и показаться «глупыми».

Что касается анализа основ теории, то хотя основное для квантовой механики соотношение неопределенности было впервые сформулировано Гейзенбергом в 1927 г., однако законченная формулировка этого соотношения — принципа дополнительности, исчерпывающий анализ его физического содержания, анализ возможностей измерения и наблюдения микрообъектов, взаимная исключаемость постановки опытов, в которых измеряются такие дополняющие друг друга величины, как, например, импульс и координата или время и энергия,— всем этим мы обязаны Бору.

Бор всегда особенно подчеркивал ту роль, какую сыграло в развитии основ квантовой механики скептическое отношение к ней Эйнштейна. В частности, Бор очень подробно писал об этом в сборнике статей, посвященных Эйнштейну [1]. Он подчеркивает, что Эйнштейну принадлежат фундаментальные идеи, сыгравшие очень большую роль в развитии квантовой теории: теория фотоэффекта, в которой впервые было введено понятие световых квантов (1905); теория излучения и поглощения света, включающая рассмотрение как спонтанного, так и вынужденного излучения (1918) и т. д. Тем не менее до конца своих дней Эйнштейн не мог примириться со статистическим характером квантовых закономерностей, считая, что недетерминистическое, квантовое описание явлений не может быть полным, исчерпывающим и окончательным. Характерно, что когда Эйнштейн ознакомился с первой работой Бора 1913 г., то, как сообщил Бору Хэвэши, Эйнштейн сказал: «Такую работу, может быть, мог бы

[1] Статья эта, относящаяся к 1949 г., напечатана в журнале «Успехи физических наук», т. 66, 1958, стр. 571 и в сборнике статей Н. Бора «Атомная физика и человеческое познание». М., ИЛ, 1961.

сделать и я сам, но если она правильна, то это означает конец физики как науки».

К сожалению, не так уж редки случаи, когда даже подлинно гениальные ученые с какого-то момента своей жизни уже больше не приемлют нового. Вспомните Фарадея, который, находясь под влиянием шеллингианской философии, учившей, что все сущее едино, всю жизнь искал взаимосвязи различных физических явлений. Так, в поисках связи между светом и магнетизмом он открыл эффект Фарадея (вращение плоскости поляризации света в намагниченных телах). Он ставил эксперименты, оставшиеся, правда, безуспешными, чтобы обнаружить связь между тяготением и электричеством. Больше того, он писал, что «различные формы, в которых проявляются силы материи, ...как бы могут превращаться друг в друга, и существуют эквиваленты их действия». И вот, наконец, был открыт фактически предвиденный Фарадеем закон сохранения энергии, и Фарадей познакомился со знаменитым мемуаром Гельмгольца «О сохранении силы». Но Фарадей не смог разобраться в том, что под словом сила понималось тогда и то, что мы теперь называем работой. Он отверг закон сохранения энергии, потому что, как он писал в своем дневнике, «как можно говорить о сохранении силы, если она меняется в четыре раза, когда расстояние меняется в два раза».

Такого с Бором никогда не случалось. До конца своей жизни он интересовался и искал новое. Еще около четырех лет назад в Принстоне на докладе Паули, излагавшего основы новой теории Гейзенберга и пытавшегося при помощи единого спинорного поля объяснить свойства всех элементарных частиц, Бор высказался следующим образом: «Для подлинно новой теории теория Гейзенберга недостаточно сумасшедшая» (not crazy enough).

Конечно, это высказывание надо понимать так, что подлинно новая теория бывает, как правило, «сумасшедшей» не в смысле своей нелогичности, непоследовательности или внутренней противоречивости, а в смысле ее непривычности, новизны и кажущейся парадоксальности.

Дискуссии с Эйнштейном

Вернемся, однако, к тому, что говорил Бор о дискуссиях с Эйнштейном, о его скептическом отношении к квантовой механике, которое так способствовало прояснению ее основных понятий.

В течение ряда лет Эйнштейн выступал с изложением разного рода «парадоксов», которые, по его мнению, доказывали несостоятельность квантовой механики. Именно анализ этих парадоксов, как говорит Бор, и помог существенно выяснению основ теории.

Вот как, например, Эйнштейн пытался опровергнуть утверждение, что нельзя одновременно точно фиксировать время и энергию. Он предлагал воспользоваться законом эквивалентности энергии и массы и провести такой мысленный эксперимент. Рассмотрим закрытый ящик, в котором находится свет (фотоны) и точные часы, в заданный момент открывающие отверстие в ящике на такой короткий промежуток времени, за который из него может вылететь только один фотон. Таким образом, момент вылета фотона из ящика точно известен. Если ящик подвешен в поле тяжести на пружине, по его смещению можно определить изменение его полной массы, вызванное вылетом фотона, откуда точно определяется энергия этого фотона.

Ошибочность подобного рассуждения в том, что в нем не учтено изменение хода времени (или хода часов) при смещении системы отсчета (т. е. ящика с часами в поле тяжести). Эта зависимость хода времени от поля тяготения проявляется в известном смещении к красному концу спектра излучения тел большой массы (Солнца и звезд). В данном случае, как показал Бор, зависимость хода часов от их положения в поле тяжести вносит неопределенность в их показания, вполне соответствующую принципам квантовой механики, так что «парадокс» Эйнштейна полностью разрешается.

Хочется заметить, что в это время Л. И. Мандельштам тоже очень интересовался «парадоксами» Эйнштейна. Как только появлялась статья Эйнштейна с очередным парадоксом, он через несколько дней в частной беседе разъяснял содержащуюся в ней ошибку рассуждения.

Я и другие товарищи говорили ему: «Почему Вы это не публикуете?». Он отвечал: «Эйнштейн такой крупный человек, что все эти соображения должны быть ему известны. Вероятно, что-то существенное в его рассуждениях ускользает от меня». Проходило некоторое время, и появлялась работа Бора, точно соответствовавшая тому, что говорил Л. И. Мандельштам. Я рассказываю об этом не для умаления значения работ Бора, а для того, чтобы отдать должное Леониду Исааковичу.

Во время последнего посещения Бором СССР мы много разговаривали с ним в дружеской обстановке в ФИАНе. Он, в частности, рассказывал, что во время одной из первых его дискуссий с Эйнштейном (примерно в 1920 г.) Эйнштейн задал ему вопрос: «Скажите, что же такое свет?» Бор ему ответил: «Обратитесь к немецкому правительству и пусть оно либо издаст постановление, что свет — это волна, и запретит пользоваться фотоэлементами, или же, что свет — это корпускулы, и тогда запретит пользоваться диффракционными решетками».

Эти споры теперь уже в прошлом. Правда, встречаются еще отголоски таких рассуждений у де Бройля, Бома и др. Однако совершенно ясно, в основном благодаря анализу Бора, что механистический детерминизм классической физики несовместим с многогранностью и вместе с тем с целостностью реальных объектов; что и электроны, и свет в одно и то же время и корпускулы, и волны, т. е. обладают свойствами, совершенно несовместимыми с точки зрения классической физики. Хотя с релятивистской квантовой механикой пока еще во многих отношениях дело обстоит неблагополучно и мы лишь надеемся, что в будущем новые идеи исправят существующее положение, однако нерелятивистская квантовая механика представляет последовательную, логически стройную теорию, законченностью не уступающую, а может быть и превосходящую механику Ньютона. Этим в основном мы обязаны Бору.

Долгое время у нас говорили о копенгагенской школе, о копенгагенской интерпретации квантовой теории, наконец, о том, что Бор в последнее время изменил свою первоначальную точку зрения. Несомненно, что не существует сколько-нибудь правомерных интерпретаций квантовой теории, отличных от так называемой копенгагенской. Что же касается последнего вопроса, то в ФИАНе мы его задали Бору. Он определенно и четко сказал: «Я не менял в своих взглядах ни единого слога (not a single syllable). Просто некоторые из нас раньше не понимали, а потом поняли и согласились».

Бор отнюдь не упорствовал в своих взглядах, если возникали основания для их пересмотра. Для иллюстрации этого обратимся к биологии.

Интерес к биологии

Бор всегда очень интересовался биологией, не раз писал о применении принципов неопределенности и дополнительности к биологии. В этой связи он указывал, например, на то, что если при изучении психических явлений начать анализировать собственные ощущения и эмоции, это значит неизбежно их видоизменять.

Но сейчас нас интересует то, что у Бора произошла очень интересная эволюция взглядов на природу жизни. Я процитирую его высказывания, относящиеся к 1937 г.

«Мы вынуждены принять, что собственно биологические закономерности представляют законы природы, дополнительные к тем, которые пригодны для объяснения свойств неодушевленных тел. В этом смысле существование самой жизни следует рассматривать как в отношении ее определения, так и наблюдения, как основной постулат биологии, не поддающийся дальнейшему анализу».

В 1959 г. Бор пишет следующее: «Совсем новые перспективы постепенного разъяснения биологических закономерностей на основе прочно установленных принципов атомной физики появились за последние годы. Это произошло благодаря открытию поразительно устойчивых структур специального назначения, несущих генетическую информацию, а также благодаря все более полному проникновению в процессы, которыми эта информация передается. Таким образом, у нас нет причин ожидать какого-либо внутреннего ограничения для применимости элементарных физических и химических понятий к анализу биологических явлений».

Непреклонный борец за мир

В заключение несколько слов об общественных взглядах и личном обаянии Нильса Бора. Начну с одного воспоминания, глубоко врезавшегося в мою память.

В 1934 г. Бор впервые посетил Советский Союз. Мне посчастливилось довольно много с ним общаться. Мы были в Харькове у Ландау, и я возвращался вместе с Бором и его женой в Москву. Как-то вечером в поезде мы разговорились, в частности, о встретившихся тогда высказываниях, отвергавших возможность нашего сотрудничества с социалистами в едином фронте против реакции.

По этому поводу Бор с большой страстностью сказал: «Ну как люди не понимают, что самая главная опасность для человека сейчас — это Гитлер и фашистская Германия. Это та угроза, против которой должны сплотиться все — от коммунистов и социалистов до радикалов и либералов».

Только через несколько лет я осознал всю глубину его прозорливости.

Известно, что во время войны Бор некоторое время находился в Дании, когда она была оккупирована гитлеровскими войсками. В свой последний приезд в 1961 г. в СССР Бор поделился с нами в ФИАНе интересными воспоминаниями об этом периоде. Он рассказал, как один из его видных учеников-физиков специально приезжал из Германии в Копенгаген, когда войска Гитлера стояли под Москвой, уговаривать его, чтобы он, Бор, не придерживался такой непримиримой к фашизму позиции, потому что, мол, все равно победа фашизма на земном шаре обеспечена и что физикам нужно как-то проявить свою полезность в деле достижения победы, поскольку только так они смогут обеспечить свое положение в будущем гитлеровском рейхе. По словам Бора, это был очень хороший человек, который, однако, впоследствии забыл обо всем этом. Бор закончил это замечательными словами: «Поразительно, как даже хорошие люди забывают о взглядах, которых они ранее придерживались, если эти взгляды менялись у них постепенно».

В оккупированной Дании у Бора скоро начала гореть земля под ногами. Осенью 1943 г. датская организация сопротивления помогла ему бежать вместе с сыном на лодке через пролив в Швецию, откуда их должны были перевезти в Англию на самолете-бомбардировщике. Но каждый самолет брал только одного человека в бомбовом отсеке. Первым улетал Бор. Нужно было надеть шлем с радионаушниками. Через них ему должны были подать сигнал, когда нужно включить кислород. Но у Бора была такого крупного размера голова, что наушники не доходили до ушей, так что сигнала о включении кислорода он не услышал. По прибытии в Англию его сняли с самолета в бессознательном состоянии. Когда я, выслушав Бора, сказал, что «это ужасно», он ответил, что ужасно было не это, а то, что, когда он ожидал следующего самолета, на котором должен был лететь его сын, стало известно, что немцы сбили этот самолет. Это было ужасно. И только через несколько часов выяснилось, что перед отлетом во второй самолет вместо его сына посадили другого пассажира, а сын прилетел позже.

Примечательно открытое письмо Бора в Организацию Объединенных Наций, опубликованное в 1950 г. В нем он рассказывает, что по приезде в Англию в 1943 г. его посвятили в «атомные проекты», т. е. в исследования по овладению атомной энергией и созданию атомного оружия. Переехав в США, Бор принимал в них участие вплоть до июня 1945 г., когда он еще до первого испытания атомной бомбы переехал из США в Англию. С тех пор, как он пишет, «не имел никакой связи с какими-либо секретными, военными или промышленными исследованиями в области атомной энергии».

В этом открытом письме Бор приводит большие выдержки из двух меморандумов, переданных им президенту Рузвельту в разговоре с ним в августе 1944 г. и государственному секретарю США в мае 1948 г. Уже в меморандуме 1944 г. Бор высказывает, что единство союзников, сложившееся в борьбе с фашизмом, может нарушиться после войны и настаивает ввиду этого на необходимости еще во время войны провести мероприятия, которые обеспечили бы после нее всеобщую безопасность, полное запрещение атомного оружия и международный контроль, который предотвратил бы возможное нарушение этого запрещения. Бор настаивал, чтобы сразу после войны результаты военных исследований, делающие возможным мирное применение атомной энергии, стали доступными для всех стран, чтобы всем странам была предоставлена полная возможность использования атомной энергии в мирных целях и чтобы всякая монополия на нее была исключена. Значимость этого замечательного меморандума становится ясной, если вспомнить, что в 1944 г. США обладали абсолютной монополией на «атом».

В 1950 г. в письме к Организации Объединенных Наций Бор настаивает на необходимости создания «открытого мира» (open world), в котором были бы обеспечены мир и мирное сотрудничество (cooperation) всех государств, свободное общение между ними и свободный обмен информацией, устранены все источники взаимного недоверия и в котором «каждая нация могла бы выделяться (asset itself) только в той мере, в какой она может способствовать росту общей культуры и в какой она может помочь другим странам своими ресурсами и своим опытом».

Все приведенное — это только иллюстрация того, что Бора всегда глубоко волновали не только судьбы науки, но и судьбы человечества, что он остро чувствовал ответственность ученых, открывших путь в атомный век, за то, чтобы завоевания науки были использованы не для уничтожения, а для всеобщего благополучия.

В заключение я хотел бы особо подчеркнуть, что Нильс Бор был не только гениальным ученым, не только передовым, но и поистине обаятельным человеком. Всякий бывал очарован и покорен его личностью, его совершенно необыкновенной простотой, искренностью, общительностью и доброжелательностью, сочетавшейся с твердостью и непреклонностью убеждений. Бор был подлинным воплощением человечности и доброты в самом возвышенном смысле этих слов.

ПАМЯТИ НИЛЬСА БОРА [1]

В. Л. ГИНЗБУРГ
Москва

В течение нескольких десятилетий Копенгаген был Меккой для физиков всего мира. Очень многие работали с Нильсом Бором или рядом с ним. Несомненно, они могут рассказать и еще расскажут немало интересного о научных взглядах Бора, о его оценках различных открытий и событий и, наконец, о его человеческих качествах. К сожалению, я не принадлежу к числу людей, долго общавшихся с Бором. Тем не менее, позволю себе начать с личных впечатлений.

Весной 1961 г. Бор, как известно, был в Москве. Не говоря уже о возможности присутствовать на некоторых его публичных выступлениях, нам в Физическом институте Академии наук СССР посчастливилось довольно долго и в сравнительно спокойной обстановке беседовать с Бором. И даже это, по существу, мимолетное общение оставило очень сильное впечатление. Речь при этом идет не об обаянии имени, а об обаянии личности. Ведь самые большие научные достижения не связаны автоматически с чертами, которые мы суммарно выражаем, говоря о замечательной человеческой личности. А Нильс Бор на 76-м году жизни предстал перед нами как замечательный человек, одновременно и очень принципиальный, и добрый,

---

[1] Выступление на вечере, посвященном памяти Нильса Бора, состоявшемся в Москве в Политехническом музее 12 декабря 1962 г.

и какой-то неповторимо деликатный и мудрый. Можно было бы попытаться оправдать эти эпитеты, но это очень трудно сделать, и я боюсь только смазать картину. Поэтому ограничусь тем, что напомню поговорку «лицо человека — зеркало его души», которая так применима к Нильсу Бору. Фотографии, сделанные в мае 1961 г. Л. В. Суховым, очень впечатляющи даже без комментариев.

Работы Бора концентрируются вокруг трех проблем: строения атома, нерелятивистской квантовой механики и теории атомного ядра. Но если не познакомиться более детально с историей развития всех этих направлений, то может остаться в тени одна характерная черта. Речь идет о том большом внутреннем единстве и неразрывных связях, которые существовали между различными работами Бора на протяжении целых десятилетий. Легче всего в этом убедиться, если обратиться к последней из известных статей Бора — его лекции, посвященной памяти Резерфорда. Текст лекции был завершен и опубликован в 1961 г.[1] Эта статья, несомненно, привлечет внимание.

Бор познакомился с Резерфордом в конце 1911 г. Через несколько месяцев он начал работать в Манчестере в возглавляемой Резерфордом группе. Группа изучала атомное ядро и следствия, вытекающие из факта его существования. Первый вопрос, которым Бор занялся в Манчестере, был вопрос об атомном номере. Именно им или, во всяком случае, при его непосредственном участии была высказана и развита идея о том, что «понимание физических и химических свойств каждого элемента должно быть неразрывно связано с целым числом, известным теперь как атомный номер и равным заряду ядра (в единицах элементарного электрического заряда)». Бор высказал мысль, что все изотопы данного элемента обладают одним и тем же атомным номером, т. е. заряд их ядер одинаков. Отсюда вытекало, что «радиоактивный распад элемента, совершенно независимо от характера изменения его атомного веса, будет смещать положение элемента в периодической системе на две ступеньки вверх или на ступеньку вниз, в соответствии с уменьшением или возрастанием заряда

[1] N. Bohr. Proc. Phys. Soc., 78, 1083 (1961). УФН 80, 215 (1963).

ядра, сопровождающим излучение α-или β-лучей». Бор отмечает, что, когда несколькими месяцами позже закон радиоактивного смещения был провозглашен Содди в Глазго и Фаянсом в Карлсруэ, оба автора не обратили внимания на тесную связь закона с основными чертами модели атома Резерфорда. Более того, Фаянс рассматривал изменения химических свойств при радиоактивном распаде, явно связанные с электронной оболочкой атомов, как возражение против модели, в которой α- и β-лучи вылетают из ядра.

Итак, до последнего времени оставалось неизвестным или, во всяком случае, недостаточно известным [1], что именно Бор ввел понятие об атомном номере, понял, что такое изотопы, высказал и осмыслил закон радиоактивного смещения.

Примерно в это же время (весной 1912 г.) Бор пришел к убеждению, что движение электронов в атоме Резерфорда можно понять лишь при учете квантования. Но тогда Бор, видимо, не сосредоточил внимание на этой проблеме. Например, он занимался развитием теории ионизационных потерь. Осенью 1912 г. в Копенгагене Бор перешел к конкретным попыткам применить квантовые понятия к планетарной модели атома. Но Бор не сразу добился успеха. Как он пишет, только ранней весной 1913 г. его осенила мысль, что подход к проблеме стабильности атома нужно искать на пути объяснения простых законов, которым подчиняются спектры элементов. Именно на этом пути Бор и добился замечательных успехов — построил модель, которую называют моделью атома Бора или Резерфорда — Бора.

Бор не только объяснил спектр водорода, получив формулу $R = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3}$ для постоянной Ридберга, но и объяснил спектр ионизированного гелия. Точнее, и это имело большое значение, Бор связал с ионизированным гелием загадочный спектр, наблюдавшийся и в лаборатории, и в спектре звезд. Природа этого спектра была

---

[1] Например, в классической книге Ф. В. Астона «Масс-спектры и изотопы» (ИЛ, 1948) открытие закона радиоактивного смещения связывается с именами Содди, Фаянса, Рессела и Флека, но о роли Бора ничего не говорится.

совершенно неясна: он был похож на водородный, но явно от него отличался. Достаточно сказать, что в формуле Ридберга для описания спектра ионизированного гелия квантовое число n (энергия терма $E_n = -\frac{hR}{n^2}$) нужно считать не только целым, но и полуцелым. Все становится ясным, если обобщить формулы Бора для водородного спектра на случай ядра с зарядом eZ. Тогда $E_n = -\frac{hZ^2R}{n^2}$ и гелию с $Z = 2$ как бы отвечает водородный спектр с квантовым числом $n^* = \frac{n}{Z} = \frac{n}{2}$. Но на этом история с объяснением спектра гелия не кончилась. Напротив, события приняли оборот, который сам Бор называет драматическим. С одной стороны, специально поставленные опыты подтвердили гипотезу Бора — при разряде в чистом гелии был получен тот же таинственный спектр, который наблюдался в спектрах звезд или при разряде в смесях, содержавших водород. Однако, с другой стороны, оказалось, что частоты в спектре ионизированного гелия хотя и близки, но заметно отличаются от вычисленных по формуле Бора с $Z = 2$.

Это противоречие устранил сам Бор. Он показал, что все наблюдения сходятся с теорией, если учесть движения ядра, т. е. заменить в полученной им формуле для R массу электрона m на приведенную массу $m^* = \frac{mM}{m+M}$, где M — масса ядра.

Всякий, кто был свидетелем или сам пережил нечто подобное, легко представит, какое сильное впечатление должно было произвести на Бора и весь мир физиков такое блестящее подтверждение теории. Это было особенно важно, так как речь шла не о завершенной теории, а лишь о первых успешных шагах на пути понимания законов квантовой физики. Здесь нет возможности останавливаться на других этапах этого замечательного пути. Но сказанное иллюстрирует, что вряд ли можно резко отделить работы Бора, посвященные ядру, от его же исследований электронной оболочки. Речь идет скорее об очень целеустремленном штурме планетарной модели атома Резерфорда — Бора. Этот штурм был начат с ядра (атомный номер, закон радиоактивного смещения) и затем перешел на электроны оболочки. Чтобы до конца разобраться в строении оболочки и в атомных спектрах, потребовалось построить последовательную динамику микромира — нерелятивистскую квантовую механику. Когда построение и понимание квантовой механики было в основном завершено, опять возник интерес к атомному ядру. Это относится и к физике вообще, и к исследованиям Бора. Мне кажется, что именно интерес Бора к ядерной физике объясняет тот факт, что в 30- и 40-е годы он сконцентрировал свое внимание на физике ядра, а не на привлекавших в этот период, пожалуй, еще большее внимание теоретиков проблемах физики элементарных частиц и релятивистской квантовой теории.

Теперь перейду к взглядам Бора на квантовую механику или на интерпретацию квантовой механики. Трудно найти проблему, которая в физике нашего века дискутировалась бы шире и с большей страстностью, чем эта. В 40-е годы казалось, что буря улеглась и представители, по крайней мере, нового поколения физиков единодушно принимают интерпретацию, которую иногда называют «копенгагенской», а лучше именовать вероятностной или «обычной». Но в 1952 г. Д. Бом снова пытается возродить сомнения и в правильности, и в единственности вероятностной интерпретации. Более того, Бом предложил «новую интерпретацию» квантовой механики, хотя фактически в значительной мере лишь возродил и развил попытки, предпринятые де-Бройлем еще в 1927 г. За этим последовал поток статей, авторы которых стремились или реконструировать нерелятивистскую квантовую механику, или реинтерпретировать ее. Сейчас эта «реинтерпретационная волна» спала, но вряд ли исключена возможность новых рецидивов такого рода.

Интерпретация квантовой механики — понимание ее общефизического и гносеологического содержания — принадлежит к числу самых значительных научных проблем нашей эпохи и навсегда сохранит не только исторический, но и более общий интерес. Поэтому можно надеяться, что не лишне рассказать о той части разговора с Бором, в котором я участвовал и которая касалась интерпретации квантовой механики и эволюции воззрений самого Бора в этом отношении.

Бор считал, что не существует никакой «копенгагенской интерпретации» квантовой механики, а квантовая механика — это интерпретация наблюдений. Ни о какой другой интерпретации квантовой механики, кроме вероятностной, с этой точки зрения не может быть и речи. По словам Бора, критика вероятностной интерпретации в 50-е годы не содержала никаких новых аргументов по сравнению с обсуждавшимися много лет назад. Квантовая механика, как и в свое время теория относительности, положила начало новому этапу в развитии физики. Возвращение назад невозможно. Я задал также вопрос о том, изменились ли за последние годы взгляды Бора по вопросу об интерпретации квантовой механики или ее характере. Бор четко и определенно ответил, что его позиция совершенно не изменилась.

Конечно, сделанные во время беседы замечания не могут служить базой для каких-либо выводов. Но то, что сказал Бор, следует и из лекции, прочитанной им в то время в ФИАНе, и из его статей. Последние собраны в недавно вышедшем на русском языке сборнике [1]. В предисловии к сборнику Бор пишет о том, что с течением времени его аргументация «постепенно становится яснее, особенно в отношении более четкой терминологии». Это особенно очевидно из его статьи «Квантовая физика и философия» (1959 г.) [2]. Здесь позиция Бора сформулирована предельно ясно и с той заботой о точности терминологии, которая необходима, когда речь идет о тонких вопросах физики и философии. Однако, если говорить о понимании квантовой механики и введенного Бором понятия дополнительности, то я не могу усмотреть какого-либо изменения позиции Бора по сравнению с той, какую он занимал в 30-х и 40-х годах. Любопытно отметить, что отношение Бора к биологическим вопросам, напротив, претерпело значительную эволюцию. Например, в статьях «Свет и жизнь» (1932 г.) и «Биология и атомная физика» (1937 г.) Бор склонен считать «существование самой жизни, как в отношении ее определения, так и наблюдения, основным

---

[1] Н. Бор. Атомная физика и человеческое познание. М., ИЛ., 1961.

[2] Помимо цитируемого сборника, эта статья помещена также в УФН, 67, 37 (1959).

постулатом биологии, не поддающимся дальнейшему анализу, подобно тому как существование кванта действия вместе с конечной делимостью материи образует элементарную основу атомной физики». В статье же «Квантовая физика и биология» (1959 г.) Бор не только не делает подобных замечаний, но подчеркивает, что «у нас нет причины ожидать какого-либо внутреннего ограничения для применимости элементарных физических и химических понятий к анализу биологических явлений. Тем не менее, своеобразные свойства живых организмов, выработанные в результате всей истории органической эволюции, обнаруживают скрытые возможности чрезвычайно сложных материальных систем, не имеющих себе подобных в сравнительно простых проблемах, с которыми мы встречаемся в физике и химии. На этом-то фоне и нашли себе плодотворное применение в биологии понятия, относящиеся к поведению организма как целого и как бы противостоящие способу описания свойств неодушевленной материи». Если привести более подробные выдержки из этих статей [1], то изменение позиции Бора в биологии стало бы еще более ясным. Об этом я слышал и от Л. Розенфельда, близкого сотрудника Бора, летом 1962 г. Надеюсь, подробнее мы узнаем об этом в будущем. Я только хотел подчеркнуть, что Бор до последних дней мог изменять свои мнения под влиянием новых фактов. В биологии такие факты появились (я имею в виду блестящие успехи молекулярной биологии). В физике же, если говорить об области, относящейся к нерелятивистской квантовой теории, новых фактов, имеющих принципиальное значение, не появилось. Поэтому естественно, что Бору не пришлось менять свои взгляды на квантовую механику. Ведь эта механика, как он подчеркивал, есть интерпретация фактов. Кстати, в разговоре с нами Бор пожалел людей, которые не учатся на примере своих ошибок при анализе фактов.

Хотя этот вопрос кажется кристально ясным, но в литературе встречаются аргументы, которые заставляют (во избежание недоразумений) сделать здесь еще одно замечание.

---

[1] См. также одну из последних статей Н. Бора «О единстве физических знаний», УФН, 76, 21 (1962).

Именно в некоторых статьях, посвященных «новой интерпретации» квантовой механики, подчеркивается, что ни одна физическая теория не является вполне полной и законченной. Это относится и к квантовой механике, а, значит, последнюю необходимо улучшать, Но как это сделать? Очевидно, единственное, чего «не достает» квантовой механике, это возможности дать ответы на вопросы такого типа: куда попадет данный электрон в диффракционном опыте или когда распадется данное радиоактивное ядро? Сторонники «новой интерпретации» считают вероятностный ответ, который дает на эти вопросы квантовая механика, неполным или даже неудовлетворительным. В соответствии с этим основная цель попыток дать «новую интерпретацию» сводится к возвращению к идеалам механического (лапласовского) детерминизма и проникнута стремлением либо предсказать, «куда попадет электрон», либо объяснить, почему такое предсказание, в принципе возможное с этой точки зрения, нельзя сделать на известном нам уровне физики. Здесь не место подробно критиковать «новую интерпретацию». В этом сейчас уже, по-видимому, и нет особой нужды. Я хотел только остановиться на тезисе о том, что квантовая механика якобы из общих соображений должна быть незамкнутой (неполной), а поэтому необходимо ее развивать, чтобы получить ответ на вопрос, «куда попадет данный электрон», и ему подобные. Вот этот-то тезис представляется совершенно не выдерживающим критики и порочным в самой своей основе.

Речь ведь идет о нерелятивистской квантовой механике, о явлениях, находящихся в области ее применимости, а не о новых небольших эффектах или переходе в релятивистскую область. В таком ограниченном смысле всякая правильная физическая теория, в известном отношении, всегда должна быть (и фактически является) замкнутой, законченной. Классическая механика Ньютона является именно такой теорией в применении к медленным движениям, например в применении к вычислению движения планет. Ньютоновская механика хорошо проверена на опыте. Никто не сомневается в ее правильности с той точностью, которая может быть указана на основе более общей теории — теории относительности (релятивистские поправки к классической механике определяются параметром

v^2/c^2, который в пределах солнечной системы не превосходит значения $2 \cdot 10^{-6}$).

Точно так же приближенный характер нерелятивистской квантовой механики (это давно и хорошо известно) не имеет никакого отношения к вопросу о возможности ликвидировать вероятностный характер квантовой механики. Таким образом, ограниченность области применимости нерелятивистской квантовой механики не может служить аргументом в пользу необходимости дать ей «новую интерпретацию». Напомним, что вероятностная (обычная) интерпретация квантовой механики является глубоким следствием неклассической природы микрообъектов. Квантовая частица не является маленьким шариком, движущимся по некоторой траектории. Поэтому неудивительно, что нельзя указать, «куда попадёт каждый электрон» в диффракционном опыте. Мы уверены, что и в будущем здесь не откроется никаких новых возможностей. Нечего и говорить о том, что возможность сделать предсказание, «куда попадет электрон», т. е. возврат к классическому детерминизму, не вытекает ни из принципа причинности, ни из других общих физических или философских положений [1]. Огромной заслугой Бора,

---

[1] В связи с тем, что вопрос о причинности в квантовой механике в нашей литературе продолжает дискутироваться, хочется подчеркнуть следующее. Нет никаких оснований утверждать, что квантовая механика противоречит принципу причинности. Основная величина, характеризующая состояние микрообъекта в квантовой механике — функция Ψ, подчиняется уравнению Шредингера, носящему динамический характер. Нельзя сказать, что квантовая механика находится в формальном противоречии даже с механическим детерминизмом. В механике по известным начальным импульсу и координате можно найти эти величины в любой последующий момент времени. Детерминизм был бы нарушен, если бы при известных начальных импульсах и координате получались бы в разных опытах разные их значения в последующий момент времени. Если вначале известен только импульс, а в конце определяется координата, то получение разных результатов, очевидно, не противоречит классическому детерминизму. Но в квантовой механике невозможно в силу квантовой природы объектов существование состояний с одновременно заданными импульсом и координатой. Поэтому, например в опыте с диффракцией электронов, когда вначале (до диффракционной решетки) задан только импульс, координата — место попадания электрона на экран (фотопластинку) не является однозначно определенной. Отсюда ясно, что вероятностная

как известно, и является решающее участие в разъяснении этих моментов. Когда речь идет о Нильсе Боре, можно сказать, что уравнения отступают на второй план, а физические обсуждения и споры переносятся в область более общих идей или оценок. Поэтому и мне хочется закончить свое выступление замечанием общего и, вероятно, спорного характера.

Мне кажется, что неразрывно связанный с именем Нильса Бора этап в развитии физики (атом, ядро, нерелятивистская квантовая механика), является не только блестящим, но может и в известном смысле считаться абсолютной вершиной этого развития на обозримом участке времени. Поскольку встречаются люди, которые склонны считать ошибочными или сомнительными всякое указание на существование каких-то ограничений или пределов, будь то предельная скорость распространения сигналов или пределы корпускулярного описания, должен заметить, что в данном случае не имеется в виду устанавливать какие-то пределы развития физики. Речь идет о другом, об изменении характера этого развития. Развитие физики, по крайней мере с конца XIX в. и до середины нашего столетия, можно уподобить быстро движущемуся кораблю с очень острым носом. На этом «носу» стояли такие люди, как Планк, Лоренц, Эйнштейн, Резерфорд и Бор. «Физический корабль» разрезал волны неведомого океана. Основную область его носовой части, если можно так выразиться, составляло исследование строения вещества. Подтверждение атомной гипотезы, атомизм электрического заряда, строение атома, ядро — вот что было в центре внимания. Нерелятивистская квантовая механика относится сюда же, так как это есть теория явлений в ядрах, атомах и их совокупностях. Все эти вопросы имеют определяющее значение для развития большинства физических на-

---

интерпретация и появление статистики должны рассматриваться как следствие неклассической природы объекта.

Таким образом, требование изгнать в конечном счете вероятность из квантовой механики и, например, в диффракционном опыте указать, «куда попадет каждый электрон», не только не вытекает из принципа причинности, но, по существу, связано с попытками считать микрочастицы классическими частицами, обладающими определенными импульсом и координатой.

правлений. Поэтому движение физики в целом в значительной мере определялось тем, что делается на переднем крае. По последней причине «нос физического корабля» был таким острым. Другими словами, работу в этой области подгонял и стимулировал, высокопарно выражаясь, не только интерес к тайнам природы, но и огромное общечеловеческое значение изучаемых проблем. Ведь всем или, во всяком случае, очень многим уже в первой четверти нашего века было ясно, что успешное исследование атомов и ядер открывает широчайшие перспективы для развития многих направлений физики, техники, химии, биологии.

Сейчас принципиальная сторона вопроса, когда речь идет о строении атомов, а в значительной мере и ядер, уже известна. Фронт физики на главном направлении ушел вперед. Он находится в области физики элементарных частиц, среди мезонов и гиперонов, нейтрино и эфемерных «частиц-резонансов». Совершенно бесспорно, что по своему научному интересу, не говоря уже о сложности и глубине, нерешенные экспериментальные и теоретические задачи физики элементарных частиц не уступают задачам, стоявшим перед Бором и его современниками. Не может быть и речи о том, чтобы недооценивать важность и ценность этих исследований. Несомненно, в области физики элементарных частиц, как и в других научных направлениях, в будущем будут сделаны интереснейшие открытия. Но вместе с тем я уверен, что общечеловеческое значение этой области совершенно другое по сравнению с тем, которое имели открытия в области физики атома и ядра. Это связано с тем, что новые частицы образуются только при очень высоких энергиях и живут ничтожные доли секунды. Так, время жизни «частиц-резонансов» составляет только 10^{-21} или 10^{-22} долю секунды. Нейтрино хотя и стабильны, но почти неуловимы — они свободно проходят через весь земной шар, взаимодействуя с веществом лишь в ничтожном проценте случаев. Важность изучения того или иного объекта, той или иной частицы с точки зрения запросов теории не может, конечно, быть измерена ни временем жизни, ни проникающей способностью. Но очевидно, что даже частицы, живущие 10^{-6} секунды (μ-мезоны), не говоря уже о существующих гораздо меньшее время, не могут играть в жизни человеческого общества такую же роль, как атомы, электроны и ядра, из которых состоит все вещество. Иными словами, «нос физического корабля» прошел густонаселенные теплые моря и вступил в районы, плохо приспособленные для жизни. Конечно, это в огромной мере дополняется или, если угодно, компенсируется гигантским увеличением тоннажа и длины корабля. Было бы странно не видеть этого факта и представлять развитие науки происходящим по законам подобия без изменения форм.

То, что я говорил, особенно ясно тем, кто следит за научной литературой. Лицо физических журналов, отражающее состояние физики, за последние годы существенно меняется. Появилось много специальных журналов по отдельным разделам физики (оптике, физике твердого тела, ядерной физике, акустике и т. д.). Несмотря на это, удельный вес работ в области физики элементарных частиц резко упал даже в сохранившихся общефизических журналах. В качестве примера могу сослаться на последние номера «Журнала экспериментальной и теоретической физики» и «Physical Review». Из 70 с небольшим статей, помещенных в каждом из журналов, лишь соответственно пять и три статьи посвящены экспериментам в области физики элементарных частиц. Теоретических статей по тем же и родственным вопросам несколько больше, но я, как физик-теоретик, предпочитаю вести подсчет по числу экспериментальных работ.

Коротко говоря, если уж уподоблять физику кораблю, то сейчас это судно напоминает очень широкую баржу. Она имеет нос, но в известном смысле символический, подобно дымовым трубам, которые по традиции ставят на теплоходах. Разумеется, с целью усилить свою аргументацию, я зашел слишком далеко. Выделенность носа — физики элементарных частиц в настоящее время несомненна. Поэтому вполне естественно, что многие, как правило, наиболее способные молодые физики (особенно физики-теоретики) и сейчас стремятся начинать работу в области физики элементарных частиц. Выше, очевидно, речь шла не об этом, а только об изменении роли переднего края физики на современном этапе и в обозримом будущем (говорить о более отдаленном периоде, в отношении которого у нас нет никаких данных, я не собираюсь). Это впечатление подкрепляется, если обратиться к биологии. Происходящее сейчас в этой области очень, видимо, напоминает 20-е годы в области атомной физики. Мы являемся свидетелями бурного развития, какого-то вступления в героический период. Разве это не связано с фантастическими возможностями общечеловеческого значения, которые сулит нам биология? Борьба с болезнями и радикальное удлинение жизни, создание совершенно новых видов растений и животных, создание жизни в пробирке — вот что маячит на горизонте. И я могу только присоединиться к прогнозу, который часто делается,— в оставшиеся десятилетия нашего века именно в области биологии можно ожидать крупнейших достижений. В этом смысле физика уступит биологии свое место. Мне кажется, что на такую перспективу мы — физики должны смотреть не с сожалением, а с пониманием.

Вступив на путь прогнозов и характеристики современного и следующего этапов в развитии физики и биологии, я, конечно, вступил в область, спорную и открытую для дискуссии.

Но, возвращаясь, в заключение, к оценке того вклада в физику, которым человечество обязано Нильсу Бору, мы имеем дело с вещами совершенно бесспорными. Полвека назад великий физик зажег маяк, который долгие годы освещал дорогу физикам всего мира. И этот маяк не погас с кончиной Бора — он, скорее, превратился в памятник, на котором горит вечный огонь. Этот огонь будет источником света и тепла не только для нашего, но и для будущих поколений.

НИЛЬС БОР В ПРИНСТОНЕ

Л. ИНФЕЛЬД

Варшава

Ученые-историки обязательно будут упоминать о последнем визите Бора в Принстон. Это было не совсем обычное посещение среди многочисленных поездок, предпринимавшихся великим датским ученым по приглашению американских университетов. Внешне, казалось бы, обыкновенное недельное пребывание Бора в Принстоне скрывало драматичную и интересную историю. Чтобы узнать ее, необходимо заглянуть в прошлое.

Бор и Эйнштейн — это наиболее известные имена среди старшего поколения ученых-физиков. Но не будем искать ответа на бесплодный вопрос: кто же из них является более выдающимся физиком? Замечу только, что по образу мышления они совершенно различны. Для пояснения этой мысли попытаюсь провести некоторые исторические параллели. Ответственность за эти сравнения целиком и полностью ложится на меня, поскольку параллели мои собственные, а не доказанные научные истины. Большинство физиков, с которыми мне довелось вести на эту тему беседы, разделяют мои мысли.

Кто в истории науки по образу мышления сходен с Бором? Наиболее удачным сравнением мне представляется сравнение с Фарадеем. Но поскольку этих двух ученых разделяет столетний период развития науки, нельзя заходить слишком далеко. Подобие, несомненно, существует.

Можно сравнить некоторые характерные черты этих двух ученых. Фарадей выдвинул новые идеи в науке об электричестве, коренным образом отличавшиеся от господствовавших в то время. Гениальная интуиция подсказала ему, что для достоверного объяснения явлений в этой области науки необходимо порвать с законами классической механики. Необычайная простота идей и предельно развитая оригинальность мышления — вот характерные черты творчества Фарадея. То же присуще и Бору. Поняв, что на основе классической механики невозможно объяснить внутреннее строение атома, Бор первым применил теорию квантов для объяснения структуры атома, подобно тому, как Фарадей первым ввел понятие поля для описания электрических явлений. Оба случая сопровожались неправдоподобно быстрым развитием новых разделов науки.

Аналогию можно продолжить. И Фарадей, и Бор обладали богатым воображением и были наделены гениальной прозорливостью. Фарадей видел силовые линии электрических и магнитных полей, тогда как для остальных там существовала только пустота, свободная от физических проблем. Достаточно один раз слышать Бора, видеть движение его рук, образы и модели, которые он воспроизводит, чтобы понять, что Бор действительно видит, как построен атом, что он мыслит образами, непрерывно возникающими перед его глазами. И еще одна аналогия. Оба ученых пользуются относительно простыми математическими средствами. Естественно, 100 лет в развитии физики, отделяющие время научной деятельности Бора и Фарадея, не позволяют приводить конкретные сравнения. Фарадей не обладал большими математическими познаниями. Перед той изощренностью, которая характерна для современных теоретиков в области применения математического инструмента, математический инструмент Бора выглядит крайне примитивным. Преимущество Бора не в математическом анализе, а в силе его необыкновенного воображения, видении конкретного, образного и в способности улавливания новых, никому неведомых связей.

Эйнштейн — это совершенно иной тип мыслителя. Если и здесь воспользоваться услугами истории, то наиболее точным будет сравнение Эйнштейна с Ньютоном. Эйнштейн мыслил формулами, логическими категориями, но по сравнению с Бором образность его мышления была значительно бледнее. Закон всемирного тяготения, впервые сформулированный Ньютоном, явился результатом 15-летнего труда. И этот закон удовлетворительно объяснял существо проблемы на протяжении более чем двух последующих веков, пока Эйнштейн не сформулировал своей общей теории относительности. Эта теория, впервые со времен Ньютона затронувшая проблемы гравитации, явилась результатом шестилетнего труда ее создателя. Она содержит основное решение проблемы. Работы других ученых не внесли ничего, что могло как-то изменить существо этой теории.

Решать, кто более велик — Ньютон или Фарадей, бессмысленно даже с точки зрения современной истории развития науки.

Взгляды Эйнштейна и Бора на современную физику в высшей степени различны. Бор видит прогресс науки в достижениях квантовой физики, которая за последние годы сделала огромный шаг вперед. Эйнштейн настроен скептически, он противник статистических методов в науке и считает современный период развития физики переходной стадией. В этом Эйнштейн почти не имеет единомышленников. И он прекрасно отдает себе в этом отчет. Однако Эйнштейн понимает энтузиазм молодежи, возникающий при наличии фактов эффективного решения различных проблем. И все же никому не удалось склонить Эйнштейна к работе в областях, открытых последними достижениями новой физики. Имя Эйнштейна почти у всех ассоциируется с теорией относительности. Однако Эйнштейн сделал важнейшие открытия и в других разделах науки, в частности, в области радиации. Сделал он это при непосредственном использовании теории квантов. Да и сами работы Эйнштейна сыграли решающую роль в развитии квантовой теории. Больше того, его основные открытия были сделаны именно при использовании статистического метода, противником которого он себя называл. Когда Эйнштейну задали вопрос, почему он отвергает научный метод, которым пользуется сам, в ответ услышали следующее: «Использую его временно, как некоторую необходимость, но не делаю из этого, как иные, культа...».

Более года тому назад в американском журнале «Physical Review» была помещена статья Эйнштейна и его сотрудников, подтверждающая эти взгляды. Немного позднее в том же журнале появилась статья Бора, в которой он выражает несогласие с взглядами Эйнштейна на современные представления о физике строения атома. Один сотрудник Бора рассказывал мне, как Бор много раз изменял статью, каждый раз ослабляя полемический тон. При этом ученый указывал, что отсутствие вежливости в процессе дискуссии всегда доказывает непонимание аргументов противника.

Бора и Эйнштейна связывает многолетняя дружба. Позиция Эйнштейна очень огорчала Бора. Он приехал в Принстон исключительно для того, чтобы обсудить с Эйнштейном некоторые спорные вопросы и склонить его к работе в области квантовой физики. Встреча двух известных ученых была выдающимся событием в научной жизни. К сожалению, наиболее интересная часть их научного спора не попала в официальные отчеты, поскольку происходила не на собраниях и не на приемах. Встреча, как можно было предвидеть, не привела ни к чему: и Бор, и Эйнштейн продолжали отстаивать каждый свою точку зрения.

ТРИ ВСТРЕЧИ С НИЛЬСОМ БОРОМ

Л. А. СЛИВ

Ленинград

В 1955 г. я получил приглашение от Нильса Бора приехать в Копенгаген и сделать доклад о работах по ядерной физике, выполненных в СССР. Эти работы особенно интересовали его сына Оге Бора, с которым я вел научную переписку.

Кто из физиков не мечтал поехать в Копенгаген, в эту теоретическую Мекку XX в., и говорить с самим Бором? Я много думал о предстоящей поездке, беспокоился, как встретят меня в Копенгагене,— ведь я был бы первым советским физиком, который после войны посетит институт Бора.

И вот я в Копенгагене. Бор встречает меня приветливо, говорит о том, что рад восстановить прерванные войной научные связи с советскими физиками, спрашивает о тех, кого помнит. С исключительной теплотой вспоминает Ландау, его желание по каждому вопросу высказать собственное мнение. Видно, он своих учеников по-отечески любил. С Бором легко и приятно разговаривать, он очень простой, скромный, даже немного застенчивый человек. По окончании разговора Бор идет со мной к секретарю. Получаю, как здесь принято, ключи от входной двери института и моей временной рабочей комнаты.

Институт создан Бором около 40 лет назад, здесь воспитана блестящая плеяда ученых. На стене висит шуточная карта, составленная из фамилий учеников наподобие периодической системы элементов. Как много эти имена говорят каждому физику! В институт для работы на год-два приезжают ученые со всех континентов. Тут и талантливая молодежь, и известные ученые работают над различными проблемами современной физики. Обстановка, созданная Бором в институте, такова, что все быстро находят общий язык и образуют дружный коллектив. Почти ежедневно институт встречает гостей — ученых из разных лабораторий, приехавших доложить о своих последних открытиях, новых теориях, исследованиях. На семинарах сообщения подробно разбираются и обсуждаются. До или после семинара происходит детальный разбор в отделах института. Он длится до тех пор, пока в вопрос не вносится полная ясность. Если докладчика надо в чем-либо поправить, то делается это так, чтобы он сам осознал ошибку. Такой разбор работ всегда оставляет большое впечатление у всех участников. Несмотря на название («Институт теоретической физики»), в нем есть хорошо оборудованные экспериментальные лаборатории, где работают над теми же проблемами, что и теоретики. Бор всегда был сторонником тесной связи теории с экспериментом и свои новые идеи черпал из анализа опытов, иногда поставленных специально для проверки теории.

В такой обстановке ученые быстро растут и создают замечательные работы.

Вечером я видел из окна, как Бор вышел из помещения, долго очищал свою машину от снега, сел за руль и поехал домой. На следующий день при встрече я спросил его, не трудно ли ему ездить самому. Он ответил, что машину вести нетрудно, а до 60 лет он пользовался велосипедом.

Во время моего пребывания в Копенгагене был организован прием в доме Нильса Бора. Бор жил в особняке, принадлежащем фонду Карлсберга. Этот особняк предоставляется фондом пожизненно самому почетному гражданину Дании. На приеме было много гостей, присутствовали все взрослые члены семьи Бора. Я привез Бору книгу Ландау и Лифшица «Квантовая механика» — подарок от авторов. Надо было видеть, как искренне он ему обрадовался, побежал в кабинет за очками, прочитал дарственную надпись и с помощью сына пробовал читать предисловие. У него в кабинете мы и разговорились. На столе лежал оттиск статьи о дискуссиях с Эйнштейном по проблемам атомной физики. Я его спросил, действительно ли Эйнштейн не признавал квантовой механики. «Эйнштейн очень хорошо понимал квантовую механику, но упрямо придумывал один мысленный эксперимент за другим, желая показать ограниченность (неполноту) квантово-механического описания»,— ответил он. «Дискуссия с Эйнштейном помогла нам глубже понять квантовую механику и убедиться в ее внутренней стройности»,— добавил он.

А как вы относитесь к критическим статьям, появившимся недавно, в частности к статье де-Бройля?— спросил я ученого. «Еще при создании квантовой механики,— ответил он,— де-Бройль высказывал те же идеи, что и в статье. Мы с ним много дискутировали, и тогда он признал их ошибочность».

Знает ли он о критике его взглядов некоторыми нашими философами,— спросил я его. «Подробно не знаю. Хотел бы заметить, что иногда ссылаются на классиков марксизма. Маркс и Ленин были великими людьми, но творили они во времена до атомной физики и квантовой механики. Между тем атомная физика нас многому научила, и для того чтобы осмыслить то новое, что она внесла в изучение природы, надо в первую очередь глубоко, творчески ее понимать»[1]. Бор обещал более подробно о квантовой механике поговорить в ближайшее время. За обедом Бор провозгласил тост за развитие сотрудничества с советскими физиками. Когда выступившие благодарили его, говорили о его выдающейся роли, он застенчиво опускал голову.

Бор не забыл обещания и через несколько дней трем приехавшим ученым он начал читать лекции по обоснованию квантовой теории. Они длились по три-четыре часа три дня. Мне и сейчас нетрудно вспомнить их содержание. Мы рассаживаемся за длинным столом. Бор,

---

[1] Я воспроизвожу не стенографическую запись беседы, а стараюсь передать смысл высказываний Бора.

сидя с другой стороны, вытаскивает свои три трубки и набивает табаком самую большую. Сначала трудно следить за ходом его мыслей: говорит об одном, бросает и излагает другое. Так много раз. Наконец нить рассуждений поймана. Он переходит к последовательному изложению вопроса. Казалось бы, тема для него не новая и излагал он ее много раз, но видишь, как он заново ее продумывает, ищет новые детали, новые слова, воодушевляется, часто забывает про трубку, ходит вдоль стола и вслух рассуждает.

Он рисует картину доквантовой физики, механической концепции природы. Далее он переходит к показу недостаточности классической теории при анализе атомных явлений, вспоминает опыты, останавливается на открытии кванта действия, на дилемме о природе излучения. Теперь он подошел к центральному пункту. Подробно описывает ситуацию, возникшую при объяснении устойчивости атома, и появление идеи стационарных состояний, а затем принципа соответствия. Забыты трубки, он целиком во власти мысли, ничто не может его оторвать от этого процесса. С предельной ясностью излагаются опыты по интерференции электронов. На приборах-моделях показывается, что явление дифракции электронов будет наблюдаться, когда диафрагмы болтами жестко привинчены к основанию, и поэтому о передаваемом импульсе нельзя ничего знать. Для измерения импульса нужен другой прибор, где интерференции не будет. Любой эксперимент, любой прибор всегда классичен, ибо вы должны уметь сказать другому, что измеряли и какой результат получили. Квантовый эксперимент — бессмысленное понятие. Полную информацию о свойствах атомного объекта можно получить из двух взаимно исключающих друг друга классических картин, которые нельзя скомбинировать в единую картину объекта, но каждая из которых описывает важные стороны объекта. Необходимость дополнительного и статистического описания надо рассматривать как обобщение идеализированного детерминистического описания (account) в классической физике. Классическое описание полно в том смысле, что состояние физической системы в любой момент времени определяется наблюдаемыми величинами.

Дополнительность — это обобщение классического детерминизма; новое слово должно подчеркнуть новизну ситуации.

Математика всегда более однозначна, чем слова: квантовый символизм покоится на некоммутативном алгоритме типа $pq - qp = i\hbar$, который позволяет дать согласованное и исчерпывающее описание атомных явлений. Тут Бор вспоминает, как Крамерс пытался написать соотношение коммутации без мнимой величины i и не смог. Такой символизм дает непротиворечивое классическое описание экспериментальных условий, а также способен описать различие атомных частиц с разными неклассическими атрибутами подобно фермионам и бозонам. Некоммутативность операторов прямо соответствует взаимному исключению обстоятельств, допуская тем самым недвусмысленную интерпретацию соответствующих классических картин. Ведь если не был бы введен такой формализм, то мы запутались бы в объяснении атомных явлений, что было бы большим несчастьем. Квантовая механика так хорошо развита, так внутренне согласована, что нет сомнений в ее правильности. Лицо Бора выражает огромную радость, заполнившую его целиком. Он снова и снова переживает успехи квантовой механики.

Рассказывая, он так увлекается, так глубоко уходит в свои мысли, что забывает о времени, и только неоднократное напоминание секретаря о других ждущих его делах возвращает его к действительности и заставляет закончить лекцию. Когда во время лекции, бывало, задают вопрос, то видишь, как трудно ему переключиться, и он иногда ограничивается односложным ответом. Но вопрос не оставался забытым, и в конце лекции или в следующий раз он давал полный ответ.

Я воспроизвел основную канву лекций. Бор освещал и много других вопросов. Остановлюсь на некоторых из них.

Является ли ситуация, с которой встретились физики, особенной, специфической для атомной физики? Нет. Принцип дополнительности есть общий принцип, и мы встречаемся с ним почти во всех областях знаний. Особенно он важен для понимания биологических и психологических проблем. Действовать и контролировать действие, милосердие и правосудие — понятия дополнительные. Конфликты в литературе и драматургии всегда связаны с «дополнительностью». Бор приводит примеры из Шекспира и Достоевского.

В каком направлении пойдет дальнейшая разработка квантовой механики? Это трудный вопрос, связанный с созданием квантовой теории волновых полей и элементарных частиц. Ясно, что при разработке такой теории потребуется дальнейший отход от обычных понятий и представлений, а также развитие нового математического аппарата. По его мнению, если пространство дискретно, то наименьшая длина, которая может играть роль,— это $\hbar/Mc$, где M — масса протона.

Отвечая на вопрос о религии, Бор заметил: идея бога понятна с точки зрения классической механики, бог полностью детерминирован. Но с точки зрения принципа дополнительности слова «бог все знает и может» не имеют определенного смысла, так как, согласно квантовой механике, все зависит от ситуации.

Ученый говорил, что хочет написать книгу, посвященную обоснованию и анализу основных положений атомной физики, но не знает, как скоро он сможет осуществить свой план («ведь я очень медленно пишу»). Пока он собирается отредактировать свои статьи, опубликованные в журналах, написать предисловие и издать отдельной книгой (книга вышла в 1958 г.).

Бор был великим тружеником. Он долго и тщательно работал над каждой своей статьей. Его рабочий день начинался в 9 утра и часто длился до 12 ночи. До войны он обычно работал с двумя секретарями и ассистентом. Ассистентами у него были Крамерс, Клейн, Паули, Розенфельд, Калькар. Часто секретари не выдерживали напряжения дня, а Бор был неутомим.

Ассистент Бора доктор Розенталь рассказывал, как Бор работал над книгой «Прохождение заряженных частиц через вещество». Рукопись пять раз заново переписывалась, Бор держал четыре корректуры. В окончательном виде книга очень отличалась от первоначального варианта. Бор считал, что работа над формой изложения способствует уяснению и углублению излагаемых мыслей.

Бор никогда не составлял письменно текст своих выступлений. К каждому выступлению он долго готовился, обдумывал и обсуждал различные детали.

Хочется отметить общительность и жизнерадостность Бора. Он любил шутку и с удовольствием вспоминал остроты учеников по своему адресу. Чувство юмора не покидало его в самые трудные минуты. В институте издавался юмористический журнал под названием «Journal of Nuclear Physics».

За день до отъезда из Копенгагена я зашел к Бору попрощаться и поблагодарить за радушный прием. Сначала разговор шел о возможности направлять в институт ежегодно для совершенствования двух молодых физиков и регулярного обмена визитами между учеными СССР и Дании старшего поколения.

Я решил выяснить позицию Бора по некоторым философским вопросам, дискутировавшимся в нашей печати. Я спросил его, признает ли он, что электрон существует вне нашего сознания и является объективной реальностью. «Конечно,— ответил он,— разве физик может изучать предмет, существующий только в его голове? Об этом философы могут спорить. Физик изучает реальные предметы и события».

«А признаете ли вы причинность, как всеобщую взаимосвязь явлений и вещей?»— спросил я. «Когда я пишу о нарушении детерминизма в квантовой механике, я имею в виду причинность классической механики. Только такую причинность физики знали до квантовой механики, и потому я не мог писать иначе, меня бы не поняли»,— ответил Бор.

Из этого разговора я вынес убеждение, что различие в точках зрения Бора и нашей скорее терминологическое, языковое, а не принципиальное. Бор как крупнейший ученый-естествоиспытатель не мог не стоять на материалистических позициях.

В 1958 г. я снова приехал в Копенгаген. Нильс Бор был бодр и много работал. Вернувшийся в Копенгаген после многолетнего отсутствия профессор Розенфельд мне говорил: «Я был поражен, увидев Бора так же интенсивно работающим, как 25 лет назад». Бор радостно переживал успехи теории сверхпроводимости и обсуждал различные ее аспекты. Приезжал в Копенгаген Гейзенберг и рассказывал свою нелинейную квантовую теорию поля. Бор считал, что теория Гейзенберга есть только пробный шаг на пути создания будущей теории.

В воскресенье мы поехали за город. Нильс Бор сам вел машину всю дорогу. На привале зашел разговор о постановке начального и среднего образования в Дании. Бор рассказал об этом так обстоятельно и с такими подробностями, что привел бы в изумление любого директора школы. Энциклопедичность его знаний по каждому вопросу всегда поражала.

В то время Бор закончил статью «Квантовая физика и философия». В ней он четко сформулировал свои взгляды на роль прибора при исследовании атомных явлений, на причинность в квантовой механике, подчеркнул объективность квантово-механического описания. Бор пригласил меня участвовать в обмене мнениями в узком кругу, где он излагал содержание статьи. По окончании обсуждения Бор подарил мне препринт статьи, а другой экземпляр просил передать академику В. А. Фоку.

В третий раз я встретился с Бором в Москве в мае 1961 г., когда он с сыном и женой приезжал по приглашению Академии наук СССР. Я приехал в Москву через несколько дней после их приезда. При встрече Бор начал делиться впечатлениями от праздника Архимеда, который состоялся в МГУ накануне и в котором он принял участие. «Какой чудесный праздник устроили студенты, сколько остроумия и изобретательности они проявили»,— говорил он. И тут же вспомнил недавно опубликованные в Дании материалы о том, как экспериментировал Архимед.

В тот же день состоялась встреча Бора со студентами физического факультета МГУ. На эту встречу он ехал с большой охотой, встреча с молодежью его особо влекла. Центральная аудитория была заполнена задолго до начала. Были заняты все проходы, в центре поставлены стулья, были открыты боковые двери, и там толпились студенты. Бор был встречен громом аплодисментов, но все затихло, как только он начал говорить. Он вспомнил вчерашний праздник, рассказал об опытах Архимеда и подчеркнул, что нам они понятны, ибо изложены на обычном человеческом языке. Он подчеркнул, что физика изучает объективную реальность. Рассказал о способе описания явлений в классической физике. Он говорил увлеченно, но свободно, отчего разговор походил на задушевную беседу.

Далее Бор перешел к вопросу о поражающей устойчивости атомов и молекул, необъяснимой с точки зрения классических законов. Он говорил о том, как была познана устойчивость атомов, для чего потребовались не только тщательные исследования, но и остроумие, как учились задавать вопросы природе и правильно истолковывать результаты экспериментов. Он забывал останавливаться и дать возможность перевести сказанное. Ему предложили стул для отдыха, пока говорит переводчик, но он не садился. До начала встречи Бор спросил, не долго ли будет, если его выступление продлится полчаса. Он проговорил полтора часа, и аудитория слушала его с неослабеваемым вниманием. Я не видел большего контакта между аудиторией и оратором, чем тогда. Он говорил, что математический аппарат не должен заслонять физическую сущность. Математические символы должны быть понятны хотя бы настолько, чтобы их могли выучить студенты. Аудитория выразила одобрение. Математический аппарат нужен для краткого и четкого выражения физических идей и понятий. Физика в сущности проста. Часто свои мысли Бор выражал в шутливой форме, и аудитория живо реагировала на это. Он говорил о трудностях, с которыми встретились при создании квантовой механики, о принципе дополнительности, о том, что создателями квантовой механики были молодые люди, обладавшие ко всему большим чувством юмора.

Когда Бор кончил, студенты долго не отпускали его, подарили цветы. Бор не мог не почувствовать, насколько близки его идеи нашей молодежи, как высоко они ценят его вклад в науку. Разве не в этом счастье ученого?!

НАУЧНОЕ ТВОРЧЕСТВО НИЛЬСА БОРА[1]

Е. Л. ФЕЙНБЕРГ

Москва

В течение полувека Нильс Бор пользовался исключительным уважением физиков, особенно физиков-теоретиков. В этом последнем обстоятельстве можно было бы заметить нечто парадоксальное. Надо сказать правду: нередко физики-теоретики кто с открытой, кто с не осознанной ими самими иронией относятся к теоретическим работам, в которых мало математики. Между тем, если перелистать работы Бора по квантовой теории и теория ядра, то, кроме школьной алгебры (да разве что определенного интеграла), ничего более сложного и не встретишь (формально исключение составляет, может быть, совместная с Розенфельдом работа по измеримости напряженности электромагнитного поля, но и там математика не представляет ничего особенного).

Наивно, конечно, думать, что Бору были чужды математические сложности. Его первая профессорская должность — в Манчестерском университете — была должность профессора[1] математической физики. Бора всегда интересовали самые трудные, самые глубокие вопросы физики и миропонимания, а в это время самыми глубокими и трудными оказались не математические вопросы. Своеобразная схема и математический аппарат, которые были развиты при создании квантовой механики, проло-

---

[1] Выступление на вечере памяти Нильса Бора, состоявшемся в Москве в Политехническом музее 12 декабря 1962 г.

жили путь к более глубокому пониманию основных физических законов, и Бор как бы смотрел поверх этого аппарата. Своими серьезными прозрачно-голубыми скандинавскими глазами он вглядывался во что-то самое непонятное, самое существенное. Вместе с тем Бор решал и конкретные физические проблемы, о чем еще будет сказано. Но его замечательный вклад в науку связан с созданием и осмыслением основ той новой физики, которую он вместе с другими, вместе со своими сотрудниками и учениками строил,— с пониманием квантовой механики. В совокупности с чертами его характера, удивительным образом сочетавшего мягкость и твердость, доброжелательность и непримиримость, уступчивость и непреклонность,— эти особенности его научного творчества создавали совершенно исключительную личность мыслителя. Величие его души и величие его ума вызывали преклонение всего мыслящего мира.

Бор родился в Копенгагене, в семье профессора физиологии, в 1885 г. Здесь он и учился. В возрасте 21 года он представил Датскому королевскому научному обществу свою первую научную работу, за которую был награжден золотой медалью Общества. Когда в 1909 г. это исследование, «дополненное некоторыми экспериментами», как сказано в примечании, было опубликовано (по представлению Рамсея) в «Philosophical Transactions», оно заняло 37 страниц. Это было классическое, «фундаментальное» исследование колебаний поверхности струи жидкости, имевшее целью точное определение на основе специальных опытов поверхностного натяжения воды. Бор продолжал в нем соответствующую работу Рэлея не только в отношении темы, но и по стилю. Здесь была большая и подробная теоретическая часть с решением уравнений гидродинамики, параграф «Третье приближение»; было описание эксперимента автора, сопровождавшееся штриховыми рисунками, указывалось положение источника света, хода лучей и все остальные подробности, которые необходимо знать для суждения об эксперименте; были таблицы первичных данных и сводная таблица двух десятков других измерений значений поверхностного натяжения и их подробное обсуждение. Все завершалось окончательной цифрой, которую получил сам Бор.

По нашим современным критериям, эта работа — прекрасная кандидатская, а может быть и докторская диссертация. Всем, кто занимался пульсацией струи, эта работа известна не менее, чем боровская теория атома. Когда в 1910 г. Бор написал дополнительную статью на эту же тему, откликаясь на работу Ленарда, то было вполне закономерно, что статья была представлена в журнал Рэлеем.

Тема, стиль, имена Рэлея, Рамсэя, Ленарда — все говорит о том, что Бор по существу еще жил в спокойном уравновешенном XIX веке. Но уже следующей своей работой, посвященной теории электронов в металле,— диссертацией, которую он защитил в Копенгагене весной 1911 г., Бор вышел на рубеж идей XX века. Неудивительно, что завершив таким образом свое образование, Бор поехал в Кэмбридж к выдающемуся физику Дж. Дж. Томсону, одному из классиков электронной теории. Пребывание в Кэмбридже ознаменовалось неоднократными спорами. Так, известен эпизод, научная сущность которого, без упоминания имен участников, вошла в учебники. Томсон в то время попытался объяснить диамагнетизм металлов: закручиваясь в магнитном поле, считал Томсон, свободный электрон создает орбитальный магнитный момент, направленный обратно внешнему полю. Отсюда и диамагнетизм. Но Бор смотрел на шаг дальше. В своей диссертации он показал, что на периферии куска металла конечного размера микроскопические токи, отражающиеся от его поверхности, образуют общий ток, охватывающий весь кусок в обратном направлении и полностью компенсирующий своим магнитным моментом поля томсоновских микротоков. Поэтому, как и вообще в рамках классической электронной теории, диамагнетизм свободных электронов невозможен.

Это столкновение знаменитого Томсона и молодого датчанина, по-видимому, существенно сказалось на их взаимоотношениях. Сыграл роль этот эпизод или нет (в 1961 г. Бор сказал: «Томсон был гениальный человек, который первый заговорил об электромагнитной массе электрона» [1]), но менее чем через год Бор сменил Кемб-

[1] Здесь и далее устные высказывания Бора цитируются по записям, сделанным во время его пребывания в Москве в мае 1961 г.

риджж на Манчестер, Томсона на Резерфорда и, главное, модель атома Томсона на увлечение новой, планетарной моделью, которая была предложена в то время Резерфордом на основе его замечательных экспериментов. Бор решительно вступил в новую физику и сам стал частью физики XX века — частью замечательной, романтической и героической.

К 1913 г., как известно каждому физику, относится публикация в «Philosophical Magazine» трех статей Бора, излагающих квантовую теорию водородоподобного атома на основе выдвинутых Бором постулатов, в частности, объяснение размеров атома, формулы Бальмера и константы Ридберга, содержащих предсказания относительно других спектральных серий, попытку рассмотрения атомов с числом электронов, превышающим единицу, объяснение характеристических рентгеновских лучей, объяснение энергии ионизации, утверждение о том, что ядра должны испускать β-электроны. По существу, здесь содержался и закон смещения порядкового номера при α- и β-распадах. Была сделана также попытка квантового рассмотрения молекул и содержался ряд других замечаний.

Эти работы, конечно, имели предшественников. После успехов квантовой гипотезы в объяснении спектра черного излучения (Планк), фотоэффекта и теплоемкости твердых тел (Эйнштейн), конечно, возникала идея о связи постоянной Планка со строением атома. Мысль о планетарном строении атома, как известно каждому физику, неоднократно высказывалась ранее. Непосредственный предшественник Бора, работы которого Бор в своих статьях многократно упоминает и разбирает,— Никольсон представлял себе электроны заполняющими некоторые оболочки вокруг ядра и говорил о значении момента количества движения при квантовании. Ему удалось получить превосходное совпадение некоторых вычисленных частот с наблюдаемыми. Однако у Никольсона энергия излучаемого кванта считалась пропорциональной частоте обращения электронов, из-за чего, как подчеркивал Бор, получался ряд нелогичностей, и вообще теория его была далека от успеха.

Решительный шаг Бора по сравнению со всеми другими попытками состоял именно в том, что частота излучения не связывалась непосредственно с частотой обращения.

Работы Бора единым образом разрешили целый ряд труднейших вопросов строения атома, и это поразило современников. В его работах, однако, были и некоторые малоудачные пункты, вроде рассуждений о строении молекул.

Вообще для работ Бора характерно, что все они в движении. Часто наиболее ясная и строгая формулировка достигалась лишь в последующей статье, хотя основного при этом Бор не менял. В этом смысле можно сказать, что стиль работ Бора по теории атома и квантовой механике не был «классическим», сразу завершенным, построение не было строго аксиоматическим, как, например, у Эйнштейна.

Характерен рассказ Бора об одной из его дискуссий с Эйнштейном, о которых речь будет далее. Эйнштейн сказал: «Давайте твердо зафиксируем сначала то, что в Ваших представлениях я могу принять с моей точки зрения, и отправляясь от этой базы, мы будем логически рассуждать далее». Бор ответил: «Я считал бы предательством по отношению к науке, если бы я согласился зафиксировать твердо что-либо в этой новой области, где все еще неясно».

Гениальность Бора в том, что в атмосфере противоречивых идей и представлений он умел найти путь, приводящий к правильному результату.

Основные результаты первых трех статей послужили базой развития всей атомной физики в работах самого Бора, а также Зоммерфельда, Эренфеста и других теоретиков и исходным пунктом многих экспериментальных исследований.

Бор подходил к необходимости квантования характерным для теоретика путем. Он рассуждал так: установлено, что атом имеет диаметр примерно в одну стомиллионную сантиметра. Мы знаем, что в нем имеются электрические заряды определенной величины, находящиеся на телах определенной массы. Как объяснить размер атома? Из зарядов и массы нельзя построить величину размерности длины. Значит, либо должны существовать какие-то другие силы, действующие на расстоянии радиуса атома, а такие силы нам неизвестны, и было бы слишком необоснованно предполагать их существование, либо должны играть роль какие-то характерные постоянные, которые вместе с зарядом и массой позволят получить величину размерности длины. Такая постоянная нашлась — постоянная Планка, и Бор ввел в теорию атома кванты.

После завершения первых работ по теории атома Бор вернулся на год в Копенгаген и читал здесь лекции в университете. В 1914—1961 гг. он снова был в Манчестере, продолжая работать над теорией атома, создал известную теорию потерь энергии быстрых частиц в среде, но затем уже окончательно обосновался в Копенгагене. Здесь впоследствии для него был учрежден Институт теоретической физики, ставший притягательным центром для лучших физиков-теоретиков на последующие 40 лет. В этом институте работали, пожалуй, все, кто вместе с Бором создавал квантовую механику.

Уже в 1922 г. Бору была присуждена Нобелевская премия за квантовую теорию планетарного атома. Однако было бы ошибочно думать, что на этом завершились его труды. В течение всего героического периода создания квантовой механики он в буквальном смысле «управлял теченьем мысли» физиков-теоретиков. Он познал прижизненную славу, был членом более чем двух десятков академий. Эта слава не изменила чудесных черт его характера и не снизила активности его ума.

Бору были очевидны недостатки его теории атома, так называемой старой квантовой теории. Прежде всего стоял вопрос об уяснении физической природы квантовых закономерностей. Когда в 1905 г. Эйнштейн предложил фотонную теорию света, в которой причудливым образом соединились корпускулярные свойства явления с волновыми, то сам Эйнштейн рассматривал ее только как эвристическую точку зрения (это слово фигурировало в названии статьи Эйнштейна), но не как подлинную теорию. Он считал, что противоречия в высказанных им взглядах на свет так сильны, что его работа может быть только наводящим указанием. Наоборот, Бор в своей последующей работе исходил из убеждения, что эта двойственность является самым существом новой теории, новой физики.

Бор нашел квантовые правила, выдвинув очень смелый постулат о том, что в некоторых определенных состояниях атом может пребывать устойчиво, пока он не совершит скачка в другое состояние, выделив или, наоборот, поглотив квант энергии в виде света.

Наличие в теории этих скачков сразу стало камнем преткновения для ее понимания. В 1961 г., когда Бор был в Москве и многие из нас слышали его, он рассказал много интересного. В частности, на вопрос, как реагировал на его теорию Резерфорд, Бор ответил: «Резерфорд не сказал, что это глупо, но он никак не мог понять, каким образом электрон, начиная прыжок с одной орбиты на другую, знает, какой квант нужно ему испускать. Я ему говорил, что это как «branching ratio» при радиоактивном распаде, но это его не убедило». С другой стороны, Бор узнал через Хевеши отзыв Эйнштейна. Эйнштейн сказал: «Это все мне очень понятно, это близко к тому, что я сам мог бы сделать. Но если это правильно, то это означает конец физики, как науки».

В последующие годы Бор разработал свою теорию и применил ее к ряду физических и химических явлений Теория совершила триумфальное шествие, она объяснила много удивительных закономерностей.

Можно считать, что развитие старой квантовой теории исчерпалось и завершилось. Бор сформулировал и применил к процессу излучения знаменитый принцип соответствия, а в 1921 г. объяснил периодический закон Менделеева. Эти работы получили всеобщее признание, и, как уже говорилось, в 1922 г. Бору была присуждена Нобелевская премия.

Удивительная вещь, но для очень многих эти работы — не только главный, но и почти единственный труд Бора. Более того, если мы раскроем энциклопедии, то, например в Британской энциклопедии 1947 г., научная биография Бора на этом и кончается,— вот, получил Нобелевскую премию, и конец. В нашей энциклопедии, в томе, вышедшем в 1950 г., после изложения упомянутых работ прибавляются только некоторые нелестные слова по поводу того, что Бор сделал впоследствии при интерпретации квантовой механики. А между тем, вероятно, большинство физиков-теоретиков считает, что осмысление квантовой механики, то, что называют интерпретацией квантовой механики (хотя сам Бор против этого термина очень возражал), составляет важнейшую, неотъемлемую часть сделанного Бором. Наличие квантовых скачков в атоме, наличие волнового дуализма для света, который вытекал из работ Эйнштейна, создавало крайне трудную для понимания и для стройного представления теории ситуацию. Хотя Эйнштейн в 1918 г. дополнил свою квантовую теорию света законами излучения, введя понятие о вероятностях спонтанных переходов и об индуцированных переходах и тем еще дальше продвинул теорию, он, как и многие другие, не мог примирить две стороны квантового дуализма. Наоборот, для Бора такой дуализм был основой. Того факта, что этот дуализм был вскрыт на примере света, было для него достаточно, чтобы начать настойчиво осмысливать создавшееся положение и искать стройную единую теорию. Поэтому, когда были открыты волновые свойства электронов, они оказались для него лишь важным дополнительным элементом: выяснилось, что не только у света, но и у электрона имеется сочетание «противоречивых» свойств. Проблема же дуализма, проблема создания непротиворечивой физической схемы стояла перед Бором все время. Несомненно, его не удовлетворяла и собственная теория атома, даже усовершенствованная Зоммерфельдом и Эренфестом. И не только потому, что, как часто пишут в учебниках, она не могла объяснить интенсивность спектральных линий и т. п., но потому, что она не была последовательной и ясной теорией. Труд необходимо было продолжить, и он продолжался без перерыва.

В 1924—1927 гг. трудами де-Бройля, Шредингера, Гейзенберга, Дирака и других была создана квантовая механика и разработан ее математический аппарат. Но, как любил подчеркивать Л. И. Мандельштам, «всякая физическая теория состоит из двух дополняющих друг друга частей». Одна часть—это уравнения теории, устанавливающие соотношения между математическими символами. Другая часть — связь этих символов с физическим миром. Без второй части «теория иллюзорна, пуста». Без первой «вообще нет теории». Смысл, значение этой второй части, часто забывается, после того как теория освоена. В нериод, когда развернулась работа Бора, когда были написаны уравнение Шредингера и уравнения матричной механики Гейзенберга, оставалась труднейшая проблема — уяснить, что значат стоящие в этих уравнениях символы, что значат «координаты» электрона. Ведь если электрон — волна, то у него нет определенной координаты.

Такие проблемы интерпретации, осмысления, установления связи между математическими символами и физическими объектами в мире вставали при создании каждой теории. В частности, незадолго перед тем они возникли в теории относительности. Так, Лоренц получил формулы преобразования из одной системы отсчета в другую, но в них входила величина, которую он называл «местным временем» и рассматривал как математическую, вспомогательную. Между тем создание осмысленных уравнений теории относительности покоится на том, что это «местное время» и есть истинное время, замеряемое наблюдателем в соответствующей системе отсчета. Выяснение этого составляет один из самых главных элементов теории относительности как физической теории и одну из главных заслуг Эйнштейна.

Но в квантовой механике вопрос встал, пожалуй, еще острее и оказался еще более трудным. Те, кто создавал основы квантовой механики, приезжали в Копенгаген и подолгу напряженно работали с Бором, «переваривая» смысл содеянного. Это было, как подчеркивают в своих воспоминаниях участники, тяжелейшей работой. Гейзенберг вспоминает «изнурительные споры с Бором», Пайерлс уехал «в состоянии полного изнеможения», вспоминает Розенфельд слова Гамова.

Надо было понять, что «координаты», которые стоят в уравнении Шредингера, это не координаты точки, в которой «находится» электрон, а, как было объяснено в результате такой работы, координаты точки, в которой будет обнаружен электрон, если произвести эксперимент, переводящий электрон в состояние с определенным положением.

Проблема скачков предстала в новом виде. Действительно, есть две возможности: либо мы поставим на пути электронной волны кристалл, и тогда эта волна будет на нем диффрагировать и изменять характер распространения, по-прежнему заполняя обширное пространство, либо мы поставим регистрирующий прибор, например фотопластинку. Тогда вся волна как бы соберется в одной точке, где и будет обнаружено почернение, причем предсказать, в какой именно точке обнаружится электрон, теория может лишь в статистическом смысле. Здесь те же «квантовые скачки»,— та же трудная проблема, которая вставала в связи со старой теорией атома Бора и с теорией фотонов Эйнштейна.

Бор вместе со своими сотрудниками в результате длительных исследований пришел к четкому пониманию всей схемы квантовой механики. Он подчеркнул, что мы имеем дело с особенностями микромира, которые нельзя интерпретировать в отрыве от макромира, так как любое суждение об этом микромире, любое высказывание мы делаем, предполагая взаимодействие с макромиром, с тем, чтó называется прибором, и что микромир мы воспринимаем в терминах макромира. Бор подчеркивал, что здесь возникает положение, когда в понятие «явление» необходимо обязательно включать взаимодействие объекта с макромиром, представленным измерительным прибором. В 1927 г. Бор сформулировал важнейший принцип — принцип дополнительности. Под ним он понимал констатацию того факта, что при наблюдении микромира невозможно совместить два принципиально разных класса приборов: наблюдение даст либо одну сторону этого микромира, либо другую.

Можно по-разному относиться к этой формулировке, но ясно, что сущность положения, вскрытая Бором,— решающая в нашем понимании принципов микромира. Эта дополнительность имеет такое же фундаментальное значение в квантовой механике, как принцип относительности в теории Эйнштейна.

Против этой концепции, конечно, появились возражения. Ее обвиняли, например, в том, что здесь допускается свобода воли электрона и в прочих грехах. Бор неоднократно отвечал на это. В частности, в 1949 г. он сказал, что спор шел вокруг вопроса «следует ли применять к осуществлению отдельного эффекта (из числа возможных) терминологию, предложенную Дираком, согласно которой мы имеем дело с выбором со стороны „природы“, или же мы должны говорить, как это предложил Гейзенберг, о выборе со стороны „наблюдателя“, построившего измерительный прибор и сделавшего отсчет результатов. Любая такая терминология,— говорит Бор,— представляется, однако, сомнительной. Едва ли допустимо приписывать волю природе в обычном смысле, а с другой стороны, наблюдатель никак не может повлиять на события, которые протекают при созданных им условиях. По моему мнению, у нас нет никакого другого выхода, как признать, что в этой области физики мы имеем дело с элементарными (неделимыми) явлениями и что все сводится к выбору между различными дополнительными типами явлений, которые мы хотим исследовать».

Мы видим, что работа Бора граничит с философскими, гносеологическими проблемами. Он неустанно развивал и уточнял свои представления, но он не мог всех убедить. Как ни парадоксально, творец аппарата квантовой механики Шредингер не мог примириться с этой точкой зрения и умер, считая, что необходимо избавиться от вероятностного элемента. Когда в результате длительного обсуждения с Бором в 1926—1927 гг. его очередная попытка была опровергнута Бором, Шредингер воскликнул: «Если мы собираемся сохранить эти проклятые квантовые скачки, то я жалею, что вообще имел дело с квантовой теорией». Бор ответил: «Но зато все остальные благодарны Вам за это».

Чрезвычайно интересна дискуссия Эйнштейна с Бором. Эйнштейн, который создал замечательные, фундаментальные разделы квантовой теории, неоднократно пытался уязвить концепцию, выработанную физиками во главе с Бором. Бор и Эйнштейн неоднократно встречались, и между ними разгорались страстные споры. Бор о них изумительно рассказывал в 1961 г., когда он был у нас в Москве. Он перебирал трудные вопросы, физические парадоксы, на протяжении почти двух десятков лет выдвигавшиеся Эйнштейном. Каждый раз, изложив очередной парадокс Эйнштейна, Бор заново приходил в волнение, пережитое им 20—30 лет назад. Его лицо вытягивалось, мрачнело, глаза почти беспомощно устремлялись вверх, он говорил: «Это был трагический момент. Ведь если бы Эйнштейн оказался прав, то все рухнуло бы! Но нет, этого не произошло. Вот что недосмотрел Эйнштейн»,— и Бор переходил к объяснению, его лицо добрело, расплываясь в счастливой, обаятельной улыбке. Затем следовало изложение нового парадокса, и снова: «Это была страшная ситуация»— и палец тревожно поднят кверху, и снова после разъяснения удовлетворенность и почти детская радость на лице. И в третий раз: «Это был тяжелый вопрос».

Надо сказать правду, слушавшая Бора почти тысячная молодая аудитория не переживала вместе с ним эти драматические моменты. Она наслаждалась общением с Бором, но не задумывалась над тонкими парадоксами Эйнштейна — ей со школьной скамьи было известно, что Бор все разъяснил. Бор как-то, весело смеясь, рассказывал: после одной из его лекций в Америке вперед вышел студент и спросил: «Неужели действительно были такие идиоты, которые думали, что электрон вертится по орбите?». «Умным» этого студента сделал Бор.

Многолетняя дискуссия с Эйнштейном была страстной, но благородной. Бор восхищался Эйнштейном.

В частном разговоре в Москве он говорил: «Эйнштейн был не только гений, он был еще и прекрасный, очень добрый человек. Его улыбка и сейчас стоит передо мной. Но он привык все делать сам, и делать прекрасно... А для понимания квантовой механики были необходимы совместные обсуждения». Бор неоднократно в печати и устно подчеркивал, что критика со стороны Эйнштейна чрезвычайно способствовала выработке более глубокого понимания квантовой механики.

В 1949 г. к 70-летию Эйнштейна в Америке был издан сборник статей, написанных как философами, так и физиками. Принял в нем участие и Бор. Большая статья Бора, как это ни странно для юбилейного сборника, была посвящена все тому же — изложению истории их споров и доказательству того, что в каждом случае Эйнштейн в сущности был неправ. Бор подчеркивал, какие замечательные вопросы ставил Эйнштейн и как они помогли развитию теории. В конце сборника был помещен обширный ответ Эйнштейна, в котором он отстаивал свою точку зрения и полемизировал с Бором и его единомышленниками. В заключение Эйнштейн написал: «Я вижу, что я был... довольно резок, но ведь... ссорятся по-настоящему только братья или близкие друзья».

Этот героический период создания стройной системы физических идей квантовой механики по существу завершился в начале 30-х годов. Затем квантовая механика развивалась, обнимая теорию электромагнитного поля и другие более сложные вопросы. Бор и тогда не прекратил интенсивной научной работы. Он перешел к исследованию новой проблемы, более конкретной,— проблемы строения ядра. И здесь он заложил основы для плодотворного развития теории. В то время сложилось очень трудное положение, когда попытки взаимно согласовать новые эксперименты, особенно по рассеянию нейтронов ядром, вступили в противоречие с привычной картиной, которую применяли теоретики. Создавшаяся сложная ситуация не требовала фундаментальных изменений основ квантовой механики или физики. Однако необходимо было по-новому взглянуть на ядро. Бор в маленькой заметке, не содержащей ни одной математической формулы, проанализировал вопрос и показал, как нужно подходить к процессу взаимодействия нейтронов с ядром. Именно он заметил, что когда нейтроны соударяются с ядром, они не просто рассеиваются, а сначала образуют промежуточное состояние, существующее относительно долго. Это простое замечание создало несколько необычную схему процесса. После него вся физика ядра развивалась по этому направлению. Бор вновь возвращался к вопросам теории ядра, например, при разработке теории деления. Затем он вернулся к прохождению заряженных частиц через вещество, которым он занимался в молодости, и выпустил книгу, подытожившую эти исследования. И в то же время он не уставал пропагандировать квантовую механику, разъяснять ее физическую сущность, уточнять ее интерпретацию, объясняя специфику новых явлений, с которыми мы встречаемся в микромире.

Имя Бора связано также с драматическим эпизодом создания атомной бомбы во время войны.

Говоря об участии Бора в этом страшном начинании, надо помнить, что тогда была одна цель — спасти мир от фашизма. Бор принадлежал к тому поколению, которое видело каблук гитлеровского сапога у самого своего лица.

То, что пережил Бор и другие люди в Европе, не встречалось ни в какую другую эпоху. Его жизнь в то время, бегство от гитлеровцев сначала на лодке, затем на самолете — все это эпизоды, которые вряд ли встречались в жизни ученых такого масштаба на протяжении последних сотен лет. Может быть, он, как и некоторые другие ученые, испытывал иллюзию, что, помогая создать бомбу, он сможет повлиять на ее использование. Однако, как только война закончилась (за несколько месяцев до того, как настоятельные советы ученых были отвергнуты, и бомбы были сброшены на Нагасаки и Хиросиму), он резко порвал с работой над атомным оружием, и вся его последующая необычайно интенсивная деятельность была посвящена сближению народов и ликвидации опасности войны.

Когда он был у нас в последний раз, он произвел огромное впечатление своей энергией, своей непосредственностью, страстностью, доброжелательством. Я и сейчас вижу, как он, сутулясь, выходит из Физического института на широкие каменные, освещенные солнцем ступени, высокий, в легком коротком пальто и в шляпе, с сосредоточенным лицом потрудившегося старого моряка или рыбака. Я думаю, его хорошо сыграл бы таким Жан Габен. И разве только то, как он чрезмерно старательно ставил ногу на следующую ступеньку, показывало, что 76 лет, из которых двадцать отданы созданию квантовой механики, а десять—борьбе с гитлеризмом,—не проходят даром.

Умер Бор неожиданно, проведя месяц в Италии и хорошо, казалось бы, отдохнув.

Бывают ученые, и великие ученые, которые видят свое назначение в том, чтобы завершить теорию, создать вершину науки и на этом успокоиться, в уверенности, что все сделано. Бор прекрасно понимал, что за тем, что он сделал, последует новый этап. В этом отношении в высшей степени характерен для него эпизод, случившийся за несколько лет до его смерти в Америке, на одной научной конференции. Гейзенберг предложил новую, смелую теорию. Выступая в дискуссии, Бор сказал свою знаменитую фразу: «Это, конечно, сумасшедшая теория. Однако, она мне кажется недостаточно сумасшедшей, чтобы быть правильной новой теорией».

Вот такой жизнью и деятельностью, этим своим духом неуспокоенности он и заслужил славу, ту «славу мира», которая *не* проходит.

БОРОВСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ И ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

В. ГЕЙЗЕНБЕРГ

Мюнхен

Некоторые соображения, возникшие у Бора при анализе представлений квантовой теории, могут быть распространены в несколько измененном виде и на новые черты физики элементарных частиц. Далее будут изложены подробнее, чем это принято в физике элементарных частиц, возможности пространственно-временной локализации измерения положения и времени и необходимые при этом определенные ограничения.

Квантовая механика исходит из допущения, что координата может быть в принципе измерена с любой точностью, если только согласиться с достаточно большой неопределенностью соответствующего импульса. Бор подчеркивал, что из приведенной взаимосвязанности между измерениями координаты и времени, с одной стороны, и определения импульса и энергии, с другой, уже вытекает далеко идущее ограничение применимости подобных классических понятий. Таким образом, термины классической физики, которые мы используем для описания физического факта, больше не соответствуют точно существу объекта. Часто приводимый пример относится к вопросу — через какую из двух диафрагм «действительно» прошел электрон, и производит впечатление, что в данном вопросе недопустимо использовать понятие о координате.

В физике элементарных частиц эта ситуация еще более обостряется тем, что ни о каком достаточно точном определении координаты вообще речи быть не может. Больше того, уже теперь, исходя из экспериментов с бомбардировками частицами с наибольшей энергией, можно указать нижний предел неизбежной неточности для всех измерений координаты. Как пример можно упомянуть измерение координаты при помощи микроскопа с использованием излучения π-мезонов с очень большими энергиями. Речь идет о точности определения координат в направлении, перпендикулярном оси микроскопа. Практически применимая апертура подобного микроскопа ограничивается тем, что при упругом рассеянии, вызываемом диффракцией, сильные поперечные импульсы передаются редко. Частота передачи поперечного импульса Δp при рассеянии пионов протонами убывает, по экспериментальным данным, примерно по закону $e^{-\Delta p^2/\Delta p_0^2}$, где $\Delta p_0 \approx 3m_\pi C \approx 400\ M_e v/c$. Это значение Δp_0, по-видимому, не возрастает и при очень больших значениях первичной энергии пионов. Иными словами, неточность определения координат, соответствующая соотношению неопределенностей, не может быть больше уменьшена путем любого увеличения значения первичных энергий.

Судя по имеющимся экспериментальным данным, и при рассеянии протонов протонами с большими энергиями происходит в основном примерно то же самое. Большие значения Δp_0, не наблюдались; напротив, по мере возрастания энергии первичных протонов Δp_0 даже медленно (по экспоненте) убывает, как это и ожидалось по теоретическим представлениям. Если предположить, что при рассеянии каких-либо частиц с большими энергиями картина в основном повторяется, а приведенные до сих пор эксперименты, охватывающие космические излучения с энергиями до 10^8 *Бэв*, позволяют применять это предположение, то оказывается, что координата никогда не может быть определена с точностью большей, чем $\Delta q \sim \sim 0{,}5 \cdot 10^{-13} a_n$.

Этот результат не изменится существенно, если вместо определения координат при помощи микроскопа применить иной метод локализации. Поскольку в конечном итоге все способы определения координат основываются на взаимодействии, то вследствие соотношения неопределенностей могут приниматься в расчет лишь взаимодействия с элементарными частицами, имеющими очень большую энергию. В этом случае мерой достижимой точности определения положения является распределение поперечных импульсов при анизотропном рассеянии.

К изложенному следует сделать оговорку. При некоторых измерениях, особенно при рассеянии пионов протонами, создается впечатление, что наряду с описанным анизотропным рассеянием имеется будто бы также и более изотропное упругое рассеяние с очень малым эффективным поперечным сечением. При этом рассеянии могут передаваться и большие поперечные импульсы до нескольких тысяч *Бэв*. Пока еще неясно, действительно ли в этом случае наблюдается настоящее упругое рассеяние. Особенно следует учитывать возможность того (по аналогии с известными рассуждениями Бора о рассеянии у атомных ядер), что здесь создается попутно возбужденное промежуточное состояние с малой продолжительностью жизни, распад которого может вести к процессам, соответствующим упругому рассеянию. Во всяком случае, едва ли можно утверждать, что эти редкие процессы можно использовать для уменьшения неточности измерения координат.

Упомянутая аналогия между рассеянием элементарных частиц и рассеянием у атомного ядра часто используется для объяснения нормального диффракционного рассеяния элементарных частиц. При этом сама элементарная частица предстает в виде протяженного образования, форма и распределение плотности которого измеряются при помощи опытов с рассеянием. При таком объяснении вместо точной координаты возникает представление об облаке материи, диаметр которого имеет порядок 10^{-13} *см* и плотность которого убывает от центра к периферии примерно по кривой Гаусса. Рассеяние электронов нуклонами часто интерпретируется, как данные о структуре нуклонов.

Однако против такого наглядного представления следует возразить, потому что термин координата используется здесь значительно шире, чем это допускает область его законного применения. Определение плотности материи $\rho(w)$ имеет смысл только в том случае, когда координата w может быть определена с настолько большой точностью, что остаточная неопределенность мала по сравнению с областями, в которых $\rho(w)$ изменяется в заметных пределах. Применительно к элементарным частицам об этом, безусловно, не может быть и речи. Поэтому, хотя определенные экспериментальным путем характеристики формы и являются наглядным средством выражения результатов эксперимента, но найденные таким способом представления ложно показывают применимость понятия «координáта», чего в действительности нет. Единственной физической реальностью является само анизотропное рассеяние, а не вызывающая его плотность материи, принадлежащая одиночной элементарной частице.

В математической интерпретации это положение вещей выражается очень отчетливо тем, что физические процессы передаются точно в первую очередь лишь унитарной S-матрицей, описывающей асимптотическое поведение. Сомнительно существование сверх того локальных операторов поля, которые интерполируются между асимптотическими волнами и пригодны, например, для изображения пространственного распределения плотности. Возможно, что такая интерполяция математики законна, но она неоднозначна. Может быть также, что хотя локальные операторы поля и могут быть однозначно определены, но соответствующее гильбертово пространство имеет неопределимую метрику так, что вероятностная интерпретация определимой пространственной структуры в духе старой квантовой теории вообще оказывается неосуществимой. Таким образом, и математическое описание показывает, что наглядное изображение элементарной частицы в виде облака материи с определимым распределением плотности основано на иллюзии о применимости понятия «координата».

Это особенно выявляется, если облаку материи приписывают еще и коэффициент поглощения или если его обозначают как «черное» или «серое». Таким образом, может быть наиболее рационально выражен эмпирический факт наличия сильного взаимодействия, ведущего, как правило, к образованию новых элементарных частиц. В этом отношении аналогия с представлениями Бора о процессах столкновения с атомными ядрами действительно становится очень близкой. Подобно тому, как Бор принимал, что при внедрении в атомное ядро сталкивающейся с ним частицы происходит торможение, рассеяние энергии (т. е. распределение ее по многим степеням свободы, что, в конце концов, может выразиться в испарении нагретого атомного ядра), при столкновении двух элементарных частиц, обладающих большой энергией, энергия, как правило, распределяется по многим степеням свободы, образуется сильно разогретое облако материи, распадающееся, наконец, на множество элементарных частиц.

БОР И ЭЙНШТЕЙН

Б. Г. КУЗНЕЦОВ

Москва

О математическом и логическом «безумии» современной физики

Нильсу Бору принадлежит замечание, характеризующее науку нашего столетия точнее и глубже, чем специальные историко-научные трактаты. Это замечание было сделано в связи с единой спинорной теорией Гейзенберга. «Концепция Гейзенберга,— говорил Бор,— несомненно, безумная концепция. Но достаточно ли она безумна, чтобы быть правильной?...»

Приведенная фраза проникает в самое существо современной ситуации в теории поля и вместе с тем в существо науки XX в., когда парадоксальность стала существенным критерием достоверности. Очень парадоксальное и вместе с тем чрезвычайно убедительное и точное замечание Бора и само служит характерным примером этой парадоксальной достоверности — оно не могло быть сделано ни в одну из прошлых эпох.

В конце XIX в. многие физики говорили, что картина мира в основном завершена, остается уточнение деталей, которым и займутся грядущие поколения ученых. Пафос научного познания состоял тогда у большинства в объяснении нового явления или нового ряда явлений с неизменных позиций, в свете неизменных фундаментальных принципов. Такое объяснение доставляло глубокое удовлетворение ученому.

Не следует преувеличивать и абсолютизировать эту характерную для XIX в. глубоко викторианскую черту.

Прошлое столетие далеко ушло от XVIII, а ведь даже в последнем критика подчас направлялась на общие устои науки. В XIX в. уже знали, что закономерности сложных форм движения (например, статистические закономерности термодинамики) не сводятся к законам ньютоновой механики. Но никто из физиков XIX в. не сомневался в точности ньютоновых законов, и только в начале нашего столетия их начали рассматривать как приближенное представление о движении тел. В XX в. речь шла не только и даже не столько о новых кинематических схемах. Такие новые схемы, выглядевшие на первых порах крайне парадоксальными, появлялись уже в древности. Трудно полностью оценить революционный характер античной идеи изотропности пространства — представления об антиподах, не падающих с «нижней» поверхности Земли. Такой же парадоксальной казалась гелиоцентрическая система. Но в XX в. «безумие» состояло в другом. Напомним, что предшествующее столетие пришло к мысли о непротиворечивости парадоксальных геометрий, в которых сумма углов треугольника может быть больше или меньше двух прямых углов, где два перпендикуляра к прямой сходятся в одной точке или, наоборот, расходятся все дальше один от другого. Появилась даже мысль о реальных эквивалентах неэвклидовых геометрий, но эта мысль не вызвала существенного эффекта в физике, она лишь помогла новым идеям развиваться в самой геометрии, подобно виртуальным квантам, излучаемым частицей и ею же поглощаемым.

XX столетие начало с того, что превратило в экспериментально проверенные, непреложные и однозначные физические теории самые парадоксальные представления сначала многомерной, а затем неэвклидовой геометрии. Это была совершенно новая мысль о достоверности геометрического парадокса. Речь шла о реальной, физической, независимой от деятельности познающего духа, объективной достоверности, поэтому указанная мысль была несовместима с какой бы то ни было формой априоризма или конвенционализма. Речь шла о парадоксальной достоверности не только явлений, но и общей схемы бытия — объективного ratio мира, и такая мысль была несовместима с каким бы то ни было «чистым описанием».

Идея физической достоверности *математического* «безумия» связана с именем Эйнштейна. Идея физической достоверности *логического* «безумия» связана с именем Бора.

Именно логическая парадоксальность свойственна боровскому принципу дополнительности. Он не противоречит ни одному из математических постулатов. Частица проходит через последовательные пространственные точки с той или иной скоростью. Можно ли утверждать, что частица прошла через данную точку? Нет, в общем случае, когда в той или иной мере определена скорость частицы, уже нельзя точно определять ее местонахождение в данный момент. В этом сказывается волновая природа частицы. Мы не можем сказать, что частица находится в данной точке в данный момент и не можем сказать, что частица не находится в ней. Все это противоречит логическому постулату исключенного третьего.

Можно довольно далеко провести аналогию между отношением принципа дополнительности к логике и отношением принципа относительности к геометрии. В XIX в. уже существовали попытки построения так называемой поливалентной логики, отказывающейся от постулата исключенного третьего и вводящей, наряду с оценками «истинно» и «ложно», третью оценку высказываний (например, «неопределенно»). Этим схемам иногда придавали онтологический смысл, но изучаемые логикой тривалентные физические образы, как в XIX в. физические образы неэвклидовой геометрии, напоминают виртуальные фотоны, поглощаемые излучившей их частицей,— их эффект сказался только в самой логике. Критика классической логики давно расшатала уверенность в абсолютном характере принципа исключенного третьего, но отсюда было еще далеко до однозначной *физической* теории.

Начиная со второй четверти нашего столетия положение изменилось. Концепции Бора и других основателей квантовой механики связали неопределенность и дополнительность сопряженных динамических переменных движущейся частицы с экспериментально проверенными, достоверными физическими выводами. Абсолютная реальность, абсолютная достоверность, несомненная физическая содержательность логического парадокса также характерна для квантовой механики, как для теории относительности характерна достоверность и физическая содержательность парадоксальных геометрических соотношений. Парадоксальность самого бытия, парадоксальный характер упорядочивающего Вселенную объективного ratio — вот что поразило широкий круг людей, ознакомившихся с идеями Эйнштейна и Бора, а иногда лишь интуитивно угадавших скрывавшийся в них переворот в характере научного мышления.

Как известно, в теории функции, кроме числовых значений функции, зависящих от значений аргумента, фигурируют операторы, превращающие уже не одно значение функции в другое, а один *вид* функции в другой вид. Крупные физические открытия всегда в какой-то мере играли аналогичную роль. Они не только увеличивали число известных людям закономерностей природы, но изменяли также методы науки, стиль научного мышления, характер пути, ведущего от частных наблюдений к общим законам. В обобщениях Эйнштейна и Бора «операторный» эффект гораздо сильнее, чем в теориях прошлого. В руках Эйнштейна и Бора физика изменила не только содержание результатов научной мысли. Она радикально изменила логическую структуру и математический аппарат. Более того, изменилось, стало принципиально иным отношение физики к логике и математике. Физика неизбежно должна включать в свои рамки геометрические аксиомы и логические принципы в качестве физических констатаций. Вместе с тем она может представить соотношения и связи физических объектов в масштабах Вселенной в целом и становится, таким образом, общей концепцией мироздания. Наряду с беспрецедентным проникновением собственно физических понятий и методов во все области науки, преобразующее воздействие физики XX столетия на науку и культуру определяется новыми математическими и логическими принципами, которые получили в физике онтологический смысл.

Поэтому имя Эйнштейна будет всегда символом не только гигантского приращения сведений о Вселенной, но и гигантского преобразования вида функции, связывающей результаты научных обобщений с их исходными данными. Речь идет о преобразовании и наделении физическим содержанием математических понятий. Имя Бора также будет символом преобразования вида функции, связывающей выводы науки с наблюдениями, но здесь уже речь идет о преобразовании логики научных умозаключений.

По-видимому, выяснение отношения между указанными «операторами», преобразовавшими научную мысль XX столетия, должно опираться на анализ отношений между количественно-математическими понятиями, вырастающими из измерения физических величин, и собственно логическими понятиями. С этой точки зрения мы и взглянем на некоторые исходные идеи Эйнштейна и Бора на конфликт между указанными идеями и на их последующий синтез.

Эйнштейн

Теория относительности Эйнштейна была результатом систематического построения такой универсальной концепции пространства и времени, из которого естественно, без каких-либо сделанных ad hoc допущений выводится отсутствие эфирного ветра. Слово «систематическое» имеет здесь следующий смысл. Представление Лоренца об абсолютном продольном сокращении движущихся тел по сравнению с «истинными» размерами тел, покоящихся в эфире, было феноменологическим объяснением результатов опыта Майкельсона. Напротив, теория Эйнштейна вывела постоянство скорости света из наиболее общих допущений. Такое *систематическое* выведение аксиоматизирует результаты эксперимента, связывает их с общими принципами. В этом отношении метод теории относительности «... аналогичен методу термодинамики, последняя является не чем иным, как систематическим ответом на вопрос, какими должны быть законы природы, чтобы вечный двигатель оказался невозможным» [1].

Исходный факт — постоянство скорости света — казался «чудом», т. е. чем-то парадоксальным, «безумным». Но, как писал Эйнштейн, «целью всякой мыслительной деятельности служит превращение „чуда“ в нечто пости-

[1] A. Einstein. Lettres à Maurice Solovine. Paris, 1956, p. 18–19.

жимое»[1]. Результат опыта Майкельсона потерял свой парадоксальный характер в рамках парадоксальной теории. При этом *кинематический* парадокс — физический объект движется с одной и той же скоростью по отношению к смещающимся одна относительно другой системам — теряет свою парадоксальность, становясь естественным выводом из парадоксальной *метрической* констатации: трехмерные, чисто пространственные расстояния и временные интервалы меняются при координатных преобразованиях, а инвариантами преобразований оказываются четырехмерные интервалы.

Общая теория относительности была дальнейшим обобщением и «парадоксализацией» геометрии: метрические свойства пространства-времени отступают от эвклидовых соотношений, гравитационные поля вводят в картину мира переменную метрику и соответственно *переменную геометрическую аксиоматику*.

Тот факт, что исходные понятия теории относительности связаны с метрикой и измерением, не может казаться неожиданным. Само понятие относительности не отделимо от метрических соотношений, от мероопределения, от измеримых физических величин, которые являются инвариантами тех или иных групп пребразований. В зависимости от того, какие именно физические величины служат инвариантами преобразований и какова геометрическая размерность и структура соответствующих однородных многообразий, мы отличаем один от другого классический принцип относительности (инвариант — трехмерное расстояние), специальный принцип относительности (инвариант — четырехмерный интервал с эвклидовой метрикой), общий принцип относительности (инвариант — интервал в четырехмерном римановом пространстве). Но во всех случаях понятие относительности имеет смысл, если речь идет об инвариантных функциях координат того или иного по размерности и кривизне пространства. В пространстве, состоящем из дискретных точек, т. е. в нульмерном пространстве метрика становится абсолютной, она определяется не измерением, а счетом.

---

[1] A. Einstein. Conceptions scientifiques, morales et sociales. Paris, 1952, p. 209.

Абсолютной будет метрика и в дискретном пространстве ненулевой размерности [1]. Напротив, во всех случаях, когда между двумя точками пространства находится бесчисленное множество промежуточных точек, число точек уже не может служить мерой расстояния между точками, и такой мерой служит функция координат точек, вид которой характеризует метрику данного пространства. Именно в этой особенности бесконечных множеств таится источник исторической и логической связи между понятиями бесконечности и относительности [2].

Когда перед нами мировая линия частицы, то бесконечное множество мировых точек в каждом четырехмерном интервале имеет физический смысл, если в каждой пространственной точке в соответствующий, определенный видом мировой линии момент времени с полной достоверностью может быть обнаружена частица. Поэтому относительность не только не колеблет бивалентной логики с оценками «истинно» и «ложно», основанной на принципе исключенного третьего, но, наоборот, предполагает бивалентную оценку суждений о принадлежности частице определенных координат. Но число таких суждений бесконечно. Предикаты, приписываемые субъекту, образуют бесконечное множество, *непрерывное предикатное многообразие*.

Истинная траектория частицы соответствует бесконечному множеству ответов «да» на вопрос о пребывании частицы в каждой точке траектории. Иной траектории, полученной при вариации истинной, соответствует бесконечное множество ответов «нет». Если мы не можем определить, проходит ли частица через некоторую точку, у нас остается выход: вопрос о пребывании точки заменяется вопросом об определенной *вероятности* пребывания. О подобном переходе от оценки «неопределенно» к оценке «определенная вероятность» речь пойдет немного позже. Во всяком случае, метрические соотношения требуют

---

[1] Б. Риман. О гипотезах, лежащих в основании геометрии. Сб. «Об основаниях геометрии». М., Физматгиз, 1956, стр. 323—324.

[2] Б. Г. Кузнецов. Бесконечность и относительность. Сб. «Эйнштейн и развитие физико-математической мысли». М., Изд-во АН СССР, 1962, стр. 137—200.

непрерывного многообразия предикатов, достоверно приписываемых тождественной себе частице.

Чтобы отличить логическую структуру принципа относительности Эйнштейна от логической структуры классической механики, нужно заметить, что в последней частица могла быть тождественной самой себе, когда ее движение характеризовалось бесконечным многообразием *различных* пространственных предикатов, время пребывания частицы в различных точках могло быть одним и тем же; классическая механика допускала бесконечную скорость движения. В теории относительности частица может быть тождественна сама себе, если каждому непрерывному многообразию ее пространственных координат соответствует невырожденное непрерывное многообразие моментов времени. Логика теории относительности Эйнштейна оперирует *четырехмерным бесконечно-бивалентным предикатным многообразием.* Ее бивалентный характер позволяет увидеть с некоторой дополнительной стороны корни конфликта между идеями Эйнштейна и идеями Бора. Чтобы увидеть с этой же стороны корни синтеза указанных идей, нам придется впоследствии несколько уточнить и ограничить характеристику релятивистской логики как бивалентной.

Перейдем от точки относительности к некоторым связанным с ней сторонам мировоззрения Эйнштейна. Речь идет о его взглядах на математику и логику. В ряде речей и статей [1] Эйнштейн говорил, что геометрия приобрела некоторый онтологический смысл и может переходить в зависимости от физических условий от одной системы исходных понятий к другой системе. Но она остается логической наукой, так как выводит следствия из постулатов строго логически. При этом Эйнштейн не сомневался в неизменности логических правил, с помощью которых геометрия переходит от одной теоремы к другой. Меняются исходные геометрические утверждения (о размерности и кривизне данного пространства) и соответственно

[1] Геометрия и опыт. Пг., 1923; On the Method of Theoretical Physics (Ideas and Opinions. N.-Y., 1960, p. 270—276). Неэвклидова геометрия и физика. Сб. «Эйнштейн и развитие физико-математической мысли». М., Изд-во АН СССР, 1962, стр. 5—9 и др.

меняются выводы. Но логические правила сохраняются. Логика не подвергается «физикализации», которую претерпела геометрия.

Бор

Для Бора, как и для Эйнштейна, характерно *систематическое* построение физической теории, т. е. выведение ее из возможно более общих допущений. Парадоксальные, с точки зрения классической электродинамики, факты устойчивости атомов и дискретности спектров были первоначально объяснены двумя постулатами: двигаясь по «разрешенной» орбите, электрон не излучает; излучение обязано переходу электрона на другую орбиту. Эти постулаты сняли печать парадоксальности с наблюдаемой устойчивости атомов и дискретности спектров; печать парадоксальности перешла на боровские постулаты. Но это было только начало «бегства от чуда» в атомной физике. Парадоксальные постулаты Бора вскоре стали естественным следствием квантовой механики.

Во второй половине 20-х годов устои классической физики были расшатаны и попытка феноменологической трактовки неопределенности уже не могла иметь успеха. Были попытки «спасти» классические устои, ограничив неопределенность сопряженных переменных феноменологическими рамками. Речь идет об идее «скрытых параметров»[1]: мы не можем точно определить значения координат и составляющих импульса, времени и энергии, потому что нам неизвестны дополнительные параметры, определяющие достоверным образом указанные физические величины. Можно увидеть некоторую аналогию между идеей скрытых параметров и лоренцовой концепцией абсолютного сокращения. Лоренцова концепция ограничивала феноменологическими рамками постоянство скорости света в различных инерциальных системах: свет в эксперименте Майкельсона меняет скорость, но мы не

---

[1] J. V. Neumann. Mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin, 1932, S. 108—109; В. Гейзенберг. Философские проблемы атомной физики, М., 1953, стр. 34—46.

можем зарегистрировать изменение, поскольку оно компенсируется сокращением продольного плеча интерферометра и вообще продольным сокращением масштабов по сравнению с абсолютными масштабами. Аналогичным образом существуют точные значения координат и составляющих импульсов, но они по тем или иным причинам не могут быть обнаружены.

Объективный характер парадоксальных утверждений квантовой механики пытались обойти и иными путями. Некоторые физики склонялись к более или менее последовательному отрицанию объективного субстрата наблюдаемых и измеряемых процессов. Сейчас вряд ли возможен сколько-нибудь серьезный рецидив критики квантовой механики с классических позиций, как и рецидив ее операционалистской трактовки. Принцип дополнительности представляется объективной констатацией и подобно теории относительности указывает на объективную парадоксальность бытия. Только в теории относительности физически содержательной стала парадоксальная, многомерная и затем неэвклидова геометрия, а в квантовой механике — парадоксальная логика.

Квантовая логика обычно представлялась тривалентной, отказывающейся от принципа исключенного третьего и вводящей, наряду с оценками «истинно» и «ложно», третью оценку «неопределенно». Об этом уже говорилось. Тривалентная логика квантовой механики разрабатывалась с 30-х годов в ряде специальных исследований [1]. Здесь хочется подчеркнуть только одно обстоятельство. По существу, принципам дополнительности и неопределенности соответствуют отнюдь не чисто неопределенные оценки. Из последних нельзя получить метрические соотношения. Эти соотношения появятся при переходе от отдельных предикатов к бесконечным предикатным много-

---

[1] Birkhoff and J. V. Neumann. Ann. Math., 37, 1936, p. 823; P. Février., Comptes Rendus, 204, 1937, p. 481; A. Destouches. Essai sur l'unite de la physique théoriques, t. I—III. Paris, 1943; H. Reichenbach. Philosophical Foundations of Quantum Mechanics. Los-Angelos, 1949; V. Weizseker. Naturwiss., 20, 1955, S. 42. Б. Г. Кузнецов. Основы квантово-релятивистской логики. Сб. «Логические исследования». М., Изд-во АН СССР, 1959, стр. 99—112.

образиям, к множествам предикатов, бесконечно мало отличающихся один от другого. Такие предикатные многообразия приобретают физическую содержательность в учении о движении частиц, если движение описывается дифференциальными уравнениями, позволяющими определить состояние движения частицы в каждой точке при заданных начальных условиях. Иначе говоря, в каждой точке должна в принципе существовать возможность определения непрерывно меняющихся физических величин.

Если такое определение принципиально недостижимо, мы не получаем бесконечного предикатного многообразия. Принцип неопределенности указывает условия и пределы возможности приписывать частице те или иные значения координат и импульса, времени и энергии. Логически это значит, что принцип неопределенности позволяет перейти от неопределенной оценки суждений к бивалентной оценке и для одной переменной за счет неопределенности другой получить оценку суждения «частица обладает данным значением динамической переменной», сколь угодно близкую к «истинно» и «ложно». Поэтому принципам неопределенности и дополнительности соответствует логика переменной валентности, логика перехода от неопределенных оценок к бивалентным. Логика переменной валентности также присуща квантовой механике, как геометрия переменной кривизны—теории относительности.

Все дело в том, что принципы неопределенности и дополнительности имеют не только негативный смысл (невозможно в одном акте взаимодействия квантового объекта с классическим получить точные значения сопряженных классических переменных), но и *позитивно-классический смысл*: при некоторых условиях и с некоторой точностью классические переменные могут характеризовать поведение квантовых объектов.

Из принципа неопределенности следует, что для каждой переменной возможна в принципе бивалентная оценка суждения о ее принадлежности движущейся частице. Это возможно ценой неопределенной оценки суждения о принадлежности частице другой переменной. Таким образом, мировая линия частицы определена в каждой мировой точке, и в каждой точке в свою очередь может быть определена другая, сопряженная переменная. Речь идет о положении частицы и об ее импульсе и соответственно о времени и энергии. Но квантовая механика позволяет приписать движущимся частицам и другие предикаты — амплитуду колебаний, частоту и связанные с ними классические волновые величины. Такое применение выходит за рамки классической физики, но, вместе с тем, оно расширяет применение классических понятий. Только им соответствует теперь вероятность тех или иных классических предметов частицы: бивалентная оценка относится к тривалентным суждениям [1]. Основная задача квантовой ме-

---

[1] Логическая схема такого перехода от тривалентных оценок к бивалентным очень проста, особенно, если применить некоторые элементарные логические символы. Обозначим через x_i предикат частицы, например, ее положение в пространстве. Тем же символом обозначим высказывание «частица обладает предикатом x_i». Оценка этого суждения как истинного записывается: $x_i = R$, оценка «ложно» $x_i = F$, оценка «неопределенно» $x_i = W$. Кроме того, мы будем применять обычный в математической логике символ $\wedge$, обозначающий конъюнкцию — логическую фигуру, близкую по смыслу к союзу «и». Введем еще одну необходимую логическую операцию — оценку самой оценки. Если суждение x_i (например, частица обладает определенным положением) истинно, то еще неясно, истинно ли само это суждение: x_i — «истинно». В классической логике это кажется очевидным: если суждение «снег — белый» истинно, то и суждение «суждение: „снег белый"—истинно» также истинно; если первое ложно, то и второе ложно. В тривалентной логике совпадение оценок не очевидно. Суждение «частица обладает положением x_i» может быть по своей оценке неопределенным, а суждение «суждение о принадлежности частице положения x_i — неопределенно» будет истинным. Суждение об оценке суждения x_i мы обозначим через $\dot{x}_i$. Тогда приведенное соотношение между оценками выражается формулой $\dot{x}_i \equiv (x_i = W) = R$. В свою очередь, суждение «суждение: частица обладает положением x_i — истинно» может иметь неопределенную оценку: $\dot{x}_i \equiv (x_i = R) = W$. Мы получаем *логический принцип дополнительности*: если $x_i = R$, то $\dot{x}_i = W$ и наоборот. Теперь нам придется вспомнить о непрерывных предикатных многообразиях. Что собственно означает вопрос: истинно ли или неопределенно суждение об истинности или неопределенности суждения «частица обладает пространственным положением x_i?» Этот вопрос имеет нетривиальный смысл, т. е. может привести к экспериментальной проверке, если речь идет о тождественной себе частице, которая последовательно занимает точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, образующие непрерывную траекторию. Сужде-

ханики состоит в возвращении к бивалентной логике. Именно поэтому построение квантовой механики не потребовало *явного* преобразования логического аппарата. Для каждой динамической переменной квантовая механика сохранила возможность бивалентных оценок суждений о принадлежности частице того или иного значения переменной. Тривалентная логика соответствовала негативному содержанию квантовой механики и поэтому она не требовала явного определения. Но с учетом *позитивного* смысла квантовой механики, квантовая логика — это логика переменной валентности. Именно в переменном характере валентности состоит неклассический характер логики, которая неявно применяется в квантовой механике. Не тривалентная логика, а логика переменной валентности, тривалентно-бивалентная логика придает квантовой механике ее парадоксальный характер. Квантовая механика исключает неопределенность динамической переменной увеличением неопределенности сопряженной динамической переменной и заменой неопределенных значений переменной однозначно вычисляемыми из волнового уравнения, определенными значениями вероятностей. Именно поэтому квантовая механика (нерелятивистская!) в ее позитивных расчетах, в выводах и в конкретных задачах может быть изложена в рамках классической логики и не требует специфического логического

ние x_i может быть истинным или ложным, если мы в принципе способны определить каждое x_i, каждое положение частицы. Тогда мы можем говорить о принадлежности частице предикатного многообразия $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и выразить это конъюнкцией $x_1 = R \wedge x_2 = R \wedge \ldots \ldots \wedge x_n = R$. Физически это означает существование непрерывной траектории L, а в четырехмерном представлении мировой линии L' тождественной себе частицы. Суждение $\dot{x}_i$ об истинности или неопределенности суждения x_i означает, что через точку x_i проходит мировая линия тождественной себе частицы. Но если мы определяем бивалентным образом x_i, мы должны ограничиться тривалентным определением скорости частицы, т. е. направления мировой линии в этой точке и наоборот. Для бивалентного определения x_i нужен классический объект, который зарегистрирует ее положение. Для определения $\dot{x}_i$ необходим другой классический объект. Отсюда следует дополнительность оценок $\dot{x}_i \equiv (x_i = R) = W$; $\dot{x}_i \equiv (x_i + W) = R$.

алгоритма. Поскольку позитивные результаты квантовой механики формулируются с помощью классических понятий, аппаратом физики остается классический анализ.

Что касается математического аппарата, то Бор сравнительно мало интересовался его «парадоксализацией». Методы матриц, операторов, собственных функций, гильбертово пространство и т.д. не меняли смысла исходных постулатов квантовой механики и в сущности не нужны для понимания *физической сущности* этих постулатов. Общую теорию относительности нельзя понять без метрических категорий, основы квантовой механики могут быть поняты при чисто логическом противопоставлении процессов измерения сопряженных переменных. Может быть именно поэтому в работах Бора по квантовой механике так мало сколько-нибудь сложных математических конструкций. Но дело не в этом. Противопоставляя в известной мере физико-геометрическую тенденцию Эйнштейна и физико-логическую тенденцию Бора, мы можем охарактеризовать с некоторой новой стороны важный для мировоззрения Бора *переход от понятия неопределенности к понятию дополнительности*.

Принцип дополнительности *непосредственно* не применяется в физике. Для квантово-механических расчетов достаточно принципа неопределенности в форме соотношений, написанных Гейзенбергом. Эти соотношения имеют метрический смысл, речь идет об измерении координат, импульсов, времени и энергии. Измерения относятся к непрерывным величинам: каждая отдельная переменная изменяется непрерывно, и мы можем зарегистрировать сколь угодно малое приращение каждой переменной ценой невозможности зарегистрировать сколь-угодно малое приращение сопряженной переменной. Дискретность свойственна произведению сопряженных величин — действию. Соотношение неопределенности указывает на условия, делающие возможным сколь угодно точное определение значений переменной, получение непрерывного многообразия таких значений и всех связанных с подобным многообразием метрических понятий.

Напротив, принцип дополнительности делает акцент на неметрической ситуации — существовании двух нетождественных систем взаимодействий квантового объекта, двух принципиально нетождественных классических объектов. Каждый из этих объектов в силу контролируемого взаимодействия позволяет сколь угодно точно определить одну из сопряженных переменных и в то же время своим неконтролируемым взаимодействием препятствует определению сопряженной переменной. Если можно провести некоторую границу между принципом неопределенности и принципом дополнительности, то по одну сторону останется измерение величин, а по другую — логическое противопоставление измеряющих схем. Принцип относительности при его аксиоматизации приближается к геометрическим схемам инвариантности по отношению к той или иной группе преобразований и к метрическим понятиям. Принцип неопределенности при своей аксиоматизации (а именно в этом значение боровской дополнительности) приближается к логическому противопоставлению. Таково в сущности и противопоставление квантового и классического объектов. Мы делим серию связанных друг с другом физических процессов на две части: одна из них рассматривается в микроскопическом аспекте (мы здесь учитываем влияние взаимодействий на значения переменных), в другой части мы отказываемся от такого учета. Здесь снова мы встречаем логическую дилемму: учитывать или не учитывать указанное влияние — значит применять не ту или иную систему метрических понятий, а ту или иную систему логических оценок. Одна из них допускает бивалентную оценку суждений об определенных предикатах, независимых от самой оценки. Другая не допускает такой возможности. Объект с предикатами, независимыми от оценок,— это классический объект. Тот предикат квантового объекта, который получает количественную оценку при взаимодействии с этим классическим объектом, может быть определен с неограниченной точностью. Другой предикат (сопряженная переменная) может быть определен с неограниченной точностью при взаимодействии с *другим* классическим объектом. Но различие между классическими объектами (между дираковскими «представлениями») — это логическое различие.

Итак, аксиоматизация неопределенности у Бора сохраняет единство и неизменность математических понятий и метрических соотношений при определении переменных, но не сохраняет единства логических норм. В этом смысле переход к принципу дополнительности в квантовой механике в известном смысле противоположен переходу к четырехмерному представлению в специальной и к неэвклидовым соотношениям в общей теории относительности.

Конфликт

Эйнштейн считал выдвинутую Бором модель атома гениальным взлетом физической интуиции. Модель Бора была построена на основе отрывочных и, как казалось тогда, разрозненных фактов.

«Это было так,— вспоминал впоследствии Эйнштейн,— точно из-под ног ушла земля, и нигде не было видно твердой почвы, на которой можно было бы строить. Мне всегда казалось чудом, что этой колеблющейся и полной противоречий основы оказалось достаточно, чтобы позволить Бору — человеку с гениальной интуицией и тонким чутьем — найти главнейшие законы спектральных линий и электронных оболочек атомов, включая их значение для химии. Это кажется мне чудом и теперь. Это — наивысшая музыкальность в области мысли»[1].

Слово «музыкальность» может многое объяснить. Из эпистемологических взглядов Эйнштейна вытекала его оценка роли интуиции в поисках научной теории, адекватной действительности. Критериями выбора такой теории Эйнштейн считал «внешнее оправдание», т. е. согласие между теорией и наблюдением, и «внутреннее совершенство» — максимальную естественность, отсутствие произвола, максимальное исключение объяснений, выдвинутых ad hoc, максимальную связь с наиболее общими исходными посылками.

Эйнштейн, как мы видели, не придавал логическим схемам онтологической ценности. Результаты логического анализа приобретают физический смысл при сопостав-

---

[1] А. Эйнштейн. Творческая автобиография. Успехи физических наук, 59, вып. 1, 1956, стр. 87.

лении с наблюдениями, но уже на исходных стадиях логического анализа интуиция подсказывает, какая система понятий найдет наиболее близкий путь к вычислению величин, допускающих эмпирическую проверку, к эксперименту и к количественно-математическому сопоставлению с наблюдениями и измерением.

Исходная физическая интуиция, как ее понимал Эйнштейн, близка к тому моменту музыкального творчества, о котором говорил наиболее любимый Эйнштейном и наиболее конгениальный ему по духу композитор — Моцарт. Он упоминал о моменте, «... когда в одно мгновенье слышишь всю, еще не написанную симфонию». Исходная интуиция Эйнштейна предвосхищала симфонию вычислений и экспериментов. Такой была и гениальная интуиция, оправдавшаяся впоследствии в целой симфонии спектральных наблюдений и расчетов атомной механики.

Но в конце 20-х годов выявилось и различие между характером физической интуиции Эйнштейна и «наивысшей музыкальностью в области мысли», как называл Эйнштейн интуицию Бора. Принцип дополнительности в этом отношении отличается от принципа относительности. Если вслед за Эйнштейном сравнивать характер физического мышления с музыкальным творчеством, то для Эйнштейна наиболее близким будет лейбницева формула — «музыка — наслаждение души, которая вычисляет, сама не зная того». Интуиция Эйнштейна была предвосхищением допускающих элементарную эмпирическую проверку вычислений, причем вычислений, которые в отличие от известных Лейбницу и классической науке в целом производятся по тем или иным правилам в зависимости от физических условий. Интуиция Бора (неявно уже при разработке модели атома и явно — в работах по квантовой механике) предвосхищала не только вычисления, но все конструкции разума, нарушающие (чего не знала не только классическая, но и релятивистская физика) старые логические правила физических умозаключений.

В 1927 г. начался растянувшийся почти на три десятилетия спор между Эйнштейном и Бором об основах квантовой механики. В конце 40-х годов позиции того и другого были очерчены в итоговых очерках, помещенных в сборнике статей о мировоззрении Эйнштейна [1]. Существует обширная литература, посвященная дискуссии Эйнштейна с Бором и другими представителями господствующего направления в квантовой механике. Мы ограничимся лишь несколькими замечаниями.

В 1938 г. Эйнштейн писал Соловину о сторонниках господствующего вероятностно-статистического понимания квантовой механики: «... они из нужды делают добродетель»[2]. Нужда состоит в существовании множества экспериментальных доказательств волновой природы частиц и корпускулярной природы волновых полей, т. е. противоречия, которое может быть решено квантово-механическими соотношениями. Квантовая механика подтверждается всей суммой подобных доказательств, и в этом смысле без нее нельзя обойтись. «Нужда» указывает на «внешнее оправдание» квантовой механики. Но следует ли отсюда «добродетель», можно ли удовлетвориться квантовой механикой с точки зрения «внутреннего совершенства» теории?

С этим связан вопрос о причинности. Если квантовая механика в той форме, какую она получила в 1925—1927 гг., не только соответствует фактам, но и обладает достаточным «внутренним совершенством», достаточной «добродетелью», то представление о статистических закономерностях микромира может претендовать на роль наиболее общего принципа, из которого, естественно, вытекают соотношения квантовой механики. Иначе говоря, «бог играет в кости». Это характерная для Эйнштейна форма тезиса «основные законы бытия — статистические законы». Такую мысль Эйнштейн приписывал своим оппонентам.

Сам он держался иной концепции —«бог не играет

---

[1] The Library of living philosophers. Albert Einstein. Philosopher-Scientist. Ed. by Paul Arthur Schilp., ed. 2. Tudor Publishing Company. N.-Y., 1951; N. Bohr. Discussion with Einsten on Epistemological Problems in Atomic Physics. p. 199—241. (русск. пер. в кн.: Н. Бор. Атомная физика и человеческое познание. М., ИЛ, 1961, стр. 51—93); A. Einstein. Remarks to the Essays Appearing in this Collective Volume, p. 663—688, (русск. пер. в кн.: «Философские вопросы современной физики». М., Изд-во АН СССР, 1959, стр. 223—248).

[2] A. Einstein. Lettres á Maurice Solovine. Paris, 1956, p. 71.

в кости». Эти слова содержатся в письме Эйнштейна Максу Борну 7 ноября 1947 г.

«Ты веришь в играющего в кости бога, а я — в полную закономерность в мире объективного сущего, что я пытаюсь уловить сугубо спекулятивным образом. Я надеюсь, что кто-нибудь найдет более реалистический путь и соответственно более осязаемый фундамент для подобного воззрения, нежели это удалось сделать мне. Большие первоначальные успехи теории квантов могли меня заставить поверить в лежащую в основе игру в кости»[1].

Эйнштейн видел, что его позиция не имеет «осязаемого фундамента». Она не обладала «внешним оправданием». Тем не менее Эйнштейн продолжал искать решения проблемы на путях единой теории поля. Именно этой задаче и были посвящены чрезвычайно напряженные усилия гениального мозга в течение почти 30-и лет.

Здесь важно подчеркнуть следующее. Эйнштейн разрабатывал проблему единой теории поля не в корпускулярно-квантовом разрезе, т. е. как теорию перехода частиц одного типа в частицы другого типа, образования различных значений масс и т. д. Он разрабатывал единую теорию в континуально-геометрическом разрезе, как учение о свойствах пространственно-временного континуума, причем — о метрических его свойствах. Иными словами, Эйнштейн анализировал изменение геометрических свойств континуума, переход от одной метрики к другой, от одной аксиоматизированной системы метрических понятий к другой системе, он создавал все новые геометрические парадоксальные конструкции и не покушался на общую логическую базу всех этих конструкций.

Теперь нам известно, что такой путь не мог привести к единой теории поля. Нам теперь известно также, что вопрос о единой теории лежал все же в основном фарватере физики. Об этом будет сказано дальше. Отметим только, что континуально-геометрическая трактовка пространства-времени привела к теории относительности, но не могла вывести относительность из более общих допущений. В статье «Замечания к эйнштейновскому наброску

---

[1] М. Борн. Альберт Эйнштейн и световые кванты. Успехи физических наук, 59, вып. 1, 1956, стр. 130—131.

единой теории поля» Гейзенберг говорил, что поведение масштабов и часов принимается в теории относительности как данное и не выводится из каких-либо более общих допущений. Между тем масштабы и часы «... построены, вообще говоря, из многих элементарных частиц, на них сложным образом воздействуют различные силовые поля, и поэтому непонятно, почему именно их поведение должно описываться особенно простым законом»[1].

Эйнштейн видел необходимость выведения релятивистских пространственно-временных соотношений из более общих характеристик, учитывающих дискретность вещества. В итоговой характеристике теории относительности (в автобиографическом наброске 1949 г.) мы встречаем следующие строки: «Сделаем теперь критическое замечание о теории в том виде, как она охарактеризована выше. Можно заметить, что теория вводит (помимо четырехмерного пространства) два рода физических предметов, а именно: 1) масштабы и часы, 2) все остальное, например электромагнитное поле, материальную точку и т. д. Это в известном смысле нелогично: собственно говоря, теорию масштабов и часов следовало бы выводить из решений основных уравнений (учитывая, что эти предметы имеют атомную структуру и движутся), а не считать ее независимой от них» [2]. Это крайне важное замечание. Величие мыслителя видно не только в содержании его теории, но и в понимании границ этой теории, границ, которые вместе с замкнутостью теории указывают на ее выходы в более общую теорию.

Попытки построения единой теории поля не могли вывести теорию относительности из более общих постулатов, и не могли обнаружить нестатистические закономерности бытия, которые оказались бы более общими, чем статистико-вероятностные закономерности квантовой механики. Но в результате критики Эйнштейна квантовая механика все же эволюционизировала. В 1961 г. в Москве, в Институте физических проблем Бор говорил: «Ответы на многие вопросы, в свое время вызывавшие ожесто-

---

[1] Сб. «Эйнштейн и развитие физико-математической мысли». М., Изд-во АН СССР, 1962, стр. 65.

[2] Успехи физических наук, 59, вып. 1, 1956, стр. 93.

ченные дискуссии, в наши дни известны каждому начинающему. А мне хочется сегодня, когда Эйнштейна уже нет с нами, сказать, как много сделал для квантовой физики этот человек с его вечным, неукротимым стремлением к совершенству, к архитектурной стройности, к классической законченности теорий, к единой системе, на основе которой можно было бы развивать всю физическую картину. В каждом новом шаге физики, который, казалось бы, однозначно следовал из предыдущего, он отыскивал противоречия, и противоречия эти становились импульсом, толкавшим физику вперед. На каждом новом этапе Эйнштейн бросал вызов науке, и не будь этих вызовов, развитие квантовой физики надолго бы затянулось»[1].

Бор говорит о «неукротимом стремлении к совершенству». Это и есть то «внутреннее совершенство», которое выдвигал Эйнштейн в качестве критерия выбора физической теории. Поиски «единой системы, на основе которой можно было бы развивать всю физическую картину», не могли поколебать квантовую механику. Бор находил все новые и новые контраргументы, парировал критические замечания Эйнштейна, разъяснял все глубже и точнее смысл принципов неопределенности и дополнительности и показывал, что в пределах своей применимости квантовая механика дает полное описание поведения физических объектов. Что же касается пределов применимости квантовой механики, то они были обнаружены позже, когда наметились контуры концепции, еще более радикально отступающей от классической картины мира. Эта концепция покушается на: 1) сколь угодно точное определение отдельной динамической переменной за счет неопределенности сопряженной переменной, 2) образ «классического объекта» с заведомо точными динамическими переменными. Указанная концепция покушается и на релятивистские соотношения. Слово «покушается» в данном случае не имеет агрессивного смысла. Еще Герц говорил, что, оставаясь в пределах данной картины мира, мы не можем дать ей рациональное объяснение — нельзя от Понтия отсылать к Пилату. Релятивистская концепция не может дать обоснования исходных постулатов относительности.

[1] Наука и жизнь, 1961, № 8, стр. 73.

Квантовая механика не может дать обоснования своих исходных постулатов. Может быть, их даст более общая теория, которую назовут квантово-релятивистской не только потому, что она присоединяет релятивистские критерии к квантовым, а потому, что из нее вытекают те и другие. Из сказанного ранее следует, что подобная теория должна выводить из некоторого общего принципа и переменную по валентности логику (принцип дополнительности), и переменную по аксиоматике геометрию (относительность) из некоторого общего принципа.

Чтобы закончить беглые замечания о споре между Эйнштейном и Бором и перейти к проблеме синтеза их идей, нужно еще остановиться на истоках той удивительной лояльности, с которой велся спор. Речь идет даже не о лояльности, а о чем-то большем: Эйнштейн и Бор остро переживали угрозу их исходным идеям, таившуюся в аргументах противника, и радовались каждому найденному контраргументу. В отношении Бора все это ярко описано в статье Е. Л. Фейнберга [1]. Аналогичные реплики Эйнштейна сохранились в его переписке с Бором, Борном и др. Но и Эйнштейн, и Бор видели друг у друга не только угрожающие их позициям аргументы, но и импульсы для развития и уточнения своих позиций. Конечно, это связано с личными чертами Эйнштейна и Бора, но не только с ними. Для обоих мыслителей характерно очень глубокое понимание недостаточности, ограниченности и неокончательного характера каждой физической концепции. Более того, и у Эйнштейна, и у Бора существовало некоторое интуитивное предвосхищение возможного синтеза противоречивых идей. В одном из писем Соловину, отмечая воздействие тел, с помощью которых измеряют физические величины, на эти величины, Эйнштейн прибавил: «если не грешишь против разума, нельзя вообще ни к чему прийти». Многозначительная фраза в устах рационалиста! Напомним, что живой и подвижный рационализм XVII в. был ближе Эйнштейну, чем застывший в своих дефинициях рационализм XVIII в. Т. Каан считает Эйнштейна преемником Декарта, а Бора — преемником Паскаля, но оба мыслителя XVII в. связаны друг с другом множеством

---

[1] См. настоящий сборник, стр. 60—61.

общих черт. Вообще, восходя к прообразам физических концепций XX в., мы никогда не приходим к действительно противоположным идеям. В конце концов определенные мировые линии теории относительности соответствуют точно детерминированным траекториям атомов Демокрита, а в какой-то мере неопределенные (определенные по своей вероятности) движения, фигурирующие в квантовой механике, соответствуют спонтанным отклонениям (clinamen) Эпикура. Но ведь это близкие одна другой концепции античной атомистики.

Речь идет не только о близости позиций Эйнштейна и Бора, но также о постоянном изучении каждой из противостоящих друг другу концепций, образов и идей, которые становились для другой концепции исходным пунктом уточнения и обобщения. Только сейчас и только в самой неоднозначной форме мы можем сказать, куда толкало физику подобное взаимодействие идей Эйнштейна и Бора.

Сейчас видно, что конфликт между Эйнштейном и Бором отражал не столько психологические или биографические различия, сколько длительную разобщенность исходных постулатов теории относительности, с одной стороны, и квантовой механики, с другой. Такого рода конфликты могут быть сняты только самой наукой при переходе ее на такую ступень, где разобщенные постулаты оказываются выводами из более общего постулата. Во второй половине столетия, когда теоретическая физика все решительней стремится перейти от релятивистских поправок, вносимых в квантово-механические соотношения, к систематическому (в смысле, о котором говорил Эйнштейн, т. е. обладающему «внутренним совершенством») синтезу релятивистских и квантовых идей, яснее видны и сущность конфликта, и действительная конгениальность, и пути синтеза идей Эйнштейна и Бора.

Синтез

Реплики Эйнштейна, по существу, касались не только той грани, которая отделяет квантовую механику от классических (в общем случае релятивистских) представлений. Они касались и той грани, которая отделяет квантовую механику, созданную в 1924—1927 гг., от более радикальной неклассической позиции. Именно поэтому указанные реплики и толкали квантовую механику не назад, а вперед к дальнейшему обобщению и уточнению. Квантовая механика зиждется на некоторых допущениях, без которых она переходит в более общую теорию. Бор менее, чем кто-либо другой, был склонен абсолютизировать допущения, лежащие в основе квантовой механики. Поэтому его мысль так резонировала на реплики Эйнштейна. В результате споров все отчетливее вырисовывалось основное допущение квантовой механики. Эйнштейн указывал на те стороны квантовой механики, которые, как ему казалось, были лишены «внутреннего совершенства». Бор в своих возражениях все точнее формулировал квантово-механические соотношения как вывод из наиболее общего (для квантовой механики) единого постулата. В чем же состоит этот постулат? О нем сейчас можно сказать гораздо конкретнее и точнее, чем в начале дискуссии между Эйнштейном и Бором.

Конкретнее и точнее можно сейчас охарактеризовать и основной постулат, лежащий в основе теории относительности в той форме, в какой она была создана в начале столетия. И этот исходный постулат становился ощутимым и явным в значительной, скорее даже в основной степени в результате развития квантовой механики. Эйнштейну в полемике с Бором не нужно было защищать основные идеи своей теории. Принципы теории относительности не были предметом дискуссии. Эйнштейну не приходилось защищать, он мог занимать в споре чисто наступательную позицию. И это было трагедией Эйнштейна. Потому что, по существу, ему не было что защищать. Единая концепция поля не приобрела такой формы, которая позволила бы ей соперничать с идеями Бора. Но реплики Бора и развитие квантовой механики в целом находили живой отклик в сознании Эйнштейна, потому что они наталкивали его мысль на грань, действительно отделяющую теорию относительности от более общей концепции. И здесь, как и в квантовой механике, грань была логической. Между теорией относительности, сформулированной в начале столетия, и попытками построения единой теории поля нет логической грани, здесь только переход от одной геометрической аксиоматики к другой, аналогичный переходу от специальной теории относительности к общей. Геометрия Эйнштейна, положенная в основу единой теории поля (несимметричный метрический тензор),—более общая, чем риманова геометрия общей теории относительности, так же, как и геометрия Вейля (градиентно-инвариантная), геометрия Калуза (пятимерная) и т. д. Но в приведенных строках автобиографического очерка 1949 г., когда Эйнштейн говорил о независимости поведения масштабов и часов от атомной структуры, речь шла о другом. Эйнштейн писал, как мы помним, что разделение мира на 1) поля и материальные точки и 2) независимые от своей дискретной структуры масштабы и часы *нелогично*. Как мы увидим, логический ригоризм в этом вопросе приводит к обобщению самой логики.

Итак, в качестве исходного постулата теории относительности мы встречаемся с существованием макроскопических пространственно-временных объектов с гарантированным и независимым от их микроструктуры поведением.

Тем самым мы можем рассматривать движение частицы как множество совершенно определенных расстояний (это понятие имеет физический смысл при наличии градуированного независимого от своей микроструктуры масштаба) до другой частицы и множество временных интервалов между моментом, когда частица находится в данной точке, и моментом, принятым за начальный (это понятие имеет физический смысл при наличии независимых от своей микроструктуры часов). На этом постулате надстраивается все остальное: ход часов и градуировка масштабов могут зависеть или не зависеть от движения системы, могуть быть переменными или постоянными.

Независимые от своей микроструктуры тела пространственного и временного *отсчета* логически близки к «классическим объектам» квантовой механики, т. е. к телам *взаимодействия*. Для релятивистской физики достаточно постулата независимых тел отсчета, для квантовой физики необходим постулат тел взаимодействия, которые испытывают воздействия частицы и регистрируют ее импульс либо положение (энергию либо время), но реагирует на это воздействие чисто классическим образом. Существование таких тел позволяет применить к микромиру классические понятия.

Допустим на минуту, что частица *не встречается* с телами, отсчитывающими гарантированно однозначным образом ее пространственно-временные координаты. Тогда теряет физический смысл понятие мировой точки частицы.

Допустим, что частица *не взаимодействует* с классическим объектом. Тогда теряет смысл и пребывание частицы в мировой точке (пространственно-временная дислокация частицы) и направление мировой линии (скорость частицы).

Мир, который не состоит из непрерывных пространственно-временных линий, и мир, в котором даже ценой неопределенности сопряжений динамической переменной не может быть определена данная переменная, предстал перед физикой при изучении ультрарелятивистских эффектов и вакуума. Но в первой половине столетия эти области и, быть может, лежащая в них, пока не найденная разгадка единой природы элементарных частиц, еще не находились в центре внимания. Эйнштейн хотел проникнуть сюда ценой обобщения геометрии непрерывных пространственно-временных линий. Это не удалось. Но из указанных попыток вырастало представление о необходимости более радикальных методов, которые ставят под сомнение непрерывность пространственно-временных линий и тождественность движущейся частицы самой себе. Бор в дискуссии с Эйнштейном доказывал логическую безупречность стройного здания, выросшего на фундаменте квантовой механики. Оба они: и Эйнштейн, и Бор — демонстрировали тот стиль творчества, который Бор характеризовал, говоря об Эйнштейне: «вечное неукротимое стремление к совершенству, к архитектурной стройности, к классической законченности теорий, единой системе, на основе которой можно было бы развивать всю физическую картину».

В 30—40-е годы большинство физиков было убеждено, что всякие попытки Эйнштейна построить единую теорию поля уводят физику в сторону от ее основного пути. Теперь мы иначе смотрим на эти попытки. Мы видим связь их с основной линией творчества Эйнштейна, с обобщением геометрии непрерывных мировых линий. Мы видим и позитивный итог попыток — сама неудача кажется нам позитивным итогом. Нам представляется теперь возможной теория, которая *систематически* (в том смысле, который придавал этому слову Эйнштейн, т. е. аналогично термодинамике для вечного двигателя и теории относительности для эфирного ветра) объяснит невозможность единой теории поля при соблюдении постулата непрерывности мировых линий. Тем самым в некоторой мере проясняется перспектива (пока только перспектива) единой теории поля, основанной на более общих допущениях.

Следует подчеркнуть один факт истории физики первой половины нашего столетия, ускользающий обычно от внимания. Путь, которым шел Эйнштейн, путь последовательного обобщения геометрии пространственно-временного континуума, не привел к единой теории поля. Но и линия Бора, исходящая из дополнительности определения сопряженных переменных, не привела к такой теории. Более того, постулат классического объекта с гарантированными классическими переменными, позволяющими сколь угодно точно определить одну из переменных частиц за счет неопределенности другой переменной, этот постулат не дает возможности непротиворечивым образом описать ультрарелятивистские эффекты. Аналогия с безуспешностью попыток Эйнштейна — весьма условная. Затруднения квантовой теории поля сочетались с поразительными успехами рецептурных приемов перенормировки, с небывалым совпадением теоретически вычисленных величин с данными эксперимента. Речь шла о работах большинства теоретиков, о работах целого поколения, и здесь можно найти мало общего с ситуацией в Принстоне. Но для нас важна одна общая черта. В обоих случаях развитие теории наталкивалось на грань, отделяющую данную теорию не от чего-то исключающего ее, а от обобщения, позволяющего вывести данную теорию из более фундаментальных допущений. В обоих случаях грань, на которую наталкивалась теория, таила большое «внутреннее совершенство» этой теории.

На первый взгляд геометрическая «принстонская» попытка единой теории поля страдала не столько недостатком «внутреннего совершенства», сколько недостатком «внешнего оправдания». Но здесь мы сталкиваемся с условностью разграничения этих критериев. Единые теории поля, выдвинутые Вейлем, Эйнштейном и другими мыслителями, основанные на обобщении геометрии пространственно-временного континуума, исходили из общих допущений, но, по существу, не из физических. Глубоко физическая интуиция Эйнштейна, всегда искавшего среди исходных понятий такие понятия, которые приводят к экспериментально проверяемым выводам, не удовлетворялась чисто геометрическими допущениями. В общей теории относительности кривизна пространства была физическим допущением, она отождествлялась с гравитационным полем. Это отождествление могло быть обосновано физическими аргументами (принцип эквивалентности и впоследствии прямыми наблюдениями (искривление лучей света в поле Солнца и др.).

В случае единой теории поля исходные *физические* допущения должны были таить какую-то, хотя бы интуитивно угадываемую связь с фактическими, экспериментально обнаруживаемыми *взаимодействиями различных полей*. Но эта грань — переход от одного поля к взаимодействию различных полей — ограничивала и квантовую механику, созданную в 1924—1927 гг. Постулаты дополнительности и классического объекта позволили создать стройную нерелятивистскую квантовую теорию. Но теория, объясняющая релятивистские и ультрарелятивистские эффекты, рассматривающая взаимодействия полей и обладающая при этом «внутренним совершенством», не может быть построена на таком базисе.

Исходное допущение теории относительности — независимый от дискретной структуры четырехмерный объект отсчета и исходное допущение квантовой механики —классический объект взаимодействия, оказались недостаточно общими при подходе к *одной и той* же грани.

Фронт физики в целом подошел к этой грани в середине нашего столетия. Для его первой половины характерно раздельное развитие теории относительности и квантовой механики. Этому не противоречит развитие релятивистской квантовой физики — она решала лишь частные задачи [1]. В 50-е и 60-е годы теория относительности и квантовая механика не слились еще в единую и стройную концепцию, но уже вырисовываются контуры такой концепции — линия, отделяющая ее от уже известных нам. Эта линия еще зыбкая и в значительной мере пунктирная. Мы можем сказать только одно: в таких-то и таких-то пунктах новая концепция, вероятно, будет отличаться от существующих такими-то и такими-то чертами. Вероятно, она поставит в центр внимания не отдельные поля, а взаимодействие различных полей. Вероятно, она радикальнее отойдет от классических понятий, чем это сделали физические теории первой половины столетия. Вероятно, она в какой-то мере откажется от гамильтонова формализма... Прибавим еще одно «вероятно»: новая концепция будет опираться на некоторый синтез собственно логических и метрических понятий.

Какими бы неясными ни были контуры физики второй половины столетия, мы можем не сомневаться в радикальном характере начавшейся уже сейчас переоценки ценностей. Переоценка охватывает и суждения о прошлом. Попытки последовательно релятивистской переформулировки теории квантованных полей (не столько позитивными решениями, сколько поднятыми проблемами) заставляют отказаться от старого противопоставления фарватера, в котором двигалась мысль Эйнштейна, и фарватера физических идей Бора.

Фейнман однажды пояснил свою концепцию движения позитрона аналогией с зигзагом одной и той же дороги, открывшимся взору летчика, в то время как внизу казалось, что через местность проходят различные дороги, не связанные одна с другой. В истории науки подобная ситуация встречается часто. Наука всегда поднимается вверх к бесконечно высоким вершинам абсолютной истины, и, при таком подъеме, дороги, казавшиеся внизу противоположными, иногда предстают в качестве элементов единого пути.

Современная точка зрения на дороги, которыми шли Эйнштейн и Бор, учитывает такие физические процессы

---

[1] П. Дирак. О квантовой электродинамике. Тр. Ин-та истории естествознания и техники т. 22. М., Изд-во АН СССР, 1959, стр, 32—33.

и соответственно такие величины, а также качественные модели, которые раньше были неизвестны, либо по другим причинам не становились исходным пунктом ретроспективных оценок. В основном речь идет о неопределенности микропроцессов, более глубокой, чем неопределенность сопряженных переменных, и о некоторых соотношениях теории относительности, дальше, чем другие, отходящих от классических представлений и понятий, о констатациях ультрарелятивистских эффектов.

Принцип дополнительности был наиболее радикальным для своего времени отказом от классических основ физики. Но уже в 1931 г. Ландау и Пайерлс в статье «Распространение принципа неопределенности на релятивистскую квантовую теорию»[1] обсуждали вопрос о неопределенности, которая не связана с дополнительностью измерений сопряженных переменных. Измерение отдельной переменной, независимо от измерения другой сопряженной переменной, всегда сопровождается и так называемыми индивидуальными ошибками, которые связаны с актами трансмутации элементарных частиц. Далее Бор и Розенфельд систематически исследовали проблему индивидуальных ошибок [2].

Теория индивидуальных ошибок в какой-то мере ограничивает основную посылку квантовой механики: дискретное поле, т. е. совокупность некоторых частиц, взаимодействует с объектом, по отношению к которому мы отказываемся от учета его дискретности. Такая точка зрения законна, пока более сложные взаимодействия (описание которых требует учета дискретности взаимодействующих объектов) остаются незначительным придатком к основным процессам. Но когда мы встречаемся с большой по величине константой связи (мезонные поля) или же с очень большими энергиями взаимодействующих квантованных полей, тогда требуются принципиально иные схемы. Одной из них служит S-матрица Гейзенберга [3].

Это оператор, переводящий волновую функцию частицы *задолго* до рассеяния в волновую функцию рассеянной

---

[1] Zs. f. Phys., 69, 56, 1931.

[2] Kong. Danske Vidensk. Selsk. Math. Phys. Medd., 12, N 8, 1933. Ср. статью Гейзенберга в этом сборнике.

[3] Zs. f. Phys., 120, 513, 673 (1943).

частицы, соответствующую времени *много позже* рассеяния. Слова «задолго» и «много позже» означают интервалы времени, весьма большие по сравнению с временем рассеяния. Частица как бы исчезает или прячется от взора исследователя в момент рассеяния. Что же с ней происходит, *исчезает* она или *прячется*, соответствуют ли формализму S-матрицы реальное прекращение непрерывного процесса изменения координат частицы, проходящей на каждом отрезке через бесконечное множество положений? Иначе говоря, соответствует ли отказу от гамильтонова формализма, прослеживающего поведение частицы от точки к точке и от мгновения к мгновению, *принципиальная* невозможность применения континуального представления о движении?

S-матрица соответствует более точному отображению действительных процессов. В 1949 г. в статье «S-матрица в квантовой электродинамике» Дайсон [1], показав эквивалентность новых в то время методов Томонаги, Швингера и Фейнмана, с одной стороны, и S-матрицы, с другой, дал в заключение ясную схему двух последовательных этапов изучения микропроцессов.

Первый этап — описание картины, открывшейся «идеальному» наблюдателю, который пользуется приборами, заведомо не обладающими атомной структурой, т. е. классическими объектами. У этого наблюдателя точность измерений ограничена фундаментальными постоянными — скоростью света и квантом действия. Этот наблюдатель, пользуясь взаимодействиями полей, изучает спектры, бомбардирует атомные системы и в результате измеряет напряженность отдельного данного поля, не возмущенного взаимодействием.

Второй наблюдатель (Дайсон называет его «реальным») не может игнорировать атомную структуру своих приборов, и перед ним раскрывается картина взаимодействия дискретных систем — квантованных полей. Производимые им измерения ограничены помимо скорости света и кванта действия и другими величинами, константами связи полей и значениями масс взаимодействующих частиц. «Реальный» наблюдатель не может определить

---

[1] F. Dyson. Phys. Rev., 75, N 11, 1736 (1949).

напряженность невозмущенного поля и не может ни при каких условиях проследить движение частицы от точки к точке и от мгновения к мгновению.

Второй («реальный») наблюдатель Дайсона отказывается от основного допущения квантовой механики — существования чисто классического объекта, позволяющего определить с неограниченной точностью некоторую переменную ценой неопределенности другой, сопряженной переменной. Но, учитывая взаимодействие полей *полностью*, т. е. не исключая одно из полей из квантово-атомистической картины, второй наблюдатель не сможет уже пользоваться и допущением Эйнштейна, допущением четырехмерного объекта отсчета, допущением существования масштабов и часов, поведение которых не зависит от их микроструктуры. Иными словами, второй наблюдатель Дайсона переходит за ту грань, которая отделяет квантовый мир Бора (с классическими объектами взаимодействия) и релятивистский мир Эйнштейна (с независимыми объектами отсчета) от более точной и конкретной картины.

Переход к более детальному учету взаимодействий исключает детализацию движения в пространстве и времени. Вопрос состоит в следующем: можно ли считать невозможность пространственно-временной детализации принципиальной, ограничивают ли взаимодействия полей представление о непрерывном движении частицы, прерывают ли взаимодействия полей движение частицы?

Представление об ультрарелятивистских эффектах трансмутации частиц, об ее аннигиляциях и регенерациях, не позволяющих проследить движение частицы от точки к точке и от мгновения к мгновению, высказывалось не раз. Оно позволяет наполнить физическим содержанием концепцию дискретного пространства и времени. Сама по себе эта концепция дискретной геометрии не имела бы физического смысла, как не имела его неэвклидова геометрия до того, как Эйнштейн отождествил гравитационные поля с изменением метрических свойств пространства-времени (хотя сама мысль о возможности физических прообразов дискретной, как и неэвклидовой геометрии высказывалась раньше). Невозможность проследить движение частицы от точки к точке и от мгновения к мгновению (независимо от дополнительности сопряженных переменных) имеет, по-видимому, столь же принципиальный характер, как невозможность регистрации движения относительно эфира и невозможность точного определения координат при точном определении импульса. Если такую невозможность вывести из наибоее общих постулатов, причем *физических* постулатов, то теория поля избавляется от бесконечных значений собственной энергии частицы: виртуальный квант, который не только не может быть наблюдаем на сколь угодно малом отрезке, но и, действительно, не может отойти от нее на расстояние, меньше минимального, и на время, меньше минимального, такой квант внесет ограниченный вклад в собственную энергию частицы. Сейчас еще нет физически содержательной теории дискретного пространства-времени, которая, устраняя бесконечные значения энергии, не только согласовывалась бы с соотношениями теории относительности, но и позволяла бы вывести эти соотношения из более общих. Но мы можем говорить о принципиальной разрешимости такой задачи, о ее логических основах.

Приведем условную схему, которая позволит увидеть логические постулаты, которые, быть может, получат физическую интерпретацию в физической теории дискретного пространства-времени. Представим себе, например, что движение частицы с ненулевой массой покоя складывается из дискретных регенераций: частица исчезает в данной пространственно-временной клетке и регенерирует в соседней. Если предположить, что эти пространственно-временные клетки имеют пространственную протяженность $\rho \sim 10^{13}$ *см* и временную $\tau = \rho/c \sim 10^{-24}$ сек [1], мы получаем дискретное пространство-время на *световом конусе*: регенерации можно рассматривать как движение тождественной себе частицы со скоростью $\rho/\tau = c$. Макроскопическая мировая линия такой частицы, если последняя обладает ненулевой массой покоя, пройдет внутри

[1] Обычно, говоря о дискретности пространства и времени, принимали указанный порядок величин: $\rho \sim 10^{-13}$ *см* и $\tau \sim 10^{-24}$ сек. Сейчас есть основания предположить, что минимальные масштабы меньше, например, $\rho \sim 10^{-17}$ *см* и соответственно $\tau = \rho/c \sim$ $\sim 10^{-28}$ *сек*.

светового конуса, так как элементарные смещения — регенерации могут быть, вообще говоря, направлены в различные пространственные стороны, и в зависимости от асимметрии вероятностей регенераций, макроскопическая скорость v может в различной степени приближаться к c, оставаясь меньше последней, $v < c$.

Остановимся на асимметрии вероятности регенераций. Если частица обладает одной и той же вероятностью регенераций во всех направлениях, то после большого числа элементарных сдвигов она окажется вблизи начального пункта. В подобном случае понятие макроскопической непрерывной траектории частицы теряет смысл. Оно обретает такой смысл, если в данной пространственно-временной области действует непрерывное поле другого типа, чем поле, квантом которого является регенерирующая частица. Мы и здесь пользуемся «постулатом линейности» и рассматриваем образующее асимметрию поле в макроскопическом аспекте. Именно поэтому мы можем говорить о макроскопических линиях асимметрии вероятностей, вдоль которых направлены непрерывные траектории L тождественных себе частиц. Эти траектории измеримы, если существуют макроскопические масштабы, а для измерения соответствующих мировых линий сверх того и макроскопические часы. Поведение масштабов и часов рассматривается в континуально-классическом аспекте. Таким образом, создается почва для релятивистских соотношений — утверждений о том или ином поведении масштабов и часов в зависимости от макроскопических полей и макроскопических движений. Пребывание в мировой точке имеет физический смысл, если регенерирующие частицы взаимодействуют с другими. Но эти другие частицы, т. е. кванты иного поля, мы не рассматриваем в корпускулярно-волновом аспекте и принимаем их за некоторый классический объект. Так создается почва для исходных построений квантовой механики. За пределами введенных постулатов остается мир нелинейных взаимоотношений и макроскопически неупорядоченных регенераций.

Следовательно, понятие асимметрии элементарных регенераций позволяет перейти от ультрамикроскопического аспекта к макроскопическому, т. е. рассматривать микромир глазами первого («идеального») дайсоновского наблюдения.

Обратимся к логической стороне перехода от ультрамикроскопического аспекта к макроскопическому. Процессы регенерации на световом конусе соответствуют совсем особой логике: меняя предикат (координаты и время), данный субъект (частица) исчезает. Таким образом, высказывание о принадлежности предиката субъекту может иметь только одну оценку «истинно». Подобная логика называется *моновалентной*. Она не дает возможности перейти к непрерывному предикатному многообразию и к понятию нетривиально тождественного себе субъекта. Если субъект существует лишь при наличии определенных предикатов (частица существует лишь в данном месте в данное время, в данной пространственно-временной клетке), он обладает лишь тривиальной себетождественностью. Подобная, ультрарелятивистская логика соответствует трансмутациям на световом конусе. Таким образом бесконечно-бивалентная релятивистская логика отличается от ультрарелятивистской логики. При переходе со светового конуса к непрерывному макроскопическому движению со скоростью $v < c$ вступает в свои права тривалентно-бивалентная логика дополнительности: если оценка с условием исключенного третьего возможна по отношению к координатам частицы, то для импульса возможна лишь оценка, включающая неопределенность.

Таким образом, мы снова встречаемся с логикой переменной валентности. Но теперь изменение валентности уже не стоит за кулисами позитивного содержания теории, как это было в нерелятивистской квантовой механике. Теперь позитивное содержание физической теории неотделимо от изменения валентности оценок. Поэтому здесь, по-видимому, неизбежен переход от «журдэновского» (по имени мольеровского героя, не знавшего, что он говорит прозой) применения новой логики к явному применению нового логического алгоритма. С логической стороны переход от дискретного пространства-времени на световом конусе к непрерывному, подчиненному соотношениям теории относительности (если включить постулат независимых от микроструктуры масштабов и часов) и соотношениям квантовой механики (если включить постулат классического объекта) — это переход от моновалентной к бесконечно-бивалентной (в первом случае) и к бесконечно-тривалентно-бивалентной (во втором случае) логике. Без такого перехода регенерации не могут стать основой картины мира. Начиная с XVII в., научная картина мира развивается, проходя через бесконечный последовательный ряд все более общих и точных представлений. Этот ряд сходящийся. Каждая новая картина мира содержит предыдущую, как законное в известных границах приближение к действительности. Более того, она придает предыдущей картине то «внутреннее совершенство», поиски которого были содержанием научного творчества Эйнштейна и Бора. Тем самым «внутреннее совершенство» приобретает центральная идея всей физики XVII — XX вв.— классической, релятивистской и квантовой. Движение тождественных себе элементарных объектов (с постоянной или переменной массой и, соответственно, с неограниченной или ограниченной скоростью, с определенными или неопределенными динамическими переменными) в непрерывном пространстве и вермени выводится из превращений и регенераций элементарных частиц в клетках дискретного пространства-времени. Соответственно и логика непрерывных предикатных многообразий — основа качественно-математического изучения движения от точки к точке и от мгновения к мгновению — обнаруживает свою связь с более общей логикой.

Нужно подчеркнуть, что ни логические конструкции типа моновалентно-поливалентной логики, ни геометрические конструкции типа дискретной геометрии и ее перехода в непрерывную геометрию не имеют сами по себе физического смысла. Так же как неэвклидова геометрия не имела физического смысла без эйнштейновской теории тяготения или теория операторов без корпускулярно-волнового дуализма. Когда речь идет об исходных логических и геометрических понятиях, их физическим эквивалентом, придающим этим понятиям физический смысл, служит физическая картина мира в целом.

Каждая новая физическая картина мира характеризуется некоторым обобщением понятия причинности. Классическая картина мира была связана с классическим детерминизмом Галилея, Ньютона, Лагранжа и Лапласа.

Старое, чисто логическое и качественное представление о причинности было дополнено новым. Основой причинной связи физических процессов стали считать точную количественную определенность динамических переменных движущейся частицы, зависящих от начальных условий и поля. Это представление, получившее законченную форму в классической аналитической механике, было дифференциальным представлением: движение частицы считали в принципе возможным проследить от точки к точке и от мгновения к мгновению. Такое представление о движении и является первым физическим эквивалентом понятия непрерывного предикатного многообразия и основой превращения анализа бесконечно малых в рабочий аппарат физики, которая до XVII в. была по своим методам не математической, а логической дисциплиной. Дифференциальное представление о движении было законченным, стройным и крайне плодотворным количественным воплощением детерминизма. Для громадной области оно осталось и остается непоколебимым.

Но для движения, характеризующегося высокой энергией, понадобилось некоторое обобщение детерминизма Ньютона, Лагранжа и Лапласа: поиски причинной связи воплощаются теперь в анализ четырехмерного невырождающегося непрерывного предикатного многообразия. Причинные связи должны проходить внутри и на поверхности светового конуса, т. е. взаимодействия тел — причина их ускорений — распространяются со скоростью, не превышающей скорости света. В этом состоит требование релятивистской причинности.

Квантовая причинность — это дальнейшее обобщение механической причинности. Она расширяет объем сведений о причинных связях в природе, определяя с помощью волновых уравнений вероятность состояний микроскопических объектов и вводя условия дополнительности определения сопряженных динамических переменных.

Является ли подобная, в общем случае статистическая причинность наиболее общей закономерностью природы? Именно этот вопрос ставил Эйнштейн в письме к Максу Борну: «играет ли бог в кости?»

«Играет ли бог в кости?» Напомним, что речь идет о динамических переменных, о координатах и импульсе, о времени и энергии. Они определяются с помощью классических тел отсчета (масштабов и часов, по отношению к которым можно, как это делал Эйнштейн, игнорировать их зависимость от микроструктуры) и классических тел взаимодействия (т. е. на основе боровского постулата о существовании таких тел, о правомерности игнорирования их микроструктуры и неопределенности их динамических переменных). В спорах о квантовой механике формулу «бог играет в кости» интерпретировали как утверждение: в микромире по отношению к импульсу, координатам, времени и энергии могут быть в общем случае детерминированы только их вероятности. Фразу «бог не играет в кости» интерпретировали как утверждение: позади статистических законов квантовой механики находятся законы, определяющие достоверным и точным образом не вероятности значений динамических переменных, а самые эти значения.

Но в середине столетия на авансцену выдвинулись процессы трансмутации элементарных частиц и взаимодействий полей различного типа, заставляющих, вообще говоря, релятивировать и эйнштейновские тела отсчета и боровские тела взаимодействия. Соответственно появляется понятие *ультрарелятивистской причинности*, которой подчинен мир ультрарелятивистских энергий и ультрарелятивистских эффектов.

Но задача современной науки состоит не в констатации такой ультрарелятивистской границы релятивистской и квантовой причинности, а в *выведении* их из ультрарелятивистской причинности. Решение такой задачи по-видимому релятивирует оба ответа — и ответ Бора, и ответ Эйнштейна. Релятивирует и различие между указанными ответами.

Приведенная условная схема дискретных трансмутаций на световом конусе позволяет иллюстрировать подобное предположение. Статистические закономерности («играет в кости») определяют *направление* элементарных сдвигов на световом конусе и именно они приводят к несовпадению ультрамикроскопической скорости, равной c, с результирующей макроскопической скоростью $v < c$, т. е. к релятивистским соотношениям внутри светового конуса. Макроскопическая траектория определена внешним полем статистически. Здесь «бог играет в кости». Но исходные акты трансмутации исключают самый вопрос об определении вероятности динамических переменных или непосредственном и в каждом случае точном их определении. Здесь понятия траектории частиц и, более того, существования тождественной себе частицы уже неприменимы. Они становятся применимыми к областям порядка 10^{-13} *см* (или на несколько порядков меньше) только тогда, когда уже определены макроскопические понятия, относящиеся к существованию и движению тождественной себе частицы. В число этих понятий входят понятия динамических переменных, определяемых в общем случае статистически, через их вероятность («играет в кости»). Что же касается исходных трансмутаций, то здесь мы еще не видим тождественной себе частицы и не можем пользоваться относящимися к ней понятиями.

В мире, где частицы трансмутируют, но не существуют в классическом смысле себетождественности, теряет физический смысл непрерывность пространства и времени как динамических переменных движущейся тождественной себе частицы. Именно такой, в общем случае релятивистский, смысл, именно такое наиболее широкое механическое представление о пространстве-времени неприменимы в ультрамикроскопических областях. Указанные области отделены от сравнительно «больших» барьером полной неприменимости классических понятий, радикальным отказом от понятия себетождественной частицы, к которой отнесены понятия динамических переменных. Этот барьер и был предельным пунктом теории относительности и нерелятивистской квантовой механики. Трансмутационные взаимодействия вышли за рамки постулатов классического тела отсчета и классического тела взаимодействия, постулатов, применимых к исследованию *данного* поля, требующих поправок в случае больших энергий и сильных взаимодействий и совершенно неприменимых в самой области элементарных трансмутаций.

Но все дело в том, что современная физика стремится не столько установить указанный барьер, сколько найти в нем проходы, вывести из трансмутационных закономерностей закономерности существования и движения тождественных себе частиц. Это и значит, что в современной физике концепции относительности и дополнительности получают не пенсионные книжки, а то, к чему их в течение долгих лет вели и объективная логика фактов и уточнение понятий и усилия создателей указанных концепций. Они обретают некоторый общий исходный принцип, они перестают быть предельными и поэтому лишенными физического обоснования постулатами. Речь идет о физической аксиоматизации принципов относительности и дополнительности. Именно о *физической* аксиоматизации: не о каких-либо геометрических допущениях, а о физических процессах, из которых в макроскопическом аспекте вырастает существование и непрерывное движение тождественных себе частиц. К последним применимы понятия динамических переменных, определяемых с помощью классических тел отсчета и классических тел взаимодействия. Поэтому современная физика идет по пути синтеза идей Эйнштейна и Бора.

О ВОЗМОЖНЫХ СВЯЗЯХ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ С ОПЫТОМ

ХР. Я. ХРИСТОВ

София

Нет законченной теории, удовлетворяющей всем требованиям логики, результаты которой полностью совпадают с данными опыта. На пути каждой науки стоят проблемы «развития вверх»—к более полному и точному объяснению более сложных случаев, и проблемы «развития вниз»—к более точным определениям понятий и формулировкам принципов, на которых базируется теория. Квантовая теория, современная теория атомных процессов, также не является и не может являться совершенной теорией. Она достигла больших успехов, начиная с закона Планка и атомной модели Резерфорда — Бора, которые изумительно точно подтвердились на опыте, через бесчисленные ее применения в теории ядра и твердого тела, и кончая законами взаимодействия и взаимного превращения элементарных частиц, где только эта теория в состоянии пролить свет. Но, несмотря на успехи квантовой теории, перед ней встают чрезвычайно большие трудности. Существуют уравнения (например, в задаче многих тел), которые решаются только приблизительно при помощи теории возмущений. При этом не всегда ясно, справедливы ли сделанные приближения. Иногда даже имеются соображения, что полученные результаты существенно отличаются от истинных значений искомых величин. В квантовой теории возникают трудности и в связи с экспериментальным подтверждением. Иногда ее предсказания выводятся при довольно произвольных предпосылках, содержащих много неизвестных констант — частый случай в квантовой теории ядра. Хорошо известны тоже расходимости — физические бессмыслицы, которые получаются в теории элементарных частиц. На всех этих трудностях, связанных с развитием квантовой теории «вверх», мы останавливаться не будем.

Но есть трудности и более принципиального характера, возникающие вследствие неясности в постановке задачи, в понятиях и принципах, из которых вся теория исходит.

Рассмотрим эти характерные для квантовой теории проблемы. Не будем вдаваться в широкие дискуссии. Памятуя о разных нюансах в формулировке основных положений квантовой теории, попытаемся дать, хотя бы в общих чертах, сведения о таких понятиях и принципах. Не будем останавливаться подробно на операторно-волновом формализме, который в общем ясен; не будем дискутировать отклонения теоретических результатов от опытных данных. Сконцентрируем внимание на физической интерпретации величин, на том, какие принципиальные возможности сравнения теории с опытом существуют и как их следует использовать. На наш взгляд эти вопросы до сих пор недостаточно освещены в литературе.

Наука оперирует величинами и соотношениями объективного характера, не связанными с взглядами или желаниями исследователя. Тем не менее, они могут быть объектами исследования постольку, поскольку они отображены в человеческом сознании. Поэтому строго последовательная физическая теория должна удовлетворять не только (как и любая математическая теория) всем требованиям логики, но указывать, какие из величин непосредственно измеряемы опытным путем. Эти величины необходимо выбирать так, чтобы остальные величины, которыми оперирует теория, выражались через них. Для каждой такой величины должен быть прибор, который даст возможность хотя бы приблизительно измерить ее. Таким образом, теория становится физической — мы получаем возможность определить на опыте все неизвестные параметры (материальные константы и начальные условия), которые необходимы, чтобы результаты получились однозначными и чтобы их можно было проверять на опыте и использовать для предсказания и применения природных явлений. В классической физике считается, что расстояния между материальными точками можно измерять в любой момент. Эти величины, очевидно, удовлетворяют указанным требованиям, поэтому вопрос там является элементарным. В нерелятивистской квантовой механике, как мы увидим, тоже можно ответить на этот вопрос, причем ответ будет не совсем элементарным.

Чтобы построить теорию, логически замкнутую в указанном смысле, необходимо принять некоторые обобщения, имеющие оригинальный характер, не считая, что это единственный возможный путь последовательного изложения квантовой теории. Некоторые дискуссионные вопросы получат однозначный ответ. Ограничимся нерелятивистской квантовой механикой, а релятивистскую квантовую механику и теорию поля не будем рассматривать — там встречаются дополнительные трудности [1]. Мы надеемся, что выяснение ситуации в классической квантовой механике поможет выяснить вопрос о связях с опытом в указанных двух современных формах квантовой теории, что весьма желательно.

В квантовой теории понятия зарождаются и уточняются, а законы открываются и обобщаются в процессе ее развития, продолжающегося и сегодня. Поэтому для квантовой теории в высшей степени справедливо, что развитие науки не может идти по прямому пути, без обходных движений, без ошибочных шагов. Создание логически последовательной теории типа математических аксиом, которая отображала бы динамику развития квантовой механики и которая показывала бы происхождение каждого утверждения — опытного факта, определения, логического постулата, принципа и заключения — чрезвычайно трудно. Нельзя обойтись без некоторой схематизации

---

[1] Л. И. Мандельштам. Полн. собр. тр., т. V. Лекции по основам квантовой механики, стр. 349; Schweber S. S. An Introduction to Relativistic Quantum Field Theorie. Peterson and Co. N.-Y., 1961, стр. 64, 99.

понятий, поэтому мы всегда должны иметь в виду, что, как и в любой другой науке, все нижеследующие утверждения являются приближениями, достоинства которых может оценить только практика.

Трудность в квантовой теории связана с тем, что масштаб изучаемых явлений, как в астрофизике, очень отличается от масштабов, окружающих нас и наблюдаемых невооруженным глазом явлений. Но в первом случае он незримо мал, во втором — необозримо велик. Специфика атомных процессов в том, что они непосредственно не наблюдаются: самый зоркий глаз, самый острый нож, самый точный микроскоп не могут отделить единичные атомы, ядра или элементарные частицы. Наблюдаются только суммарные действия большого числа частиц и воздействия единичных частиц на так называемые измерительные приборы. По этим данным мы должны судить о механизме атомных процессов. А эти процессы, по-видимому, так необычны, что даже самые элементарные законы классической физики (например, закон независимости действия сил), кажется, не имеют места. В этом мире закономерности качественно отличаются от тех, которые управляют процессами, наблюдаемыми простым глазом.

В классической и в квантовой физике считается, что в каждой материальной системе S в каждый момент t можно провести измерения разных величин L и найти их приблизительные значения $\widetilde{l}$ в момент t при помощи соответствующих измерительных приборов $S_{\widetilde{L}}(B_1)$.

Нумерованы только самые главные определения (A), основные утверждения (принципы или гипотезы) (B) и следствия (выводы или теоремы) (C).

Приборы вообще несовершенны. Если провести серию измерений одним и тем же прибором в один и тот же момент над материальными системами, полученными одним и тем же способом, результаты могут не повторяться. Считается, что полученные значения l имеют определенное статистическое распределение $P(\widetilde{l})$, причем, конечно, $\sum_{\widetilde{l}} P(\widetilde{l}) = 1 \cdot (B_2)$. (Переменная $\widetilde{l}$, как и другие переменные, которыми мы будем оперировать, вообще принимаeт как дискретные, так и непрерывные значения. Символ $\sum_{\tilde{l}}$ здесь, как и в дальнейшем, обозначает суммирование по дискретным и интегрирование по непрерывным значениям). Другая серия измерений тем же прибором, но над другой системой, полученная другим способом или в другой момент, вообще даст другое распределение $P(\tilde{l})$. Приблизительные значения l переменной L найдены в заданный момент t при помощи измерительного прибора S_L для всех одинаковых материальных систем S, полученных одним и тем же способом, и имеют определенное среднее значение

$$l = \sum_{\tilde{l}} \tilde{l} P(\tilde{l}).$$

Последнее вообще зависит от L, S и t. По определению l дает значение динамической переменной L для системы S в момент t.(A_1). В частности, когда дисперсия прибора S_L равна нулю, $P(\tilde{l}) = \delta(\tilde{l} - l)$ при каждом возможном l, хотя бы для одной системы S (имеются в виду не микросистемы, а классические макросистемы), мы назовем прибор S_L хорошим. (A_2). В этом случае показание прибора совпадает со значением переменной L и это значение мы можем получить одним только измерением. В общем случае, чтобы найти l, необходимо большое число измерений.

Дальше вводится понятие о форме движения данной материальной системы в заданный момент. Это понятие является основным в физике и в естественных науках вообще. Как и понятия материи, пространства, времени и т. д., оно вводится без формального определения как результат непосредственного обобщения нашего опыта. Форма движения, конечно, включает не только, скажем, скорости рассматриваемых тел, но весь комплекс величин, значения которых можно получить из опыта (координаты, скорости, температуры, давления и т. д.), характеризующих форму движения рассматриваемой системы в этот момент t.(A_3). Вводятся еще понятия об информации, о форме движения и о состоянии рассматриваемой системы S. Движение как в классической, так и в квантовой физике в общем не вполне определено — мы фактически не знаем все, что можно знать о движении системы. То, что нам задано, дается информацией I о движении. Она задается вероятностным распределением значений динамических переменных, определяющих движение системы в момент t[1]. У различных наблюдателей, конечно, могут быть различные информации о движении одной и той же системы, в один и тот же момент. Мы скажем, что информация I'' наблюдателя O'' не беднее, чем информация I' наблюдателя $O'(I'' \geqslant I')$, если все бездисперсные величины у O' являются бездисперсными и у O''. Следовательно, множество информаций о движении данной системы в данный момент частично упорядочено. (C_1). Информацию I назовем максимальной, если нет информаций более богатых, чем она. Как в классической, так и в квантовой физике доказывается, что одной заданной системе в один заданный момент соответствует одна и только одна максимальная информация. Эта информация не может зависеть от наблюдателя и в этом смысле она объективна. По определению она характеризует состояние системы S в момент t.(A_4). Очевидно, состояние системы S задается некоторым числом величин s — констант или функций, которые независимы между собой и при помощи которых можно выразить все величины, характеризующие форму движения. В классической механике материальных точек — это их положения и импульсы, а в квантовой механике — их функция состояния $\psi(x)$. Первые определяют значения всех остальных динамических переменных, а вторая — их вероятностное распределение. Считается, что если известно значение $s = s_0$ в заданный момент $t = t_0$, можно теоретически найти значение s в любой другой момент t, лишь бы система S была свободна, т. е. не находилась под действием других материальных систем. (B_3). Более конкретно считается, что величины s являются дифференцируемыми функциями времени t, причем эволюция системы во времени задается уравнением типа

$$\frac{ds}{dt} = F(s, t). \tag{1}$$

---

[1] J a u c h and P i r o n. Can Hidden Variables be Excluded in Quantum Mechanics, preprint CERN, 5702/Th 324, 1963, p. 11.

Все это характерно и для классической, и для квантовой физики.

Только в классической физике считается, что измерительные приборы не возмущают движение изучаемой системы. Если мы производим несколько измерений различных величин L_i над одной и той же системой в один и тот же момент времени (или в близкие моменты, так что состояние системы за это время существенно не менялось), значения l_i динамических переменных L_i получаются одни и те же, несмотря на порядок измерений. B_4. Поэтому в классической физике при помощи дополнительных измерений мы можем свести к нулю дисперсии всех динамических переменных, и, следовательно, состояние определяется значениями тех динамических переменных, которые независимы и при помощи которых выражаются все остальные переменные. Таким образом, в классической физике динамические переменные в каждый момент имеют объективно определенные значения, которые не зависят от измерительного прибора и еще менее от наблюдателя (от движения системы отсчета они, конечно, могут зависеть). Значения этих переменных можно знать или не знать, но даже когда они не известны, мы знаем, что они объективно существуют. (C_2). Динамическими переменными одной системы материальных точек являются координаты x, скорости v, энергия E, импульсы P, моменты количества движения M, ускорения w, все их производные по времени и т. д. Если система составлена из твердых тел, нужно добавить углы Эйлера φ, θ, ψ, угловую скорость ω и т. д. Если внутренняя структура тел может меняться, то к упомянутым величинам следует добавить давление, температуру и другие величины, характеризующие внутреннюю форму движения. Если имеются и поля, то вводятся величины, характеризующие их распределение. Если система изолирована или находится под действием внешних систем, движение которых задано, между этими величинами существуют соотношения типа

$$E = \frac{m}{2} v^2 + V(x) \text{ или}$$

$$mw = F(t, x, v), \tag{2}$$

так что для характеристики состояния не нужно задавать значения всех этих величин. Задача конкретных физических теорий — теории гравитации, гидродинамики, электродинамики и т. д.— сводится именно к тому, чтобы правильно выбирать все эти переменные и связи между ними и, конечно, правильно решать эти уравнения в конкретных случаях. Следовательно, во-первых, если система изолирована или находится под действием систем, движение которых задано, то, зная состояние системы в один момент, можно найти его в любой более поздний или более ранний момент. (C_3). Во-вторых, так как все наблюдаемые величины являются динамическими переменными, а их можно выразить посредством величин s, характеризующих состояние, то результат любого эксперимента в любой момент t можно теоретически найти, если дано состояние системы при $t = t_0$, т. е. если даны результаты подходящих измерений при $t = t_0$. (C_4). В-третьих, если исследуемая материальная система состоит из нескольких подсистем, то состояния последних определяют однозначно состояние всей системы. (C_5). Это получается, если иметь в виду определение состояния, а также следующее соображение. Если даны два дифференциальных уравнения с двумя неизвестными и каждое из них определяет однозначно соответствующее неизвестное при заданных начальных условиях и при предположении, что другое неизвестное задано, оба уравнения определяют однозначно оба неизвестных при тех же начальных условиях. Если система S составлена из некоторого числа материальных точек, то, по законам динамики Ньютона, состояние можно определить при помощи координат и импульсов каждой материальной точки — канонических переменных систем материальных точек. (A_5). Считаются заданными такие материальные константы как массы, электрические заряды и магнитные моменты, которые неизменны во времени и характеризуют динамические свойства системы.

Если информация о движении системы неполна, она задается не значениями динамических переменных при $t = t_0$, а их вероятностным распределением $W_0(s_0)$, и задача теории в этом случае будет — найти не значения динамических переменных, а их вероятностное распределение $W(s, t)$, при любом t.

Когда из (1) нашли $s = s(s_0, t)$, нетрудно найти и $W(s, t)$. Для такой цели достаточно из этого уравнения найти $s_0 = s_0\ (s, t)$ и подставить в $W_0\ (s_0)$. Получаем

$$W\ (s,\ t) = W_0\ [s_0(s,\ t)].$$

Следовательно, в классической физике можно последовательно определить развитие во времени состояния системы и получить информацию о движении.

Изучение свойств атомных систем показало, что эти основные положения классической физики, отражающие общие закономерности непосредственно наблюдаемых процессов, непригодны для понимания явлений в атоме. Укажем на две группы явлений, которые показали это самым убедительным образом.

Известно, что каким бы внешним воздействиям ни были подвергнуты атомы каждого элемента, они излучают спектры электромагнитных волн строго определенных частот, характерных для этого элемента. С другой стороны, согласно современным взглядам, каждый атом представляет миниатюрную солнечную систему. Если бы там действовали законы классической физики, то какими бы ни были силы взаимодействия, каждое внешнее взаимодействие приводило бы к перераспределению орбитальных электронов. Они излучали бы самые различные волны, в зависимости от воздействия и от условий. Указанная стабильность характерна не только для спектральных линий, но и для всех прочих свойств атома. Опыт показывает, что каждый атом находится в некотором нормальном состоянии, и если вследствие некоторых воздействий он выводится из этого состояния, то это совершается скачкообразно — атом переходит в некоторые дискретные состояния и опять возвращается в нормальное состояние. Среди обычных (неатомных) систем имеются тоже стабильные, в некоторой степени саморегулирующие механизмы, например, разные часовые устройства, но это только исключения. Эту дискретность, характерную для всех атомных процессов, классическая физика не объясняет, и не видно, как она могла бы объяснить ее [1].

---

[1] Э. В. Шпольский. Атомная физика, т. I. М., ГИТТЛ. 1949, стр. 301.

К атомным процессам, которые классическая физика не может объяснить, относятся различные излучения. Установлено, что атомные процессы сопровождаются эмиссией или адсорбцией разных излучений, которые разделяются на два класса — корпускулярные и волновые (электромагнитные). Первые — это пучки частиц: электроны, протоны, мезоны и т. д., вторые — потоки электромагнитных волн различной частоты: видимый свет, рентгеновые лучи, гамма-лучи и т. д. Первые двигаются с различными скоростями, отклоняются под действием силовых полей и рассеиваются при встрече с молекулами и атомами как упругие заряженные или незаряженные шарики. Вторые распространяются всегда со скоростью света, а при прохождении, например, через кристаллическую пластинку поляризуются, интерферируют и дифрагируют. Как известно, именно эти явления в свое время разрешили спор между создателем корпускулярной теории света — Ньютоном и волновой — Гюйгенсом в пользу последнего. Однако более поздние опыты показали, что рентгеновые и гамма-лучи, несмотря на то, что они могут поляризоваться, интерферировать и дифрагировать при прохождении через вещество, например, при рассеивании и поглощении электронами, ведут себя не как волны, а как миниатюрные шарики, летящие со скоростью света и с энергией, пропорциональной их частотам. Установлено также, что катодные и бета-лучи (потоки быстрых электронов) могут при прохождении через кристаллическую пластинку поляризоваться, интерферировать и дифрагировать как волны с частотой, пропорциональной энергии. Оказалось, что отношение энергии к частоте (импульса к волновому числу) во всех указанных опытах одинаково и равно введенной раньше по иному поводу константе Планка $6{,}62 \cdot 10^{-27}$ *эрг·сек*. Следовательно, Ньютон и Гюйгенс были одновременно в некоторой степени правы не только по отношению к природе света, но и по отношению ко всем видам атомных излучений, в том числе и к тем, которые открыты позднее.

Примером могут служить нейтрино, о которых трудно сказать, принадлежат ли они к первому или ко второму классам излучений. Неясно, как можно сочетать эти свойства атомных излучений на базе представлений классической физики.

Эти два типа явлений стали исходным пунктом для создания принципиально новой теории в атомной физике — квантовой теории. Чтобы создать новую теорию с новыми принципами, когда существует логически полная теория, необходимо отбросить некоторые принципиальные положения старой теории. В противном случае новая теория была бы внутренне противоречива или представляла бы дальнейшее развитие и конкретизацию старой теории, т. е. не была бы новой. При построении квантовой теории было отброшено утверждение классической физики, согласно которому процесс измерения не возмущает движения системы (ср. B_4). Это дало возможность отказаться от положения о том, что каждая динамическая переменная в каждый момент имеет объективно определенное значение (ср. C_2), которое выглядело элементарным и само собой разумеющимся. Казалось, оно лежит в основе каждой разумной теории и никто не сможет отбросить его, не разрушая всей теории, так что никто раньше явным образом как принцип его и не формулировал. Вместо этого было принято, что есть два материальных мира: макромир (или мир макрочастиц), где имеют место законы классической физики и, в частности, упомянутое утверждение (B_4), и микромир (или мир микрочастиц), где эти законы не выполняются. Далее принимается, что у микрочастиц каждая динамическая переменная L в каждый момент t обладает одновременно некоторым множеством значений l (спектр переменной L), приблизительное значение $\tilde{l}$ каждого из которых может быть получено с некоторой вероятностью $W(\tilde{l})$ при опыте с соответствующим прибором. После измерения состояние скачкообразно меняется (принцип неопределенности). (B_5). Подразумевается, что микросистема получена определенным способом, который остается тем же при повторении измерения. Это всегда подразумевается, когда ставится вопрос о вероятности данного события. Если дисперсия прибора равна нулю (см. A_2), то, конечно, он даст некоторое значение l из спектра переменной L. Если измерение повторяется, результаты могут не повторяться, а каждое значение будет получаться с некоторой частотой, соответствующей вероятности $W(\widetilde{l})$. Как отмечено, каждая величина в каждый момент имеет много значений. После измерения состояние системы меняется в зависимости от полученного результата. Это не означает (как иногда утверждают), что объективно каждая величина в каждый момент имеет определенное значение. Но нельзя узнать значение всех величин из-за возмущающего действия прибора. Итак, измерительные приборы, применяемые в классической физике для нахождения значений динамических переменных, можно использовать и для микросистем. Они всегда дают определенные результаты, так что можно говорить о координатах, скоростях, импульсах, энергии и т. д. одной микрочастицы. Разница в том, что, согласно классической физике, если сделано несколько измерений одной и той же величины в очень близкие моменты, результаты (или их вероятностные распределения, если приборы нехороши) тоже очень близки, независимо от того, сделаны ли были в промежутках другие измерения или нет. Согласно квантовой теории, для микросистем это возможно только в том случае, если в промежутках не были сделаны измерения другими приборами. (C_6). Это утверждение не только странно, но и невыгодно. Когда Планк впервые высказал свою гипотезу о квантовании и, пользуясь ею, объяснил спектр черного излучения, его современник физик Вихерт возразил: — «Да, но какою ценой!». И все же идея развивалась и давала результаты. Другое объяснение фактов атомного мира до сих пор не найдено.

Спектры возможных значений физических величин могут быть дискретные, непрерывные и смешанные. Есть величины, например, координаты и импульсы частиц, спектры которых охватывают все вещественные числа. Возможен случай, когда в заданном состоянии системы и в заданный момент от нуля отлична вероятность только для одного значения данной динамической переменной и, следовательно, эта переменная будет обладать только одним значением, как и в классической физике. Однако, это исключительные частные случаи; общее правило (B_5) остается таким, каким мы его сформулировали. Когда отбросили постулат классической физики и ввели понятие о вероятности процесса, утверждение о том, что результат любого эксперимента может быть теоретически найден из начальных условий, тоже теряет свою силу. Следовательно, какую бы информацию о движении микросистемы при $t = t_0$ или даже при $t \leqslant t_0$ мы ни имели, согласно квантовой механике, нельзя однозначно предсказывать результат любого опыта при $t > t_0$. Это утверждение характерно для квантовой теории, которая пока единственная в состоянии объяснить атомные явления. Но, как отмечалось, эти явления непосредственно не наблюдаются. Нельзя, например, взять электрон и проверить, имеет ли он или не имеет в данный момент определенное положение, скорость, спин, магнитный момент и т. д., как это делают с обыкновенными телами. Поэтому в принципе могут быть разные теории, объясняющие результаты современного опыта, и никто не может доказать, что квантовая теория, как бы хорошо она ни объясняла атомные процессы, единственно правильная и что никакой другой теории не будет. Следовательно, можно лишь утверждать, что принцип неопределенности неразрывно связан с квантовой теорией, которая на современном этапе одна способна объяснить особенности атомных процессов. Однако ничего нельзя сказать насчет того, останется ли это утверждение навсегда или, наоборот, оно—временное несовершенство теории, которое будет преодолено. (C_7).

Чтобы охарактеризовать состояние, для каждой микросистемы S вводится абстрактное функциональное гильбертово пространство H (конфигурационное пространство) и состояние задается одним нормированным к единице комплексным вектором — вектором состояния ψ

$$|\psi|^2 = 1. \qquad (3)$$

Что касается информации, она задается одним семейством таких векторов, тоже нормированным к единице:

$$\sum_k |\psi_k|^2 = 1. \qquad (4)$$

При этом число измерений пространства H вообще бесконечно. Параметр k вообще многокомпонентная величина, компоненты которой могут принимать дискретные и непрерывные значения. Символ $\sum_k$ по общей договоренности означает суммирование по дискретным и интегрирование по непрерывным значениям компонент k. Чтобы два семейства векторов ψ'_k и ψ''_l представляли одну и ту же информацию, они не должны совпадать. Пусть ψ любой вектор в пространстве H, а ψ'_i и ψ''_j, (i, j - параметры) — векторы среди ψ'_k и ψ''_l, которые колинеарны вектору ψ. По определению, чтобы ψ'_k и ψ''_l представляли одну и ту же информацию, необходимо и достаточно выполнение равенства $\sum_i |\psi'_i|^2 = \sum_j |\psi''_j|^2$ при каждом ψ. Информации ψ'_k и ψ''_l, обладающие этим свойством, назовем эквивалентными. (A_6). Следовательно, все векторы определены до некоторого множителя $e^{i\varphi}$ модулем, равным 1, причем вообще φ зависит от k. Если среди векторов ψ_k имеются такие, которые отличаются друг от друга комплексным множителем, можно заменить их одним вектором, им колинеарным, норма которого равна сумме норм исходных векторов. Если все векторы семейства ψ_k колинеарны, т. е. если семейство эквивалентно семейству с одним элементом ψ, мы будем называть информацию полной. (A_7). В ином случае она частична. Эти два случая соответствуют случаям чистого и смешанного ансамблей [1]. (C_8).

Как в классической, так и в квантовой теории можно исходить либо из состояния S, либо из информации I. В классической физике более удобно написать уравнения движения для состояния, а потом, если нужно, рассмотреть вопрос о том, как вероятностное распределение значений динамических переменных меняется во времени. В квантовой теории это не так, потому что содержание понятия состояния там беднее. Определение понятия состояния (A_4) вообще применимо как в классической, так и в квантовой теории, хотя, и вследствие различия в принципах этих теорий, величины, характеризующие состояния, разные. Как в классической, так и в квантовой тео-

[1] Д. И. Блохинцев. Основы квантовой механики. М., ГИВШ, 1961, стр. 51.

рии состояние объективно, т. е. два наблюдателя, исходя из своих данных, не могут определить по-разному состояние рассматриваемой системы в заданный момент. Но что касается утверждений (C_2), (C_3) и (C_5), которые и раскрывают значение понятия состояния, то в квантовой теории они не имеют места. Только утверждение (C_3) сохраняет свою силу, если внешняя система является макросистемой. Кроме того, мы увидим, что любое измерение нехорошим прибором и любое измерение хорошим прибором, когда результат измерения неизвестен, ухудшают информацию. Дело в том, что если состояние до момента измерения было известно, то после измерения оно не будет однозначно определено. Поэтому в квантовой теории более целесообразно работать не с состоянием, а с информацией о нем. Эта величина более сложна, потому что она зависит не только от объективного движения системы, но и от того, что о нем задано. При разных условиях у разных наблюдателей могут быть заданы разные информации. Пользоваться не состоянием, а информацией лучше, во-первых потому, что все принципы формулируются проще, во-вторых, потому что состояние может быть не вполне известным, а информация всегда задана, в-третьих, как мы увидим, строго говоря, существует лишь состояние всей материи в мире, а о состояниях отдельных частиц или отдельных систем частиц можно говорить только приблизительно. Так как всегда рассматриваются отдельные частицы или отдельные системы частиц, понятие состояния в квантовой теории менее важно, чем в классической физике. Согласно последней, можно говорить о состоянии каждой отдельной материальной системы, несмотря на то, свободна ли она или взаимодействует, и где состояние сложной системы определяется состояниями ее составных подсистем (C_9) (см. C_5, C_{12} и C_{22}).

Принимается, что до того, как было сделано измерение над системой, информация о ее состоянии характеризуется некоторым семейством ψ_k^0 — первоначальная информация получена косвенным путем, аналогичная априорному распределению вероятностей, которое вводится в теорию вероятности причин [1].

[1] Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М., ГИТТЛ, 1961, стр. 367.

Принимается, что векторы Ψ_k вообще зависят от времени t. Если система S изолирована или находится под действием тел, движение которых задано, каждый из этих векторов удовлетворяет определенному уравнению — волновому уравнению или уравнению Шредингера, дающему возможность, зная значение ψ_k^0 в заданный момент t_0 найти значение ψ_k в любой другой момент t:

$$\psi_k(t) = T(t, \psi_k^0). \tag{5}$$

При этом оператор T выбран так, чтобы условие нормировки (2) сохранялось. (B_6).

Далее считается, что каждой динамической переменной L соответствует линейный эрмитовский оператор в H, который обозначен буквой L, причем собственные значения этого оператора, которые всегда вещественны, являются возможными значениями переменной L.(B_7). Собственные векторы, соответствующие каждому собственному значению l оператора L, составляют некоторое линейное подпространство $\varphi^L(l)$ в H, размерность которого равна кратности собственного значения l.

Каждой динамической переменной L соответствует измерительный прибор S_L. (B_8). Он представляет систему из микро- и макротел, так что под действием исследуемой системы S в зависимости от ее состояния макротела прибора меняют значения своих динамических переменных. Их можно непосредственно измерить (см. B_4) и таким путем прибор дает нам информацию о значении l переменной L системы S в момент измерения t. Приборы не идеальны, во-первых, потому, что значения динамических переменных, относящихся к макротелам прибора, определяются с некоторой ошибкой и, во-вторых, потому, что каждому состоянию микротел прибора вообще не соответствует единственное значение l переменной L. Рассмотрим пример. Электрон проходит через щель. Положение щели определяется с возможной точностью, и это ведет к некоторой ошибке в определении положения электрона; даже если положение щели известно точно, из-за ее конечной ширины положение электрона точно не определяется. Ситуация та же, если определять положение электрона по почернению зерна фотоэмульсии — положение зерна определяется с некоторой ошибкой, а оно само определяет положение электрона с точностью до его размеров. Первая ошибка характеризуется неотрицательной функцией $Q\ (\widetilde{l},l')$, вторая ошибка — комплексной функцией $R\ (l',l)$. Они нормированы:

$$\sum_{\widetilde{l}} Q\,(\widetilde{l},\,l')^2 = 1, \quad \sum_{l} /R\,(l',\,l)/^2 = 1.$$

Эти функции аналогичны функции $P\ (\widetilde{l})$. Если $Q(\widetilde{l},l')^2 = \delta(\widetilde{l}-l')$, мы назовем прибор хорошим, если, кроме того, $|R(l',l)|^2 = \delta\,(\widetilde{l}-l)$, то назовем его совершенным. (A_8). Эти функции характеризуют обычную классическую и квантово-теоретическую дисперсии прибора. Первая не очень существенна — она введена, чтобы подчеркнуть разность между двумя дисперсиями. Вторая более существенна, потому что при ее помощи можно, во-первых, отказаться от использования таких ненормируемых функций состояния, как $\delta(x-x_0)$ и e^{ipx}, и, во-вторых, объяснить частичное сохранение прежней информации после данного измерения, что, например, дает возможность говорить о приблизительной траектории частицы в камере Вильсона.

Квантовая теория должна ответить на следующие два вопроса.

1. Найти вероятность того, чтобы измерение дало результат $\widetilde{l}$, считая заданной информацию Ψ_k^- о состоянии системы непосредственно перед моментом измерения t.

2. Найти информацию ψ_k^+ непосредственно после измерения, считая известным результат $\widetilde{l}$ (C_{10}).

Ответ на поставленные вопросы довольно прост и хорошо известен, если а) измерительные приборы совершенны, (см. A_8); б) все собственные значения l всех операторов L простые и в) информация до опыта полна (см. A_7), т. е. семейство ψ_k^- содержит только один элемент ψ^-. Обозначим через $\varphi^L(l)$ множество собственных векторов оператора L, соответствующих собственному значению l. Ввиду второго условия в конфигурационном пространстве H это будет прямая линия, проходящая через начало координатной системы. Обозначим через $\psi^L(l)$ проекцию вектора ψ^- на линию $\varphi^L(l)$, так что

$$\psi^- = \sum_l \psi^L(l).$$

Тогда вероятность получить значение $l\ (l = \tilde{l})$ будет

$$W(l) = |\psi^L(l)|^2, \tag{6}$$

причем, имея ввиду (4), получаем $\sum\limits_l W(l) = 1$, а информация о состоянии системы после опыта будет задаваться вектором

$$\psi^+ = c\psi^L(l), \tag{7}$$

причем множитель c выбран так, чтобы условие нормировки (4) выполнялось. Ввиду (6) ясно, что если опыт дал результат l, то $\psi^L(l) \neq 0$ и, следовательно, c определяется однозначно до несущественного множителя $e^{i\varphi}$.

Отбросим упомянутые ограничительные условия. Пусть ψ_k^- — информация перед опытом. Обозначим посредством $\psi_k^L(l)$ проекцию вектора ψ_k^- на $\varphi^L(l)$. Множество $\varphi^L(l)$ будет линейным подпространством в H, число измерений которого равно кратности собственного значения l. Очевидно, что проекция $\psi_k^L(l)$ однозначно определена при заданных k и l и ввиду (4) удовлетворяет условиям

$$\psi_k^- = \sum_l \psi_k^L(l), \quad \sum_{k,\,l} |\psi_k^L(l)|^2 = 1.$$

Положим

$$\tilde{\psi}_{k+}(\tilde{l}) = \tilde{\psi}_{k,\,l'}(\tilde{l}) = \sum_l Q(\tilde{l},\, l')\, R(l',\, l)\, \psi_k^L(l) \tag{8}$$

$$(k^+ = (k,\, l'))$$

Тогда в качестве ответа на первый вопрос принимаем, что

$$W(\tilde{l}) = \sum_{k+} |\tilde{\psi}_k{}^+\ (\tilde{l})|^2, \tag{9}$$

причем, имея в виду (4), получаем

$$\sum_{\tilde{l}} W(\tilde{l}) = \sum_{\tilde{l},\,k,\,l',\,l,m} Q^2(\tilde{l},\, l')\, R(l',\, l)\, \psi_k^L(l)\, R(l',\, m)^*\, \psi_k^L(m)^* =$$
$$= \sum_{\tilde{l},\,k,\,l',\,l} Q^2(\tilde{l},\, l')\, |R(l',\, l)|^2\, |\psi_k^L(l)|^2 = 1.$$

Ответ на второй вопрос можно найти из равенства

$$\psi^{+}_{k+} = c\widetilde{\psi}_{k+}(\widetilde{l}), \tag{10}$$

причем нормирующий множитель c определяется из условия

$$\sum_{k+} |\psi^{+}_{k+}|^2 = 1 \ (B_9).$$

При этом выполнен ряд общих требований. Если условия а), б) и в) выполнены, выражения (6) и (7) получаются по общим правилам соответствующими граничными переходами. Затем проверяют, что выражение $\sum_{k+} |\widetilde{\psi}_{k+}(l)|^2$ отлично от нуля, так что множитель C однозначно определяется (с точностью до несущественного множителя $e^{i\varphi}$). Многократное измерение данной величины нехорошим прибором (см. A_8) эквивалентно однократным измерениям хорошим прибором. Эквивалентные информации ψ^{-}_{k} ведут к одинаковому результату (9) при любом L. Множество векторов ψ^{+}_{k+} после совершения любого опыта увеличивается, так как k заменяется на $k^{+} = (k, l')$, но оно может и уменьшаться, если среди функций $\psi_{k+}(\widetilde{l})$ имеются колинеарные. Такое уменьшение на самом деле получается, если измерительные приборы совершенны, так как тогда все векторы $\widetilde{\psi}_{k+}(\widetilde{l})$ принадлежат подпространствам $\varphi^{L}(l)$ при $l = \widetilde{l}$, даже если векторы ψ^{-}_{k} были распределены по всем направлениям в пространстве H. Вообще следует считать, что чем меньше дисперсия вероятностного распределения $W(\widetilde{l})$, тем полнее была информация. Тогда из (9) видно, что полная информация, характеризуемая только вектором ψ, дает наименьшую дисперсию. Следовательно, имея ввиду определение (A_2), получаем, что состояние системы характеризуется именно одним вектором ψ.

Выберем комбинацию наблюдаемых величин $L_n (n = 1, 2, \ldots N)$, операторы которых L_n коммутируют между собой и при этом каждой последовательности их собственных значений l_n ($n = 1, 2, \ldots N$) соответствует не больше одного общего собственного вектора. Такие наборы динамических переменных называются полными. Предполагается, что каждому линейному эрмитовскому оператору L в пространстве H соответствует определенная динамическая переменная, которую можно измерить при помощи измерительного прибора, так что имеется неограниченное количество полных наборов динамических переменных. Как известно, совокупность собственных векторов, которая получается при всех выборах l_n, является полной системой векторов в пространстве H. Если измерительные приборы совершенны, информация ψ_k, получаемая после измерения всех величин данного полного набора, является полной и не будет зависеть от выбора первоначальной информации. (C_{11}). Этот результат важен, потому что, как и в теории вероятностей a posteriori, практически неясно, как определить первоначальную информацию ψ_k^0. Тот же результат получается и при помощи несовершенных приборов, но тогда необходимо повторять каждое измерение много раз.

Существенным пунктом в приведенной трактовке является рассмотрение всего вопроса без использования условий а), б) и в). Показано, как получить информацию после того, как сделано измерение несовершенным прибором. Мы пользуемся не коэффициентами разложения, а проекциями векторов ψ_k^- на подпространства $\varphi^L(l)$. В принципе это несущественно, но так все получается более просто. Что касается характеристики информации, мы предпочли также (из соображений упрощения) пользоваться одним нормированным семейством векторов, а не, как обычно делается, одним семейством нормированных векторов и их весами.

Эти общие основные утверждения квантовой теории недостаточны, чтобы однозначно решить каждую конкретную задачу динамики микросистем, так же, как и общие принципы динамики Ньютона недостаточны, если нет конкретных выражений для действующих сил. Необходимы добавочные правила, чтобы определить следующее: выбор конфигурационного пространства H, конкретный вид оператора L, соответствующего каждой динамической переменной, конкретный вид уравнения Шредингера (5) и форму первоначальной информации ψ_k^0.

Существуют общие правила, позволяющие однозначным образом разрешить все эти вопросы для любой микросистемы, имеющей классический аналог, т. е. для системы, которую имело бы смысл рассматривть по законам классической физики, точнее при помощи уравнений Гамильтона, несмотря на то, что материальные константы для нее очень малы и теоретические результаты могут не соответствовать опыту. Для простоты ограничимся квантово-механическими системами материальных точек.

При микросистемах этого типа в качестве конфигурационного пространства H принимается пространство всех нормируемых комплексных волновых функций $\psi(x)$ (B_{10}). Следовательно, информация о состоянии задается одним семейством таких функций, зависящим и от времени t и нормированным к единице при любом t:

$$\sum [\psi_k(t, x)]^2 = 1. \tag{11}$$

Из этого конфигурационное пространство сложной микросистемы $S = S' + S'' + \ldots$ является топологическим произведением пространств составляющих систем: $x = (x', x'', \ldots)$. (C_{12}).

Что касается второго вопроса, принимается, что оператором, соответствующим координате x, является простое умножение на x, а оператором, соответствующим импульсу p,— дифференцирование по соответствующей координате x и умножение на $-i\hbar$ ($\hbar = h/2\pi$). Вообще, чтобы получить оператор, соответствующий любой динамической переменной L, необходимо сначала выразить эту переменную через канонические переменные x и p, а может быть и времени $t : L = L(t, x, p)$ (это можно сделать, так как, по предположению, микросистема имеет классический аналог), а потом заменить p на $-i\hbar \frac{d}{dx}$, т. е.

$$L = L\left(t, x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{12}$$

При этом возникает некоторая неопределенность, связанная с тем, что операторы x и $-ih \frac{d}{dx}$ не коммутируют.

Каждой классической динамической переменной соответствуют много операторов, получаемых один от другого перестановками x и $-i\hbar\frac{d}{dx}$. Например, переменной xp и px соответствуют операторы $-i\hbar x\frac{d}{dx}$ и $-i\hbar\frac{d}{dx}x$, которые, очевидно, не одинаковы. Во избежание этой неопределенности можно нормализовать произведение, например принимая, что величине

$$L=\sum_{m,\,n} a_{m,n}\,x^m p^n\;(m,\,n=0,\,1,\,\ldots)$$

соответствует оператор

$$L=\sum_{m,\,n} a_{mn}\frac{1}{2}\left(x^m(-i\hbar)^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}+(-i\hbar)^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}x^m\right),$$

причем, очевидно, условие эрмитовости соблюдено. (B_{11}). Возникает и другой вопрос — инвариантна ли теория по отношению к любой трансформации канонических переменных. Ответ на этот вопрос пока еще не ясен.

Далее, чтобы получить ответ на третий вопрос, достаточно в функции Гамильтона $E=H\;(t,\,x,\,p)$, выражающей энергию системы посредством координат и импульсов и, может быть, времени, заменить E и p на $i\hbar\frac{d}{dt}$ и $-i\hbar\frac{d}{dx}$ и полученное операторное равенство применить к $\psi_k\;(t,\,x)$ при любом k, т. е.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\left(t,\,x,\,-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi. \tag{13}$$

Это уравнение Шредингера должно иметь место, когда система S изолирована или находится под действием тел с заданным движением. (B_{12}). Уравнение (13) линейное, однородное уравнение с частными производными первого порядка по отношению к t, так что, зная ψ_k при $t=t_0$, можно определить ψ_k в любой более поздний или более ранний момент t, как требует (B_6). Эрмитовость оператора H обеспечивает сохранение нормировки (4) при любом t.

Что касается четвертого вопроса, здесь, как и при определении априорной вероятности в проблеме вероятности a posteriori, существует значительный произвол, влияние которого уменьшается по мере накопления новых опытных данных. В качестве примерного ответа можно принять, что первоначальное распределение векторов ψ_k^0 или, что все равно, функций $\psi_k^0\,(x)$, изотропно по всем комплексным направлениям пространства $H(B_{13})$. Смысл этого утверждения следует уточнить, так как пространство H бесконечномерно. Примем сначала, что координаты x меняются не непрерывно от $-\infty$ до $+\infty$, а что каждая из них может принять только M равностоящих значений с разностью ε. Если m — число координат, характеризующих рассматриваемую систему и если $N = M^m$, то конфигурационное пространство будет N-мерным. Обозначая через n любое сочетание возможных значений координат x и имея в виду, что компоненты $\psi_n = \psi^\circ(x_n)$ вектора ψ комплексны, определяем, что каждый вектор можно представить одной стрелкой в некотором вещественном пространстве $2N$ измерений. Нормировка вектора будет равна

$$\sum_n (\mathrm{Re}^2\,\psi_n + \mathrm{Im}^2\psi_n).$$

Если в качестве параметра k возьмем вещественные и мнимые части каждой компоненты ψ_n, то k будет иметь $2\ N$ компонент, каждая из которых изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, семейство ψ_k^0 будет семейство всех векторов ψ, компоненты которых изменяются произвольно. Плотность этих векторов мы зададим некоторым неотрицательным функционалом D самого вектора ψ, например,

$$D(\psi) = \left(\frac{a}{\sqrt{\pi}}\right)^{2N} e^{-a^2(\psi)^2}, \tag{14}$$

так что условие нормировки выполняется

$$\sum_k \left(\psi_k^0\right)^2 = \int D(\psi)\, d\,\mathrm{Re}\,\psi_n\, d\,\mathrm{Im}\,\psi_n = 1.$$

Далее следует совершить граничный переход $M \to \infty$, $\varepsilon \to 0$. Совершить его в уравнении (14) невозможно, но это не мешает, так как сначала можно подставить выражение для D (ψ) при конечных M и ε в уравнения (9) и (10) и потом совершить переход $M \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$. Имея в виду, что амплитуда Фурье функции (14) — функция того же типа, получаем, что не только все координаты, но и все импульсы частиц оказываются одинаково вероятными. Это, конечно, не единственный возможный ответ на четвертый вопрос. Если имеются соображения о непрерывности функций $\psi_k^0(x)$ или о том, что некоторые координаты или импульсы частиц более вероятны, чем другие, следует выбрать менее симметричные, но более конкретные первоначальные распределения векторов ψ_k^0 (x).

Выбор всех этих правил — это плод долгого исторического развития. Они не так искусственны, как могло бы показаться на первый взгляд. Они выбраны так, что, с одной стороны, для функции $\psi_k(t, x)$ получится выражение типа оптической волновой функции, дающее возможность объяснить волновые свойства потоков из микрочастиц, а с другой — получится дискретный спектр собственных значений для энергии, момента количества движения и т. д., как требует опыт. Этим способом квантовая теория разрешает в принципе оба типа трудностей, стоящих перед классической физикой, о которых уже говорилось. Кроме того, они выбраны так, чтобы соблюдалось так называемое условие перманентности, или принцип соответствия. Это означает, что если применить теорию при $h \to 0$ или (что все равно), если применить ее к системам из макротел с большими массами; результаты квантовой механики должны стремиться к результатам классической физики. В целом все сделано так, чтобы результаты возможно лучше соответствовали действительности.

Есть две классические (неквантовые) механики — ньютоновская классическая механика и теория относительности Эйнштейна, различающиеся по выбору гамильтониана и вообще по связям между величинами. Следовательно, должны быть и две квантовые теории — нерелятивистская и релятивистская, причем первая должна быть более простым приближением второй. Например, исходя из соответствующих связей энергии с импульсом

$$E = \frac{1}{2m} p^2 + V(x), \tag{15}$$

и

$$(E - eU)^2 - c^2 (p - eA)^2 = m^2 c^4, \tag{16}$$

по общим правилам квантования мы получаем соответственно

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x)\right) \psi \tag{17}$$

и

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eU\right) \psi = \left(m^2 c^4 + c^2 \left(ih \frac{\partial}{\partial x} + eA\right)^2\right)^{1/2} \psi, \tag{18}$$

причем $V(x)$ — потенциальная энергия, U и A — электрический и магнитный потенциалы поля, в котором движется частица. При этом символ $L^{1/2}$, где L — эрмитовский оператор с неотрицательными собственными значениями, подразумевается в смысле этого же оператора, но квадрат его равен L. Так, все собственные значения кинетической энергии оказываются положительными, а условие нормировки сохраняется во времени. Однако, хотя и уравнение (16) релятивистски инвариантно, уравнение (18) релятивистски не инвариантно, поэтому переход из нерелятивистской к релятивисткой теории не так прост[1]. Как известно, Дирак первый написал релятивистски инвариантное волновое уравнение

$$\frac{1}{c}\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eU\right) \psi = \alpha \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + eA\right) \psi + \beta mc\psi, \tag{19}$$

причем α и β — матрицы Дирака, а ψ — четырехкомпонентная волновая функция — биспинор. Каждому решению уравнения (18) соответствуют четыре линейно независимые решения уравнения (19). Это означает, что у частицы, описываемой уравнением (19), имеются внутренние степени свободы. Уравнение (19) описывает сразу частицы двух знаков заряда (частицы и античастицы), каждая из которых может вращаться вправо или влево вокруг направления своего поступательного движения,

[1] I. Sucher. Journ. of Math. Phys., 4, 1963, p. 20.

На базе изложенной теории удалось объяснить практически все явления в атомной оболочке, химические связи, свойства газов, жидкостей и твердых тел. Однако она оказалась не в состоянии объяснить специфику различных элементарных частиц и их взаимную превращаемость, которая наблюдается при очень больших энергиях. Чтобы объяснить и чтобы более симметричным образом представить взаимодействие и единство частиц и полей, позднее была создана квантовая теория полей. Она основана на двух идеях. Во-первых, релятивистское волновое уравнение, которое является уравнением второго порядка по времени, заменяется одной системой уравнений первого порядка типа уравнений Дирака. Оказалось, что это можно сделать разными способами. В результате получается уравнение для разных элементарных частиц. Во-вторых, все волновые функции заменяются операторами, действующими в еще более абстрактном и многомерном конфигурационном пространстве, где вектор состояния заменяется так называемой амплитудой состояния φ. Эта теория, называемая вторичным квантованием, квантовой теорией полей или теорией элементарных частиц, достигла замечательных успехов. Очень хорошо подтверждаются так называемые дисперсионные соотношения. Особенно выделяется объяснение так называемого лэмбовского сдвига и аномального магнитного момента электрона. Речь идет об очень слабых, порядка миллиардных долей длины волны, смещениях спектральных линий у некоторых элементов. Учитывая эти изумительные достижения теории полей, нельзя не признать, что в ней должна содержаться значительная доля истины и что она является величайшим достижением человеческой мысли. Мы не будем заниматься ею, потому что она чрезвычайно сложна, а проблемы ее последовательного обоснования еще более трудны.

После изложения основ квантовой теории, выведем некоторые интересные следствия и покажем, что некоторые дискуссионные вопросы получают объяснение, а также укажем и на нерешенные проблемы.

Из правил квантования получается, что можно определить семейство волновых функций $\psi_k(t, x)$ так, чтобы вероятность $W_x(a)$ того, что координата x имела значение a существенно отличается от нуля только в некоторой окрестности Δx единственного значения a. Дисперсия Δx является мерой неопределенности при нахождении x. При этом подходящим выбором $\psi_k(t, x)$ можно сделать неопределенность Δx сколь угодно малой. Аналогичное утверждение справедливо и по отношению к неопределенности Δp импульса p. Однако дальше невозможно определять $\psi_k(t, x)$ так, чтобы Δx и Δp одновременно становились сколь угодно малыми. Если выберем $\psi_k(t, x)$ так, чтобы Δx уменьшалось неограниченно, то обязательно Δp будет увеличиваться и наоборот. При этом всегда будет неравенство

$$\Delta x \Delta p \geqslant h, \tag{20}$$

дающее количественную меру неопределенности (см. B_5) (C_{13}). Это соотношение обобщается для любой пары канонически сопряженных динамических переменных. Оно применимо также к времени и энергии, но смысл полученного соотношения иной, чем в уравнении (20) [1]. Сделаем опыт одновременного определения x и p одной частицы в заданном состоянии или, точнее говоря, совершим серию измерений x и p в один и тот же момент над частицами, полученными одним и тем же способом. Если дисперсии значений для x и p окажутся меньше, чем по уравнению (20), то это означает, что квантовая теория неверна или, по крайней мере, неполна, т. е. что она не использует всю информацию, которую дает нам опыт. Таких результатов, конечно, нет. Иногда рассматривают мысленные эксперименты, например, при помощи микроскопа Гейзенберга или дифракционной решетки, целью которых является показать, что точность наших приборов не превышает точности определяемой по уравнению (20). Эти рассуждения неполны — там рассматриваются не все приборы. Они и неубедительны — там микрочастицы рассматриваются как волны или как обычные частицы, имеющие координаты и скорости, которые нельзя определить одновременно из-за неконтролируемого возмущающего действия приборов. Эти рассуждения, на наш

[1] В. А. Фок. ЖЭТФ, 42, 1962, стр. 1135.

взгляд, и не нужны. Любой теоретический результат подлежит опытной проверке, но для этого нужны реальные, а не мысленные эксперименты. Мысленным экспериментом можно обнаружить логическое противоречие, но такого, очевидно, нет.

Уравнение неопределенности (20) относится к теоретическому предсказанию, а не к точности отдельного эксперимента. В принципе можно иметь приборы неограниченной точности как для измерения x, так и для p. Отличие по сравнению с классической физикой только в том, что хотя и каждый отдельный результат точен, при многократном измерении должны получиться разбросы, удовлетворяющие уравнению (20). Наличие этих разбросов не означает, что мы плохо измеряли x или p. У микрочастиц x и p объективно не имеют определенных значений (см. B_5).

Подставляя в (20) $\Delta p = m\Delta v$, где v — скорость микрочастицы, получаем $\Delta x \frac{\Delta v}{v} > \frac{h}{mv}$. Отсюда видно, что относительная неопределенность скорости, т. е. расплывчатость траектории тем сильнее, чем меньше скорость, а имея ввиду чрезвычайную малость константы h ясно, что неопределенность будет заметна только у атомных частиц, массы которых малы. У обычных тел эта неопределенность так мала, что она далеко перекрывается неизбежной технической ошибкой даже наилучших современных приборов. Все же это не означает, что движение макротел можно рассматривать по законам квантовой теории. Как указывалось раньше (см. B_5), формулировка законов квантовой теории и ее связь с опытом таковы, что они теряют смысл, если нет макроприборов, дающих информацию о микропроцессах. Составными частями этих приборов должны быть макротела, динамические переменные которых в каждый момент должны иметь определенные значения, чтобы мы могли произвести точные отсчеты. При этом приборы должны быть достаточно чувствтельными, чтобы они могли реагировать на воздействие исследуемых микрочастиц (C_{14}). Такое разделение форм материи на макротела и микрочастицы, очевидно, неудовлетворительно с философской точки зрения, но более единой теории нет. При этом разделении форм материи возникает вопрос о взаимодействии между телом и частицей. Воздействие тел на частицы ясно — оно описывается включением в гамильтониан микрочастиц тех силовых полей, которые тела создают и в которых частицы двигаются. Но вопрос о механизме воздействия частиц на тела совершенно не затронут, хотя и он важен для создания замкнутой теории всех процессов.

В квантовой теории считается, что каждой динамической переменной соответствуют приборы, дающие возможность определить ее значение в любой момент точно или с некоторой ошибкой. А так как в квантовой теории предполагается, что все составлено из тел и частиц, то ясно, что эти приборы должны представлять системы из тел и частиц. Их устройство должно быть таким, чтобы в зависимости от состояния исследуемой микросистемы в приборе происходили разные процессы и в конечном счете макротела прибора изменяли свои динамические переменные. Значения динамических переменных макротел можно измерять и делать выводы о состоянии микросистем. Следовательно, измерительный прибор осуществляет конечное (неисчезающе малое) воздействие микрочастиц на макротела, но законы этого воздействия, как мы отметили, неизвестны. Это означает, что вопрос об устойчивости и действии прибора нельзя решить до конца. Попытаемся указать на некоторые свойства приборов и обратным путем найти некоторые особенности воздействия частиц на тела, исходя из общих свойств приборов, которые мы предположили, формулируя принципы квантовой теории.

Посмотрим, как изменяется информация ψ_k после того, как в системе произведено измерение некоторой динамической переменной при помощи данного прибора и задан полученный результат. Изменится ли информация, если измерение сделано, но результат неизвестен? Если да, то как? Возьмем пример. Мы имеем микрочастицу, падающую на фотопленку в момент t. Событие регистрируется почернением соответствующего зерна фотоэмульсии. Так мы определяем координаты микрочастицы в момент t с точностью до размеров зерна. По указанным правилам (см. B_7), определяем информацию после опыта ψ_{k+}^{+}, зная информацию до опыта ψ_k^- и результат $\widetilde{l}$ самого опыта. Какова же будет информация ψ, если эксперимент сделан, но пленка не проявлена или проявлена, но результат $\widetilde{l}$ не объявлен. Мы не можем считать ψ равной ψ_{k+}^{+} потому, что ψ_{k+}^{+} зависит от результата $\widetilde{l}$, а он неизвестен. Считать, что ψ осталась ψ_k^- тоже нельзя, потому что взаимодействие частицы с прибором фактически произошло. Искомая информация должна быть такой, чтобы при дополнении ее результатом измерения $\widetilde{l}$, она превратилась в ψ_{k+}^{+}, а вероятность получения результата $\widetilde{l}$ задавалась посредством уравнения (9). Этими требованиями искомое семейство однозначно определено.

$$\overline{\psi} = \overline{\psi}_{k,\, l',\, \widetilde{l}} = \widetilde{\psi}_{k,\, l'}^{L}(\widetilde{l}) \tag{21}$$

[см. уравнение (8)]. Условие нормировки (4) легко проверяется

$$\sum_{k,\, l',\, \widetilde{l}} |\overline{\psi}_{k,\, l',\, \widetilde{l}}|^2 = \sum_{\widetilde{l}} W(\widetilde{l}) = 1.$$

Этот результат следует из общей теории: если $W(p,\ q)$ — вероятностное распределение величин p и q $\left[\sum\limits_{p,q} (p,\ q) = 1\right]$, то вероятность того, что для p получится значение p_0, задается посредством $U(p_0) = \sum\limits_q W(p_0,\ q)$, а распределение величины q после получения этого результата есть $V_{p0}(q) = c\ W(p_0,\ q)$, причем c определяется условием нормировки $\sum\limits_q V_{p0}(q) = 1$. При этом вероятности $U(p_0)$ и $V_{p0}(q)$ определяют однозначно $W(p,\ q)$. Задача нахождения ψ из $W(\widetilde{l})$ и ψ_{k+}^{+} соответствует задаче найти $W(p,\ q)$ из $U(p_0)$ и $V_{p0}(q)$ — разница только в том, что здесь мы характеризуем процессы не вероятностями, а их амплитудами ψ_k.

Итак, прибор S_L, рассматриваемый как материальная система, взаимодействует с исследуемой микросистемой S, так что непосредственно после взаимодействия семейство векторов состояния ψ_k расщепляется на $\overline{\psi}_{k,l',\widetilde{l}}$ — семейство, у которого на два параметра больше, чем у ψ_k. Только после получения результата $\widetilde{l}$, оно снова суживается в семейство $\psi_{k,l'}^{+}$, у которого на один параметр больше, чем у ψ_k (C_{15}). Это расщепление, т. е. это ухудшение информации, получается, когда прибор действует, а результата нет, какую бы информацию о состоянии системы мы ни имели до момента измерения.

Подобные результаты отмечаются также, когда микросистема S взаимодействует с микросистемой S'. Пусть ψ_0 (x) и ψ_0' (x') — векторы состояния этих систем в заданный момент t_0. Для простоты информации о S и S' считаем полными (см. A_7). Согласно сказанному о конфигурационном пространстве сложной системы (см. C_5), волновая функция $\overline{\psi}$ (t, x, x') системы $\overline{S} = S + S'$ будет удовлетворять уравнению типа

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \overline{\psi} = \overline{H}\overline{\psi} \tag{22}$$

при начальном условии

$$\overline{\psi}(t_0, x, x') = \psi_0(x) \psi_0'(x'). \tag{23}$$

Если взаимодействия нет, т. е. если $\overline{H} = H + H'$, то ясно, что соотношение (23) будет сохраняться в любой момент

$$\overline{\psi}(t, x, x') = \psi(t, x) \psi'(t, x'), \tag{24}$$

причем ψ (t, x) и $\psi'(t, x')$ удовлетворяют уравнениям

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi \quad \text{и} \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi' = H'\psi'.$$

Информация о системах S и S' в любой момент t, очевидно, будет задаваться функцией $\overline{\psi}(t, x, x')$, которую можно рассматривать как семейство функции типа ψ (t, x) с параметром x', а также и как семейство функции типа ψ' (t, x') с параметром x. (C_{16}). Но имея в виду соотношение (24) и определение эквивалентности информаций (см. A_6), ясно, что все векторы каждого из этих семейств колинеарны и, следовательно, они эквивалентны функциям ψ (t, x) и ψ' (t, x'). Это означает, что в этом случае расщепления семейств состояния систем S и S' нет. Однако этот результат теряет силу, если есть взаимодействие. Тогда соотношение (24) не имеет места. Информация о S и S' будет опять задаваться функцией $\overline{\psi}(t, x, x')$, которую можно рассматривать как семейство функций типа $\psi(t, x)$ и соответственно типа $\psi'(t, x')$, но элементы каждого из этих семейств больше не будут колинеарными и расщепление получится. Согласно (22) и (23) это расщепление обусловлено начальной информацией о системах S и S' и законом их взаимодействия $\overline{H}$.

Какая причина расщепления состояния системы S_L, когда она взаимодействует с прибором S_L? Может быть взаимодействие S с микрочастицами, входящими в состав прибора S_L, или, возможно, взаимодействие этих микрочастиц с макротелами прибора. Покажем, что правильна вторая альтернатива. Если бы правильной была первая альтернатива, то, получая полную информацию о состоянии всех микрочастиц системы S и прибора S_L, можно было бы предсказать результат измерения, а это невозможно (см. B_5). Так как тела измерительных приборов являются частным случаем, а не исключением в совокупности всех тел, получаем общий результат, что воздействие микросистем на макротела приводит к расщеплению семейства ψ_k, т. е. к ухудшению информации о состоянии микросистем и к соответствующим изменениям состояния тел, которые нельзя предсказать точно на основании опыта до момента взаимодействия. (C_{17}). Поясним этот результат на примере микрочастицы, проходящей через фотопленку. Мы получаем информацию о прохождении частицы, обнаруживая черное зерно в фотоэмульсии. Согласно (C_{17}) в общем случае при помощи квантовой теории нельзя предсказать, какое зерно почернеет; более того, если бы мы успели это сделать, это означало бы, что квантовая теория неверна.

Информация о состоянии микросистемы S в момент t, которую мы описываем семейством волновых функций $\psi_k(t, x)$, очевидно, получается, исходя из результатов некоторого числа наблюдений, проведенных в определенные моменты. До сих пор мы предполагали, что все наблюдения проведены в моменты t_{-m}, t_{-m+1}, ... t_{-1} более ранние, чем t: $t_{-m} < t_{-m+1} < \dots t_{-1} < t$. Можно поставить более общую задачу о нахождении информации I, когда часть наблюдений проведена раньше момента t, а другая часть — позже t ($t_{-m} < \ldots < t_{-1} < t < t_1, < \ldots < t_n$). Это более общая задача законна и теоретически интересна, хотя практически менее важна, потому что обычно нас интересует возможность предсказания результатов будущих измерений на основании прошлых. Задача этого типа встречается, например, при прослеживании движения одного электрона в камере Вильсона или в некоторой годоскопической системе счетчиков, и нас интересует состояние частицы между двумя регистрациями. Если принять во внимание только результаты, полученные в более ранние моменты, найдем по обычным правилам семейство ψ_k^-. Можно получить другое такое семейство ψ_l^+, исходя из результатов более поздних измерений. Имея в виду теорему о вероятностях причин, получаем ψ_l^+ аналогичным образом, лишь изменяя во всех формулах и правилах знак протекания времени. Пусть $W^-(\widetilde{l})$ и $W^+(\widetilde{l})$ — вероятности получить результат $\widetilde{l}$ при измерении переменной L, в момент t, исходя из ψ_k^- и ψ_l^+.

На основании теоремы о сложной вероятности, искомая вероятность $W(\widetilde{l})$ при наличии обоих типов измерений будет определяться выражением

$$W(\widetilde{l}) = cW^-(\widetilde{l})\, W^+(\widetilde{l}), \tag{25}$$

причем нормирующий множитель c определяется из выражения $\sum\limits_l W(\widetilde{l}) = 1$. ($C_{18}$). Следовательно, в этом случае l задается двумя семействами волновых функций: ψ_k^- и ψ_l^+. (C_{19}). В этом случае соотношение неопределенности в общем не соблюдается. В указанном примере о состоянии электрона между каплями, отмечающими его путь в камере Вильсона или между счетчиками в годоскопе, дисперсия, определенная по формуле (25), может оказаться меньше, чем определенная по (7). (C_{19}). Этот результат, конечно, не противоречит соотношению неопределенности, потому что оно относится только к обычному случаю, когда информация получается единственно на основании более ранних измерений. Вероятность (25), рассматриваемая как функция времени, является непрерывной, включая и моменты t_{-m}, t_{-m+1}, ... t_n.

Информация о состоянии данной микросистемы S задается одним семейством векторов ψ_k или волновых функций $\psi_k(x)$, независимо от того, является ли эта система изолированной или взаимодействует с другой системой S'. Очевидно, что информация ψ_k системы $\overline{S} = S + S'$ определяется однозначно информациями ψ_k и $\psi_{k'}$ и систем S и S' (см. C_{16}). Такая теорема об информации известна и в классической физике. Определяет ли информация систем S и S' информацию системы $\overline{S}$? Информацию $\psi_k(x)$ и $\psi'_{k'}(x')$ о системах S и S' можно представить в виде

$$\psi_k(x) = c_k \varphi_k(x), \quad \psi_{k'}(x') = c'_{k'} \varphi_{k'}(x'),$$

причем

$$\sum_x |\varphi_k(x)|^2 = 1, \quad \sum_{x'} |\varphi'_{k'}(x')|^2 = 1.$$

Следовательно,

$$\sum_k |c_k|^2 = 1, \quad \sum_{k'} |c'_{k'}|^2 = 1.$$

Примем, что среди функций $\varphi_k(x)$ и $\varphi'_{k'}$ нет колинеарных и что все c_k и $c'_{k'}$ отличны от нуля. Тогда информация о системе $S = S + S'$ должна быть билинейной функцией $\varphi_k(x)$ и $\varphi'_{k'}(x')$:

$$\varphi_{k,\,k'}(x,\,x') = c_{k,\,k'} \varphi_k(x) \varphi'_{k'}(x'),$$

причем условие эквивалентности (см. A_6) дает

$$|c_k|^2 = \sum_{k',\,x'} |c_{k,\,k'} \varphi'_{k'}(x')|^2 = \sum_{k'} |c_{k,\,k'}|^2,$$

$$|c'_{k'}|^2 = \sum_k |c_{k,\,k'}|^2.$$

Если параметры k и k' не однозначны, легко проверить, что эти уравнения не определяют однозначно коэффициенты $c_{k,\,k'}$. Следовательно, информация о системах S и S' в общем не определяет однозначно информацию системы $S + S'$. (C_{19}). Однозначность получается, если информация об S или об S' полная. Это утверждение характерно и для классической физики. Там тоже распределения канонических динамических переменных двух систем $W(x, p)$ и $W'(x', p')$ не определяют однозначно распределение $W(x, x', p, p')$ за исключением случая, когда у $W(x, p)$ или у $W'(x', p')$ нет дисперсии, т. е. когда

$$W(x, p) = \delta(x - a)\,\delta(p - b) \text{ или}$$
$$W'(x', p') = \delta(x' - a')\,\delta(p' - b').$$

Очевидно, два наблюдателя в зависимости от данных, которые они имеют, могут иметь различную информацию $\psi'_{k'}$ и $\psi''_{k''}$ о состоянии одной и той же микросистемы в один и тот же момент. Существует ли некоторая, хотя и не взаимно однозначная связь между $\psi'_{k'}$ и $\psi''_{k''}$? Покажем, что это так. Пусть первоначальная информация $\overset{0}{\psi}_k$ о состоянии системы одна и та же. Пусть над системой проведены два измерения величин L' и L''. Тогда, согласно (C_{15}), если результаты этих измерений не даны, после этих измерений информация будет задаваться одним семейством типа $\psi_{kl'l''}$ [см. (21)]. Если первому наблюдателю известен только результат первого измерения, а второму — второго, то

$$\overset{'}{\psi}_{k'} = \psi_{kl'_0 l''},\quad \overset{''}{\psi}_{k''} = \psi_{kl'l''_0}\ [k' = (k, l''),\ k'' = (k, l')].$$

Ради простоты полагали, что приборы, которыми произведены измерения, совершенны. Здесь l'_0 и l''_0— значения L' и L'', полученные опытным путем. Следовательно, необходимым условием для того, чтобы $\overset{'}{\psi}_{k'}$ и $\overset{''}{\psi}_{k''}$ представляли информации о состоянии одной системы для двух наблюдателей, является наличие у обоих некоторого семейства общих векторов состояния $\psi_{k,l'_0 l''_0}$ с отличными от нуля коэффициентами. Иначе было бы невозможно получить результаты l'_0 и l''_0, которые на самом деле получились. Информации разных наблюдателей, хотя и различные и взаимно однозначно необусловленные, не вполне независимы. (C_{20}). Это показывает, что нельзя сказать, что волновая функция не объективна, тем более, что возможность различной информации обусловлена различными опытами, которые различные наблюдатели могут проводить, а не их вкусами и желаниями.

В частности, если у обоих наблюдателей информации были полные, т. е. если бы они знали состояние системы, то это состояние для них обоих должно быть то же самое. Этим доказана однозначность определения состояния (A_4) в квантовой теории. Это важно потому, что (A_4) обеспечивает не только существование, но и неоднозначность состояния.

В квантовой механике обычно решаются задачи следующего типа: найти вероятность получения заданного результата, если в заданный момент измерена некоторая величина L, характеризующая заданную микросистему, зная результаты измерений других величин, проведенные в другие моменты. Эти задачи решаются при помощи семейства волновых функций ψ_k. Прежде всего на основании результатов проведенных экспериментов, при помощи соответствующих правил определяем ψ_k, а затем, исходя из найденного ψ_k, определяем искомые вероятности. Разные наблюдатели могут знать результаты разных измерений, так что семейства ψ_k для них могут быть разными. По определению, состояние системы для всех одно и то же. Ввиду определения состояния (A_4) и выражения (9) для вероятности нахождения данного результата ясно, что состояние задается одним волновым вектором ψ. Последний, ввиду (C_{20}), должен участвовать с отличным от нуля коэффициентом во всех семействах ψ_k. Можно ли считать, что система S находится с некоторой вероятностью P_k в каждом из состояний φ_k семейства ψ_k, так что вероятность нахождения любого результата $W(\widetilde{l})$ при измерении любой величины L можно было бы получить по законам классической теории вероятности. При этом следует исходить из выражений $W(\widetilde{l}, \varphi_k)$ для той же самой вероятности, если бы система находилась в состоянии φ_k. Выражения $W(\widetilde{l}, \varphi_k)$, конечно, получаются по законам квантовой теории применены к состояниям φ_k. Пользуясь обозначением (8), получаем

$$P_{(k)} = |\psi_k|^2, \quad \varphi_k = \psi_k : |\psi_k|,$$

$$\widetilde{\varphi}_{k+}(\widetilde{l}) = \widetilde{\psi}_{k+}(\widetilde{l}) : |\psi_k|, \quad W(\widetilde{l}, \varphi_k) = \sum_{l'} |\widetilde{\varphi}_{k+}(\widetilde{l})|^2.$$

Предполагая, что вероятность того, что система S находится в состоянии φ_{k+} и задается выражением $P+(k)$ получаем

$$W(\widetilde{l}) = \sum_{k} P_{(k)}\ W(\widetilde{l},\ \varphi_k).$$

Сравниваем этот результат с (6). Результат такой же, который был бы, если бы система S фактически находилась в одном из состояний φ_k с вероятностью $P_{(k)}$. Этот результат отмечается не только тогда, когда микросистема S' изолирована, но когда она взаимодействует с любой другой системой S', лишь бы искомая величина L относилась к системе S (представлялась оператором в ее конфигурационном пространстве). Это получается легко, так как семейство $\overline{\psi}_{\overline{k}}\ (t, x, x')$, характеризующее информацию о состоянии сложной системы $\overline{S} = S + S'$, можно рассматривать и как семейство $\psi_k\ (t,\ x)$, характеризующее информацию о состоянии системы S, полагая $\psi_k\ (t,\ x) = \overline{\psi}_{\overline{k}}\ (t, x,\ x')$ при $k = (\overline{k},\ x)$ (см. C_{15}). Пусть L — динамическая переменная, которая зависит от состояний обеих систем S и S', например, их общая энергия. Ради простоты будем считать информацию системы S до опыта полной и заданной функцией $\overline{\psi}\ (x,\ x')$. Тогда, согласно ($C_{15}$), информации о состояниях систем S и S' будут характеризоваться семействами

$$\psi_{\text{k}}(x) = \overline{\psi}(x,\ k) \ \text{ и } \ \psi'_{\text{k}'}(x') = \overline{\psi}(k',\ x').$$

Для простоты примем, что все собственные значения оператора L просты и что измерительный прибор совершенен. (см. A_8). Тогда для вероятности того, чтобы получился результат $\widetilde{l} = l$, находим

$$W(l) = |\,\psi^L(l)\,|^2 = |\psi^{-}\varphi^*_L(l)\,|^2 = \sum_{x,\ x'} |\,\psi(x,\ x')\,\varphi^*_L(x,\ x',\ l)\,|^2, \tag{26}$$

причем $\varphi_L\ (l)$ — нормированный к единице собственный вектор оператора L, соответствующий собственному значению l, а $\varphi^*_L\ (l)$ — его сопряженный вектор. Найдем ту же самую вероятность $W\ (l)$, исходя из предположения, справедливость которого мы хотим проверить, что системы S и S' находятся фактически в некоторых из состояний $\varphi_k = \psi^-_k : |\,\psi^-_k\,|$, соответственно $\varphi'_{k'} = \psi'^-_{k'} : |\,\psi'^-_{k'}\,|$.

Вероятности этих состояний, очевидно, задаются через $|\psi_k^-|^2$ и $|\psi_{k'}'^-|^2$, так что

$$P(k, k') = |\psi_k^-|^2 \, |\psi_{k'}'^-|^2 \tag{27}$$

даст вероятность того, что S находится в состоянии φ_k а S' — в $\varphi'_{k'}$. Тогда для W (l) находим

$$W(l) = \sum_{kk'} P(k, k') \, |\varphi_{kk'} \cdot \varphi_L^*(l)|^2, \tag{28}$$

причем $\varphi_{kk'}(x, x')$ означает состояние системы $\overline{S}$, если S и S' находятся в состояниях φ_k и $\varphi'_{k'}$:

$$\varphi_{kk'}(x, x') = \varphi_k(x) \, \varphi_{k'}(x') = \tag{29}$$

$$= \frac{\psi_k^-}{|\psi_k^-|} \cdot \frac{\psi_{k'}'^-}{|\psi_{k'}'^-|} = \frac{\overline{\psi}(x, k) \cdot \overline{\psi}(k', x')}{|\psi_k^-| \, |\psi_{k'}'^-|} \, .$$

Подставляя (27) в (29) и (28), мы получим:

$$W(l) = \sum_{k, k', x, x'} |\psi(x, k) \, \psi(k', x') \, \varphi_L^* x, x', l)|^2. \tag{30}$$

Это выражение не равно найденному раньше точному значению (26). (C_{21}). Выражения (26) и (30) не равны даже и при более общем предположении, что вероятность $P(k, k')$ дается не произведением (27), а более общей функцией переменных k и k', конечно, не зависящей от выбора L. Так, мы находим, что систему S можно считать находящейся в состоянии, характеризуемом одним вектором ψ в ее конфигурационном пространстве, в том случае, если мы интересуемся только величинами адитивными по отношению к системам S и S' или если состояние системы $\overline{S} = S + S'$ задается произведением двух функций, зависящих соответственно от x и x'. Следовательно, в общем случае мы не можем говорить о состоянии одной микросистемы в присутствии других систем, даже если они не взаимодействуют. Правда, мы могли бы в согласии с (A_4) определить состояние системы S через состояние всей системы $\overline{S}$, но по существу это не меняет результат, так как это означает отрицание существования подсистем. Итак, согласно квантовой теории, отдельные формы материи оказываются более прочно связанными, чем в классической физике. (C_{22}).

Материя, конечно, существует объективно и в каждый момент обладает объективно некоторой формой движения, безотносительной к любому наблюдателю и к тому, что известно об этом движении. Следовательно, материя в каждый момент находится в некотором объективном состоянии, которое, очевидно, очень сложно и нам не вполне известно. Но никакая материальная система, являющаяся подсистемой общей материи в мире (а мы всегда рассматриваем только такие системы), согласно (C_{22}), строго говоря, не находится в определенном состоянии. Это самая существенная причина, из-за которой в квантовой теории понятие о состоянии является менее важным, чем понятие об информации о нем.

Информация не является безотносительной к тому, что о системе задано и если мы считаем заданным то, что известно данному наблюдателю, она становится связанной с этим наблюдателем. Все же информация ψ_k объективная — она отражает объективную связь движения системы с тем, что о нем задано, или связь движения системы с тем, что о нем задано, или связь движения системы с условиями его возникновения или объективно существующие сведения данного наблюдателя или данных наблюдателей о форме движения системы. Ситуация аналогична при всех статистических исследованиях. Если часто говорят о вероятности события, не указывая никакой информации, это потому, что имеется ввиду стандартная информация, которая подразумевается. Так, обычно говорят о потенциальной энергии брошенного камня, хотя одно тело потенциальной энергии не имеет, речь идет о потенциальной энергии системы камень—Земля, но присутствие Земли подразумевается, и о ней не говорят. Но если речь идет о вероятном исходе данного турнира, то эта вероятность, очевидно, существенно зависит от того, что задано или что мы знаем о состязаниях [1]. Это не означает, что можно определять вероятности так, как хочется. Люди с разной информацией могут найти различные вероятности события, но люди с одной и той же информацией обязаны найти одинаковую информацию. В этом

---

[1] А. М. Яглом и И. М. Яглом. Вероятность и информация. М., ГИФМЛ, 1960, стр. 44.

смысле информация ψ_k, посредством которой выражаются все вероятности, объективна. Иногда информацию отождествляют с тем, что данный наблюдатель знает. Тем не менее информация объективна, лишь бы она была получена из объективно произведенных опытов. Связь информации с данным наблюдателем не нарушает ее объективного характера.

Информационное понимание квантовой теории, конечно, не отвергает существования состояния как характеристики формы движения материи, не зависящей от наблюдателя, например, при отсутствии взаимодействия атомов данного газа их электроны должны находиться в определенных состояниях, иначе нельзя было бы определить спектр этого газа. Можно говорить о волновых функциях и о статистическом распределении состояний атомов или электронов еще до того, как были сделаны непосредственные измерения над системой. (C_{23}). Это можно сделать из соображений аналогии. В теории вероятностных процессов это всегда так. Например, вероятность получить два очка при метании игральной кости равна 1/6. Это можно утверждать до того, как мы провели любой опыт с этой костью, даже до того, как она вышла из мастерской, на основании нашего опыта с другими костями или даже на основании более общих законов статистической механики.

Остановимся на одном мысленном эксперименте, явившемся в свое время предметом дискуссии между Эйнштейном и Бором. Эйнштейн дал пример, при котором наблюдения, проведенные над одной частицей, влияют на состояние другой частицы, даже если они проведены позже того, как взаимодействие между частицами прекратилось — результат физически непонятный. Дадим другой, более простой пример такого рода. Пусть две частицы, не взаимодействующие между собой (гамильтониан взаимодействия равен нулю) двигаются в двух потенциальных полях, каждое из которых действует на соответствующую частицу. Легко составить уравнение Шредингера и имея в виду, что оператор гамильтона является суммой операторов обеих частиц, показать, что это уравнение имеет решения, представляющие произведение двух функций. Каждая из них зависит только от координат соответствующей частицы и характеризует ее состояние. В этом случае состояния частиц развиваются во времени независимо друг от друга. Если меняем одно из полей, меняется только состояние соответствующей частицы, что естественно с физической точки зрения, так как частицы не взаимодействуют. Кроме того, любое измерение над одной из частиц не влияет на состояние другой частицы, что тоже понятно. Если, однако, взять решение уравнения Шредингера, не являющееся произведением функций, каждая из которых зависит от координат одной частицы, то все приведенные следствия теряют свою силу. Единственным возможным объяснением этого факта может служить наличие в квантовой механике двух типов взаимодействий. Одно обусловлено наличием потенциала взаимодействия в гамильтониане, другое появляется в том случае, когда волновая функция сложной системы не является произведением волновых функций составных систем. (C_{24}). Первое можно назвать потенциальным, второе — когерентным, потому что оно приводит к эффектам, аналогичным интерференции когерентных пучков света. Факт, что форма (24) волновых функций сохраняется во времени, если при $t = t_0$ она имела вид (23) и в интервале (t_0, t) не было взаимодействия, показывает, что когерентное взаимодействие выражает вероятностное последействие, а не дальнодействие. Каждая линейная комбинация решений уравнения Шредингера является тоже решением, но вероятность получить данный результат (9) для линейной комбинации не является линейной комбинацией вероятностей, соответствующих исходным состояниям. Это можно истолковать как когерентное самодействие частицы в квантовой теории. Именно эти квантовые взаимодействия являются причинами некоторых эффектов — принципа запрета Паули, силы Лондона, сверхтекучести и сверхпроводимости при низких температурах, решений Блоха в кристаллах, излучение и без отдачи поглощение гамма-квантов и т. д. Это типичное квантовое взаимодействие объясняет и упомянутый парадокс Эйнштейна. Оно показывает, что теорема Эренфеста не имеет неограниченной применимости. (C_{25}).

Другой пример, также данный Эйнштейном, который считался затруднительным для квантовой теории, это вопрос о мгновенном скачкообразном сужении волновой функции, когда измерительный прибор показывает, что частица находится в данной точке. Такой результат кажется несовместимым с принципом относительности, точнее — с недостигаемостью скорости света. На самом деле, противоречия здесь нет, потому что волновая функция выражает не фактическое движение частицы, а только информацию о нем. Чтобы показать это, приведем аналогичный пример. Допустим, что снаряд летит с заданной скоростью. Пусть состояние атмосферы, а следовательно, и метеорологическая поправка неизвестны. Траектория снаряда тогда не будет вполне известной, и мы будем иметь некоторую функцию $W(t, x)$, которая дает вероятность нахождения снаряда в данный момент на данном месте. Пусть перед снарядом подвешен экран. Обнаружив отверстие в экране, сделанное снарядом в момент его прохождения, получаем новую информацию. Ясно, что вероятность нахождения снаряда мгновенно изменится во всем пространстве, становясь отличной от нуля только в окрестности отверстия. Результат аналогичен примеру Эйнштейна, но случай здесь классический и ни о каком противоречии с принципом относительности не может быть речи. (C_{26}).

Как в классической, так и в квантовой теории, считается, что существуют измерительные приборы, дающие возможность в каждый момент определить точно или с ограниченной точностью значение каждой динамической переменной. Вопрос об устройстве и действии этих приборов в классической теории вообще ясен. Не так ясен этот вопрос в квантовой теории. Неизвестно, какие системы из частиц и тел мы должны взять, чтобы, используя законы классической и квантовой теорий, получить прибор с указанными качествами (ср. B_5). В качестве примера таких приборов и иллюстрации соотношения неопределенности Гейзенберг рассматривает микроскоп и дифракционную решетку. Показаниями этих двух приборов вопрос, конечно, не исчерпывается, и при том ими практически никто не пользуется, когда нужно определить положение или импульс именно одной частицы. Исчерпывающее решение вопроса, как отмечено, невозможно из-за отсутствия теории воздействия микрочастиц на макротела. Однако покажем, что, исходя из принятых принципов, можно иметь довольно четкие представления об устройстве и действии этих приборов. Конечно, должны существовать разные приборы для измерения каждой величины с той или иной точностью. В классической физике принимается, что измерительные приборы можно выбрать так, чтобы они не влияли на движение исследуемой системы, точнее (так как по закону равенства действия и противодействия это невозможно) так, чтобы обратное воздействие было сколько угодно мало. Для этого достаточно, чтобы тела чувствительной части прибора, которые прямо взаимодействуют с исследуемой системой, имели достаточно малые массы. В классической физике это возможно, так как там не принимается во внимание атомная структура материи и, следовательно, можно построить чувствительную часть прибора из тел, массы которых сколько угодно малы. Не так в квантовой теории. Исследуемая система здесь атомная — составлена из самых легких частиц, которые существуют, так что невозможно найти тела, массы которых малы по сравнению с массами исследуемых частиц. Поэтому, даже если бы микрочастицы качественно не отличались от обычных тел, нельзя было бы сделать точные измерения — акт измерения возмущал бы заметно состояние микросистемы (см. C_{15}). Это не означает, что движение частиц характеризуется объективно теми же величинами, как и движение тел, и только из-за возмущающего влияния прибора нельзя их точно определить. Это показывает, что законы классической физики нельзя применить к атомным процессам.

Измерительный прибор, какой бы он ни был, должен взаимодействовать с микросистемой только в момент измерения, точнее (так как нельзя представить конечное воздействие в один момент) в некоторый интервал времени, выбранный сколько угодно малым (C_{27}). Это необходимо потому, что если взаимодействие происходило в более ранние или более поздние моменты, то, имея в виду, что оно расщепляет семейство векторов состояния (см. C_{15}), мы бы потеряли часть информации и получили бы большую неопределенность. Далее, прибор, точнее чувствительная его часть, должна покрывать все пространство, где можно ожидать частицу (C_{28}), если бы он покрывал только часть пространства и если исследуемая частица находилась на другом месте (имеется в виду случай, когда частица локализована при помощи измерения ее положения в очень близкий более ранний момент), то возможность измерить величину при помощи рассматриваемого прибора в тот же самый момент противоречила бы недостижимости скорости света.

Каково конкретное устройство каждого прибора мы не знаем. Очевидно, трудно представить прибор, который обладал бы этими двумя качествами. Трудно также представить прибор, дающий, например, точную информацию об импульсе частицы, но не дающий никакого указания об ее положении (см. C_{13}). Ведь прибор должен реагировать на данное место, иначе это противоречило бы закону недостижимости скорости света. С другой стороны, приборы, которыми пользуются для измерения динамических переменных микрочастиц, фактически не обладают этими свойствами. Следовательно, следует признать, что в этом отношении квантовая теория содержит слишком далеко идущую идеализацию. (C_{29}).

Попробуем идти по обратному пути. Имея в виду приборы, которые фактически используются, при помощи абстракции, представим приборы, которые, возможно, лучше аппроксимируют, чем те, которые постулированы в квантовой теории. Существует два типа измерительных приборов. Во-первых, приборы, которые дают суммарную информацию об атомных свойствах большого числа микрочастиц; во-вторых, такие, которые дают информацию об одной частице. К приборам первого типа следует отнести, например, спектрографы (световые, рентгеновские, альфа-, бета- и др.), интерферометры и, вообще, все аппараты для измерения макроскопических характеристик веществ, которые, конечно, дают информацию, более или менее прямую, о микрочастицах, составляющих материю. К аппаратам второго типа относятся камера Вильсона (и ей подобные), фотопленка (и фотоэмульсионная камера), счетчик Гейгера-Мюллера (и все другие счетчики) и все приборы, реагирующие на действие одной микрочастицы.

Приборами первого типа мы заниматься не будем, так как они дают только статистические средние, характеризующие динамические свойства микрообъектов — массу, заряд, законы взаимодействия и т. д., а не их моментные состояния. Результаты, которые они дают, в принципе можно получить и при помощи приборов второго типа; во всяком случае, проверка основных положений квантовой теории с их помощью не прямая и более сложная. Приборы второго типа можно разделить на три класса. Во-первых, сюда относятся приборы, дающие однократные регистрации одной частицы, например, счетчик Гейгера-Мюллера. Во-вторых, приборы, дающие заданное число регистраций, например, счетчики, работающие на совпадение. В-третьих, приборы, дающие неограниченное число регистраций, например, фотоэмульсионная или вильсоновская камеры. Рассмотрим приборы первого класса, так как другие являются их комбинациями. Например, фотоэмульсионная камера составлена из большого числа чувствительных зерен, каждое из которых может почернеть под действием частицы, проходящей через камеру. Следовательно, ограничиваясь аппаратами первого класса, мы ничего не теряем с теоретической точки зрения. Каждый такой прибор фактически отмечает с известной точностью одно элементарное событие — появление частицы в данный момент в данной точке. Прибор отмечает прохождение частицы не обязательно, а только с известной эффективностью — частица может пройти, оставаясь незамеченной. Здесь тоже мы должны ввести функции типа $Q(\widetilde{l}, l')$ и $R(l', l)$, характеризующие вероятность того, что прибор регистрировал частицу, движение которой задано семейством волновых функций $\psi_k(t, x)$. При помощи этих функций мы должны ответить на основные вопросы квантовой теории (см. C_{10} и C_{15}). 1. Какова вероятность того, что прибор регистрировал частицу? 2. Какова информация $\psi^+_{k+}(t, x)$ после регистрации, если мы знаем полученный результат.? 3. Какова информация $\widetilde{\psi}_{\widetilde{k}}(t, x)$ после регистрации, если полученный результат неизвестен? По-видимому, мы должны принять, что есть какое-то минимальное расстояние, ближе которого нельзя поставить приборы. Иначе, если расставить приборы неограничено близко друг к другу, мы получили бы возможность прослеживать с неограниченной точностью движения микрочастиц. Исходя из самых общих соображений, нельзя найти однозначный ответ на эти вопросы, поэтому не будем больше на этом останавливаться. Но как бы мы этот вопрос не решили, фактические экспериментальные возможности гораздо более ограничены, чем это обычно принимается.

Итак, следует различать множество всех мыслимых динамических переменных, соответствующих всем эрмитовским операторам в конфигурационном пространстве и множество динамических переменных, которые можно фактически измерять на опыте с одной частицей. Очевидно, ко второй группе следует отнести только координаты и время — опыт дает нам возможность только сказать с известной точностью, что частица прошла через определенную точку в определенный момент. (C_{30}) [1]. Здесь t и x фигурируют вполне симметрично. В обычном понимании вопрос ставится так: как найти вероятность прохождения частицы через заданный объем при фиксированном t? Там t — параметр, а x и все остальные динамические переменные — операторы, так что симметрии по отношению к t и x нет. Следовательно, непосредственно измеряемая на опыте величина, которую в то же время мы можем теоретически подсчитать — это плотность вероятности $W(\widetilde{t}, \widetilde{x})$ в четырехмерном пространстве. Все остальные динамические переменные (энергия, импульс, момент количества движения и т. д.) прямо не измеряются, а вычисляются по найденным положениям частиц в заданные моменты с помощью их операторов и волновой функции. Они могут иметь (и в действительности некоторые из них имеют) более важное теоретическое значение, чем t и x. Относительная точность определения некоторых из этих величин намного больше, чем точность определения координат (по сравнению с комптоновской длиной или радиусом частиц) и точность определения времени (по сравнению с временами ядерных процессов). Тем не менее t и x являются более фундаментальными динамическими переменными в указанном смысле. Рассмотрим следующий пример. По кривизне траектории частицы в камере Вильсона мы определяем ее импульс. То, что дает опыт — это

[1] Л. Ландау, Е. Лифшиц. Квантовая механика, ч. I. М., 1948, стр. 14.

ряд последовательных положений частиц, отмеченных капельками. Исходя из этих положений, делаем выводы об импульсе. Определяем энергетические уровни атома. Фактически опыт дает только распределение испускаемых фотонов на фотопленке спектрографа. Согласно опыту Штерна и Герлаха, фактически получаем некоторое распределение атомов на экране и только при помощи теории заключаем, какие должны быть значения спина и магнитного момента атомов, попавших в разные точки на экране. В качестве метода нахождения импульса приводится метод дифракционной решетки, но фактически дело здесь сводится к определению положений — в щели и на экране. Для этого также используется и излучение Черенкова. Но и здесь только измеряемое распределение фотонов излучения дает возможность судить об импульсе электрона.

Если бы это не было так, т. е. если бы можно было измерить не только координату, но и импульс, нельзя было бы объяснить следующий парадокс, аналогичный парадоксу Эйнштейна о мгновенном сужении волновой функции. Пусть имеется свободно двигающаяся частица. Сделаем три измерения совершенными приборами (см. A_8) в три очень близкие моменты t_1, t_2 и t_3. Определим координату, импульс и опять координату частицы. Предположим, что первое измерение дало $x = 0$, т. е. что в момент t_1 частица в начале координатной системы, а второе дало результат $p = 0$, т. е. что в момент t_2 частица покоится. По законам квантовой теории, волновая функция после второго измерения будет плоская — волна с одинаковой амплитудой во всем пространстве, так что при третьем измерении одинаково вероятно найти частицу в каждой точке пространства, сколь угодно удаленной она ни была бы. Этот результат не согласуется с законом недостигаемости скорости света. Физически понятно, почему свободная частица, имеющая в момент t_1 положение $x = 0$ и в момент t_2 скорость $v = 0$, окажется в момент t_3 на неограниченно большом расстоянии, сколь ни близки были моменты t_1, t_2, t_3. Если, наоборот, примем, что частица должна оставаться где-то в окрестности точки $x = 0$, получим противоречие с соотношением неопределенности (20) в смысле, что опыт дает больше, чем теория, и, следовательно, она неполна. Из этого затруднения нельзя выбраться, принимая во внимание, что в момент t_2 частица не была свободной, а взаимодействовала с прибором, потому что воздействие прибора выражается посредством некоторых потенциалов U и A, а каковы бы они ни были, характеристики уравнения (19) не меняются и, следовательно, пакет не может расплываться со скоростью больше скорости света. Аналогичные трудности возникают, если в момент t_2 мы измеряли бы любую иную величину, отличную от x. Здесь имеем не сужение, а мгновенное расплывание волновой функции, что нельзя объяснить, как в примере Эйнштейна (C_{26}). Все это объясняется, если иметь в виду, что согласно (C_{30}), второе измерение фактически невозможно. Мы не можем мгновенно перевести частицу в состояние, где волновая функция — плоская волна, так что импульс имеет вполне определенное значение, а координата — совершенно неопределенное. Прямо измерить этот импульс невозможно; еще менее возможно получить плоскую волну прямым измерением импульса. Можно только делать заключения об импульсе, прослеживая последовательные положения частицы, но тогда указанный парадокс не появляется. При таком понимании, очевидно, вопрос о прямой опытной проверке соотношения неопределенности отпадает. Измеряются только координаты, а значения импульса и других переменных получают теоретически, так что они по определению удовлетворяют этому соотношению. (C_{31}).

Как было сказано, нельзя дать исчерпывающее описание всех возможных измерительных приборов. Попытаемся проникнуть глубже в устройство прибора, предназначенного для регистрации места и момента прохождения частицы. Одни из приборов, например, фотоэмульсионные камеры, дают сведения о месте прохождения, оставляя практически неопределенным момент прохождения. Другие, например, счетчики, отмечают точно момент, но место прохождения в значительной степени не определено. Более полную информацию, относящуюся одновременно к месту и ко времени, дают, например, искровые камеры, камеры Вильсона со счетчиковым запуском или годоскопические устройства счетчиков, работающие на совпадении с задержкой во времени. Каждый такой прибор составлен из чувствительного элемента, усилителя и регистратора. Чувствительный элемент — это микрочастица, заключенная в потенциальной яме (например, валентный электрон данного атома), так что она сама не может выйти из нее, но выходит и создает известный микроимпульс под действием исследуемой частицы (атом ионизируется и электрон освобождается). Усилитель — это ливнеобразный цепной процесс, вызванный микроимпульсом и превращающий его в макроимпульс, для осуществления которого необходимы специальные условия. Последние осуществляются вторичной ионизацией в счетчике, конденсацией пара вокруг иона в перенасыщенной среде камеры или каталитической цепной реакцией во всем зернышке галогенного серебра, затронутом частицей. Регистратор отмечает в пространстве и во времени полученный от усилителя макроскопический импульс при помощи электронной, фотографической или другой аппаратуры. (C_{32}). Этим, конечно, не исчерпывается вопрос о конкретном устройстве приборов. Ответ на этот вопрос требует прежде всего обнаружения законов, по которым микрочастицы действуют на макротела.

Квантовая теория — это исключительно могучее орудие проникновения в микромир. Она позволила обнаружить интересные черты и эффекты атомных процессов, которые доказали ее могущество. Однако эта теория открыла такие качества атомных объектов, которые она сама не в состоянии объяснить. Так возникла необходимость пересмотреть квантовую теорию. Это подтверждается и тем, что ряд физиков пытаются ввести новые идеи в изучение микропроцессов. Соотношение неопределенности, являющееся одной их характерных черт квантовой теории, и все связанные с ним необыкновенные следствия с самого начала вызвали и продолжают вызывать возражения и давать основания для попыток ревизии. Некоторые из этих попыток имеют более радикальный характер, другие — затрагивают только физическую интерпретацию, сохраняя весь математический аппарат и все выведенные числовые результаты. Попытки ревизии, по-видимому, небезосновательны, небезнадежны в принципе, хотя до сих пор больших успехов они не имели, и ни одна из них существенного развития не получила. Человек всегда стремится к единству и большие отклонения от классических законов легко не утверждаются, хотя, как еще указывал Энгельс, у разных форм материи законы могут быть разные, так что единое объяснение всех природных процессов, видимо, невозможно. Было много попыток перестроить квантовую теорию так, чтобы обойтись без слишком странного и затруднительного положения (B_5), что динамические переменные могут иметь сразу много значений, и восстановить объективно однозначную классическую определенность всех динамических переменных B_4. Эта тенденция появляется из-за статистического характера квантовых закономерностей. Из этого делается предположение о том, что у каждой частицы динамические переменные имеют определенные значения. Неопределенность появляется только из-за того, что у разных частиц, хотя и полученные одним общим способом, эти значения могут быть различными. Иными словами, ставится вопрос: нельзя ли свести квантово-теоретическую статистику к классической статистике, считая, что между частицами действуют нужные силы (а также между частицами и макротелами и между частицами и средой). Движение частиц можно характеризовать не только переменными, которые мы знаем и значения которых мы определяем на опыте, но и другими скрытыми параметрами. Допустимо также, что кроме известных исследуемых частиц существуют и другие еще более элементарные, при помощи которых осуществляется взаимодействие. Например, наблюдаемое нами броуновское движение коллоидальных частиц обусловлено невидимыми под микроскопом молекулами окружающей среды. Движение этих субмикрочастиц должно быть классическим в смысле, что каждая частица в каждый момент должна обладать определенными координатой и скоростью, а законы взаимодействия могут быть произвольными. Ряд соображений, показывающий на невозможность этой модели, приводит Фок[1]. Принципиальная невозможность была доказана одной классической теоремой Неймана [2], которая в последнее время была обобщена Яухом и Пироном.

[1] В. А. Фок. Философские вопросы современной физики. М., Изд-во АН СССР, 1959, стр. 155.

[2] J. Albertson. Amer. Juorn. of Phys., 29, 478 (1961), 479.

Доказано, что нельзя сопоставить каждой квантово-механической системе S_q с конфигурационным пространством H одну классическую систему S_c с параметрами, определяющими ее состояние, s, a, а каждой информации ψ_k — одно вероятностное распределение $w\,(s)$ и каждой переменной L, т. е. каждому самосопряженному оператору L в пространстве H — один набор соответствующих значений $l\,(s)$, так что квантово-механическая и классическая вероятности того, что переменная L имела значение l, были бы одинаковы, или (что то же самое), чтобы квантово-механическое и классическое среднее значение переменной L были одинаковы, т. е.

$$\sum_k \psi_k^* L \psi_k = \sum_s w\,(s)\, l\,(s). \tag{31}$$

Этим доказана невозможность свести квантовую статистику к классической. Конечно, вопрос о дополнительных параметрах (явных и скрытых) можно ставить в более общем виде. В этом смысле он не является исчерпанным. Не исключено, что квантовую теорию или классическую физику, или их вместе нельзя видоизменить так, чтобы они стали следствиями одной единой теории. Кроме того, предположение, что каждому самосопряженному оператору L соответствует одна наблюдаемая величина, т. е. один измерительный прибор, дающий возможность определить его собственные значения l и все вероятности $W(l)$, слишком смело, так как пока мы умеем непосредственно мерить только координаты и время прохождения микрочастиц. Если класс наблюдаемых величин L достаточно узкий, то возможно, что равенство (31) выполнимо.

В последнее время были предприняты де Бройлем, Бомом, Вижие и др. попытки достигнуть некоторого возвращения к представлениям классической физики при помощи так называемого двойного решения волнового уравнения — решения, имеющего полюсообразные особенности, типа особенностей вокруг точечных зарядов в электродинамике. По сути дела, это попытка свести квантово-механические эффекты к классическим введениям некоторого дополнительного дальнодействия между частицами, осуществляемого при помощи волновой функции. Из приведенных общих соображений ясно, что так нельзя свести квантовую теорию к классической. Эти исследования не получили большого развития [1].

Было предложено (Мандельштам, Блохинцев и др.) так называемое ансамблевое понимание волновой функции в отличие от стандартного индивидуального понимания, из которого мы здесь исходили. Согласно индивидуальному пониманию, семейство волновых функций ψ_k (t, x) характеризует одну микрочастицу, а в ансамблевом понимании оно относится к совокупности данного ансамбля — очень большого количества частиц, полученных данным способом. Нам кажется, что нет существенного различия между этими пониманиями. При второй концепции, конечно, нельзя считать, что отдельные частицы движутся по классическим законам и что каждая переменная объективно имеет определенное значение, а статистика появляется только из-за большого количества частиц в ансамбле, или что отдельной частицы нет и можно говорить только о динамической характеристике ансамбля. На самом деле, если мы примем, что семейство волновых функций характеризует ансамбль частиц, полученных данным способом, то ничто не мешает отнести ту же информацию и к отдельной частице ансамбля. Наоборот, если волновая функция относится к одной частице, то из-за статистического характера квантовомеханической теории ясно, что опытная проверка результатов возможна лишь при многократном экспериментировании ансамблем однотипных частиц, т. е. опять приходим к ансамблю. Вопрос ансамблевого и индивидуального понимания волновой функции аналогичен этому вопросу в любой статистической теории. Например, закон распределения скоростей молекул в одном газе можно сформулировать двумя неодинаковыми, но все же эквивалентными способами. Этот закон дает число молекул со скоростями в заданном интервале или он дает вероятность того, что одна молекула имеет скорость в этом интервале. Разница в несущественном постоянном множителе, который при первой трактовке нужно поставить, а при второй — нет. В зависимости от поставленных целей можно пользо-

---

[1] В. А. Фок. Философские вопросы современной физики. М., Изд-во АН СССР, 1959, стр. 79.

ваться индивидуальным или ансамблевым пониманием. При индивидуальном понимании, конечно, величина $W(\tilde{l})$ (9) дает вероятность получения результата $\tilde{l}$, а при ансамблевом — число частиц при опытах, над которыми получается результат $\tilde{l}$. В квантовой теории, как и в каждой статистической теории, можно говорить о вероятности данного события, которое должно произойти с данной частицей, несмотря на то, что опытная проверка результатов возможна лишь при многократном экспериментировании многими частицами. Ансамблевое понимание, конечно, не отвергает существования отдельной частицы. Последовательно сто зерен данного следа в фотоэмульсии, очевидно, дают нам путь именно одной частицы. (C_{33}). Отметим, что существует еще один пока не исследованный вариант ансамблевого понимания. Можно считать, что волновая функция $\psi(t, x)$ или семейство $\psi_k(t, x)$ характеризуют не одну частицу и не заданное малое или большое число частиц, а все частицы, которые выходят из данного источника — например, α-частицы, вылетающие из данного радиоактивного препарата, или электроны, вылетающие из одной раскаленной нити и проходящие через заданные тела, электромагнитные поля и т. д., пока они дойдут до регистрирующего устройства. Разница в том, что в этом случае задано не точное, а только среднее число вылетающих частиц, которое, конечно, может меняться во времени. Это среднее число может быть небольшим и даже не целым. Статистический ансамбль можно получить, если взять много макроскопически одинаковых источников. Норма множества волновых функций равна интенсивности источника, а выражения типа (9) дают не вероятности, а среднее число частиц. Это понимание дает возможность получить физическую интерпретацию релятивистских уравнений, где частицы могут распадаться и уничтожаться. (C_{34}).

Один из дискутируемых принципиальных вопросов — вопрос о детерминированности, о причинной обусловленности и опознаваемости мира с точки зрения квантовой теории. В классической механике о движении материальных точек утверждается следующее:

1. Координаты и скорости каждого тела данной материальной системы, т. е. ее состояние (см. C_5), можно оп-

ределить на опыте в любой момент с неограниченной точностью.

2. Уравнения движения позволяют найти состояние системы в любой момент, если мы знаем его в некоторый начальный момент, лишь бы система была изолирована или находилась под действием тел, движение которых задано.

3. Значения всех динамических переменных, т. е. все, что может дать опыт, выражается посредством величин, характеризующих состояние, лишь бы система была изолирована или находилась под действием тел, движение которых задано.

Аналогичные утверждения встречаются в любом разделе классической физики, но состояние определяется другими параметрами, например, (C_3) и (C_5). Из этих утверждений вытекает, что результат любого опыта над данной системой изолированной или находящейся под действием тел, движение которых задано, в любой момент может быть теоретически предсказан, если проведены нужные опыты в заданный момент t_0. (C_{35}). Это утверждение выражает так называемый лапласcовский механический детерминизм, или лапласcовскую причинность. Оно выражает также и познаваемость мира, так как требование познаваемости не имеет смысла вне предсказания результата любого опыта. Следовательно, в таком смысле детерминированность, причинность и познаваемость мира — понятия эквивалентные. В квантовой теории утверждение (C_{35}) не имеет места. При помощи подходящих опытов можно довести частичную информацию до полной. Но даже в этом случае результат всех измерений точно предсказать нельзя. Например, если электрон летит в пространстве, какие бы измерения при $t = t_0$ или даже при $t \leqslant t_0$ ни проводили, мы не можем сказать, задействует ли он счетчик, лежащий перед ним. Или если есть некоторое количество радиоактивного элемента, какие бы опыты при $t \leqslant t_0$ ни проводили, нельзя сказать, вылетит ли α-частица в интервале t_0, t. Это не означает, что ничего нельзя точно предсказать. Можно предсказать вероятности и, следовательно, можно найти вероятностные распределения, которые вполне определенны и их можно точно проверять на опыте. Но, согласно квантовой теории, точность теоретических предсказаний единичного микроявления можно увеличивать не неограниченно, а только до некоторого предела, указанного соотношением неопределенности. В таком смысле Эйнштейн считает квантовую теорию неполной. Дальнейшее увеличение точности возможно, если отбросить квантовую теорию и найти другую.

Можно считать, что квантовая теория несовершенна, что она будет превзойдена, и полные причинность, познаваемость и детерминированность мира в лапласовском смысле будут восстановлены. Но важнее проверить, нельзя ли дать принципам причинности, познаваемости и детерминированности мира такие формулировки, которые, будучи применены к классической системе, совпадали бы с формулировкой Лапласа (условия перманентности), а будучи применены к квантовой системе были бы в согласии с принципами квантовой теории [1]. Состоянием в общем смысле мы назвали максимальную информацию о форме движения данной материальной системы в данный момент, которую можно получить на опыте. Это определение совпадает с классическим (см. A_2) по отношению к макротелам и эквивалентно познанию волновой функции, если мы применим его к микрочастицам (см. C_9). Разница в том, что у макросистемы максимальная информация определяет однозначно результаты всех опытов, а у микросистемы — нет. Но несмотря на это, максимальная информация как о макро-, так и о микросистемах будет сохраняться — определяя ее из опыта в данный момент, можно найти ее теоретически о всех следующих, а также предшествующих моментах. (C_{36}). Это утверждение, которое следует из общих принципов теории, представляет искомое обобщение лапласовского детерминизма. Его нельзя доказать только в случаях, когда микрочастицы действуют на макротела — случай, для которого теория не развита. Утверждение (C_{36}), конечно, менее жесткое, чем лапласовское, но ясно, что нельзя ожидать предсказания о движении системы более определенные, чем данные опыта. Мы не можем искать точные значения коор-

---

[1] Хр. Я. Христов. Философска мисъл, 3. София, 1947, стр. 177.

динат и импульсов, потому что микрочастицы таковых не имеют.

Это более общее понимание детерминированности, причинности и познаваемости мира углубляет нашу концепцию о происхождении понятия вероятности. С точки зрения лапласовского детерминизма, если заданы начальные состояния материальной системы и законы взаимодействия ее тел, то после проведения необходимых вычислений можно точно определить все будущее (а также и все прошлое) развития системы. При этом о каждом событии в этой системе можно сказать с достоверностью, т. е. с вероятностью 0 и 1, наступит оно или нет. Промежуточные значения вероятности получаются только из-за того, что начальное состояние или законы взаимодействия не даны точно или из-за того, что все расчеты точно не проделаны. В квантовой теории это не так. Никакими способами нельзя довести до 0 или 1 вероятность каждого события. В этом смысле квантовая теория вводит безотносительную к любому наблюдателю случайность, на существовании которой настаивает диалектический материализм [1].

В связи с соотношением неопределенности возникает вопрос, какова причина его возникновения. Некоторые представители Копенгагенской школы считают, что причина его в так называемом принципе дополнительности, т. е. в том, что природа имеет две стороны — корпускулярную и волновую и что мы можем узнать только одну из них — изучая одну сторону, мы тем самым теряем возможность узнать другую [2].

Это утверждение весьма не ясно. Согласно классической физике, есть два типа излучений — корпускулярные и волновые. Следовательно, эти понятия там являются однородными и их можно сравнивать. В квантовой теории, однако, микрочастица представляет частицу, состояние и информация о состоянии которой описываются при помощи волн. Таким образом, корпускула и волна — это два понятия, одинаково необходимые для понимания вещей. Отбрасывая одно из них, теория теряет смысл и в общем

---

[1] См. Ф. Энгельс. Диалектика природы. Госполитиздат, 1948, стр. 174.

[2] Л. Шифф. Квантовая механика. М., ИЛ., 1957, стр. 18.

нельзя спрашивать, можем ли мы обнаруживать одно или другое. Мы можем определить волновую функцию каждой корпускулы в любом состоянии и тогда определить вероятности для опытного нахождения каждого значения координаты, скорости, энергии и т. д. Скорее можно говорить о дуализме в координате и импульсе частицы и вообще о дуализме по отношению к сопряженным динамическим переменным, но из этого никаких существенных философских выводов не получается.

Существует еще много широко обсуждаемых нерешенных вопросов. В том числе взаимная превращаемость и внутренняя структура элементарных частиц, устранение расходимостей, единая теория поля, корректность постановки задачи при вторичном квантовании, совместимость волновых уравнений и коммутационных соотношений, взаимодействие частиц на еще меньших расстояниях, квантовая теория конденсированных систем и т. д. Эти проблемы, хотя и очень важные, не имеют прямого отношения к обсуждаемому вопросу о связях квантовой теории с опытом. Поэтому здесь они не рассмотрены.

Выдвигая в качестве основной величины, с которой квантовая теория работает, характеристику информации о движении микросистемы ψ_k, а не прямо состояние ψ, теория не становится менее объективной, хотя и в принципе у разных наблюдателей информации могут быть различны. Это так, потому что возможность различных информаций у различных наблюдателей не означает никакого произвола. Информация зависит не от взглядов и желаний, а от объективно проведенных опытов наблюдателя над объективно существующими частицами. Теория информации, очевидно, наука, занимающаяся объективными вещами и соотношениями. Наоборот, ставя в основе теории опытно установленные вещи, мы обеспечиваем ее связь с действительностью, чтобы она не превратилась в метафизику. Конечно, возможность различной информации не имеет большого практического значения. В науке практически не возникает ситуации, когда два наблюдателя изучают данную материальную систему, а результаты друг другу не сообщают. Мы остановились на этом пункте только, чтобы показать, что и при различных информациях внутренние противоречия в теории не появляются. Обычно имеется в виду вся научная информация человечества в данный момент, которая, очевидно, для всех наблюдателей одна и та же. Принимать во внимание больше факторов, увеличивать число аргументов, от которых зависят рассматриваемые величины, заменять неизменные и бесструктурные элементы переменными объектами с внутренней структурой — это необходимая часть углубления и развития науки.

Утверждения (B_4) и (B_5), которые мы выдвинули как основное отличие между классической и квантовой теориями, касаются регистрационных возможностей приборов. В этом, конечно, тоже нет никакого произвола и никакой субъективности. Это означает, что различие между классической и квантовой теориями очень глубоко и нисходит до основных экспериментов.

К АКСИОМАТИКЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ [1]

К. КАРАТЕОДОРИ

Эйнштейн построил аксиоматику специальной теории относительности, пользуясь некоторыми экспериментами со «световыми часами» и «масштабами».

1. Мы покажем, что эту аксиоматику можно поразительным образом упростить, если всю теорию строить только на наблюдениях времени. Удается установить аксиому для нормального распространения света, не пользуясь измерениями длин и не вводя предварительно понятие скорости. Для нашей теории, которая сама по себе дает естественную меру для длин и углов, нужны простейшие понятия, связанные с временем,— понятия, определяемые словами «раньше», «позже» и «одновременно».

2. Если рассмотреть самые общие преобразования, которые переводят пространство с нормальным распространением света в подобное пространство, любым способом движущееся в пределах первого, получим наиболее естественным образом основной результат *Минковского*. Именно эти преобразования могут быть представлены как отображения четырехмерных континуумов.

---

[1] C. Caratheodori. Zur Axiomatik der speziellen Relativitäts theorie, Sitzungsberichte der Pheusyschen Akademie der Wissenschaften. Phys.- Math. Klasse, 1924, S. 12—27. — Перевод И. Б. Погребысского.

Но, кроме того, получается, что эти отображения образуют непрерывную группу, порождаемую только конечным числом бесконечно малых преобразований, а именно: пятнадцатью. Эта группа содержит группу обычных лоренцовых преобразований и смещений (Verlagerungen) пространства в качестве подгруппы. Кроме того, в нее входят только преобразования мира Минковского типа инверсии. Последний результат не должен нас удивить: еще в 1909 г. Канингэм и Бейтман указали на то, что уравнения Максвелла инвариантны относительно таких преобразований типа инверсии [1].

3. Мы вынуждены считать физически одинаковыми два пространства, движущиеся друг относительно друга с постоянным ускорением, если ограничиваемся наблюдением распространения света. Однако, как видно из прежних исследований о законах механики, дело обстоит не так. Но если мы соответственно сузим нашу группу, то просто доказать, что из нее надо исключить все нелинейные преобразования.

4. Таким образом, группа G_{15} сводится к группе G_{11}, содержащей (сверх лоренцовых) только тривиальные преобразования.

Если бы опыт Майкельсона — Морли дал положительные результаты, то надо было бы удалить из этой группы и преобразования Лоренца, подобно тому, как мы это сделали с преобразованиями инверсии. Осталась бы только группа G_z тривиальных преобразований. Мы тогда сделали бы вывод, что постулат существования пространства с нормальным распространением света влечет за собой существование абсолютного пространства и абсолютного времени.

Итак, при оценке применимости математических выводов к физическим явлениям опыт у Майкельсона — Морли, который при построении теории в нашем изложении отступает на задний план, отводится должное место.

---

[1] E. Cunningham. Proc. London math. Soc., 8 (1910), p. 77; H. Bateman. ibid., p. 223.

Аксиомы распространения света

5. Предметы, которые мы рассматриваем и называем *материальными точками*, должны быть идентифицируемыми. В дальнейшем будем обозначать их буквами P, Q,... Они являются носителями определенных событий, посредством которых мы наблюдаем распространение света и которые состоят в передаче и приеме световых сигналов. Эти события удовлетворяют следующим группам аксиом.

Аксиомы временной последовательности.

а) *Два события, наблюдаемые в одной и той же материальной точке P, либо «одновременны», либо одно из них происходит «раньше», другое — «позже».*

Нельзя идти дальше в разъяснении понятий «раньше», «одновременно» и «позже», так как они— грубые результаты непосредственного наблюдения.

б) *Временные события, наблюдаемые в одной и той же точке P, упорядочены.*

Под этим понимается, что понятия «одновременно», «раньше», «позже» удовлетворяют тем же аксиомам, что и понятия «равно», «меньше», «больше» в теории действительных чисел.

в) *В любой рассматриваемой точке P отправление светового сигнала всегда можно осуществить одновременно с любым другим событием, происходящим в той же точке.*

6. Вторая группа аксиом относится к распространению света.

г) *Если P и Q — материальные точки, то каждому световому сигналу α, исходящему из P, однозначно соответствует световой сигнал α, принимаемый в Q.*

Два соответствующие друг другу указанным образом световые сигнала называются *связанными событиями*.

д) *Временная последовательность сохраняется при связанных событиях.*

Это означает следующее: если α и β обозначают два световых сигнала, посланных из P_1 и α', β' — события, соответствующие им в Q, то последовательность событий α', β' (в точке Q) та же самая, что и последовательность событий α, β в точке P. В частности, если α и β одновременны, то одновременны и α', β'.

4. Вводим *световые многоугольники*. Пусть P_1, $P_2, \ldots$, $\ldots, P_n$ — произвольные точки, причем две соседние точки различны. В P_1 дается световой сигнал α_1. Обозначим через α_2' принятый в P_2 и связанный с α световой сигнал. Затем в P_2 дается *одновременный* с α_2' световой сигнал α_2, что, возможно, согласно в), и пусть α_3' обозначает событие, происходящее в P_3 и связанное с α_2. Мы поступаем таким образом, пока не примем в P_n световой сигнал α_n', связанный с отправлением из P_{n-1} сигналом α_{n-1}.

Обычно такой многоугольник представляют построенным с помощью соответствующих зеркал, помещенных в P_2, P_3, $\ldots, P_{n-1}$. Если световой многоугольник замкнут, т. е. P_n совпадает с P_1, должна соблюдаться следующая аксиома, выражающая «конечность скорости света».

е) *Если обозначить через $\alpha_1\alpha_2'$; $\alpha_2\alpha_3'$; $\ldots, \alpha_{n-1}$, α_n' световые сигналы, пробегающие замкнутый световой многоугольник, то событие α_n' в точке $P_1 = P_n$ всегда происходит позже, чем событие α_1.*

8. Приведенные аксиомы, представляющие только обработку сырого материала наблюдений, не содержат допущений относительно окружающего пространства. Такие допущения сформулированы в следующей группе аксиом.

ж) *Рассматриваемые нами точки P, $Q, \ldots$ образуют множество $\mathfrak{A}$, вложенное в трехмерное топологическое пространство.*

Эта аксиома означает, что те три параметра, которыми пользуются для определения точек нашего топологического пространства, могут быть использованы и для идентификации наших материальных точек.

з) *Точки P, $Q, \ldots$ множества $\mathfrak{A}$ — суть точки некоторой среды, т. е. они одноодн означно соответствуют внутренним точкам некоторой топологической сферы в $F\,\mathfrak{R}$.*

Следует заметить следующее.

Мы представляем наши материальные точки в виде континуума, чтобы удобно было применять в дальнейших рассмотрениях вспомогательные средства математического анализа. Однако не исключено, что на более позднем этапе математической физики существенное значение будет иметь замена этого предположения другим.

Мы представляем точки $\mathfrak{A}$ содержащимися в *ограниченной* области пространства $\mathfrak{R}$, чтобы не лишать себя перехода к общей теории относительности.

9. Каждому из световых многоугольников, рассмотренных в пункте 7, соответствует какой-либо многоугольник топологического пространства $\mathfrak{R}$. Вводим следующее условие *нормального распространения света*:

и) *Мы называем распространение света в $\mathfrak{A}$ нормальным, если среди всех возможных представлений пространства $\mathfrak{R}$ с помощью трех параметров существуют по крайней мере одна система координат x, y, z, которая удовлетворяет следующему условию:*

если x, y, z — прямоугольные координаты эвклидового пространства, то из двух одновременно оуправляемых сигналов, пробегающих два замкнутых световых многоугольника, конечная точка которых совпадает с началом точки O системы координат x, y, z, раньше придет тот, который опишет более короткий (в эвклидовом мероопределении) многоугольник. Если оба многоугольника имеют одинаковую длину, то сигналы должны прийти одновременно.

Особое положение точки O в аксиоме и) — только кажущееся. Из последующих рассуждений вытекает, что каждое пространство $\mathfrak{R}$ с нормальным распространением света может быть отображено на эвклидово пространство только одним способом — при условии соблюдения требований аксиомы и).

10. Последнее обстоятельство, которое, впрочем, легко доказать и непосредственно, показывает, что в пространстве с нормальным распространением света существует естественное мероопределение как для расстояний, так и для углов, зависящее только от измерений времени на световых многоугольниках.

Для полноты теории полезно рассмотреть также чисто математические вопросы, которые изложить здесь нет возможности. Во-первых, надо найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять измерения времени с помощью световых многоугольников в топологическом пространстве $\mathfrak{R}$, чтобы распространение света было нормальным. Во-вторых, надо определить систему прямоугольных координат x, y, z в эвклидовом пространстве отображений, пользуясь только световыми сигналами, удовлетворяющими найденным условиям.

11. Будем считать, что внутри рассматриваемой среды распространение света нормально и что параметры x, y, z, служащие для идентификации точек этой среды, удовлетворяют условиям аксиомы и).

Следуя известному приему Эйнштейна, помещаем в точке O «световые часы», вводя в рассмотрение бесконечное множество световых многоугольников с конечными точками в O и с длинами в эвклидовом пространстве $1, {}^1/_2, {}^1/_4, \ldots, {}^1/_{2^n}, \ldots$. По этим многоугольникам повторно и непрерывно пробегают световые сигналы, представляющие «стрелки» наших часов.

Итак, если два световых сигнала, пробегающих n-й и $(n+1)$-й многоугольники, выходят из точки O одновременно, то второе, четвертое и т. д. появления светового сигнала на n-й стрелке совпадают с одним из последующих «ударов» $(n+1)$-й стрелки. Поэтому можно принять, что различные стрелки наших находящихся в точке O часов поставлены таким образом, что каждый удар любой из стрелок происходит одновременно с ударом каждой из последующих стрелок.

Будем считать справедливой следующую аксиому.

к) *Для всех событий в точке O верна, относительно наших световых часов, аксиома Архимеда.*

Под этим надо понимать следующее: в точке O не может быть событий, которые происходили бы раньше или позже, чем все удары наших часов. Но тогда каждое событие, не совпадающее с одним из ударов одной из стрелок часов, происходит между двумя последовательными ударами какой-либо и, следовательно, каждой стрелки; отсчитывая эти удары, мы можем сопоставить событию α двоичную дробь, выражающую время t.

л) *Для событий в точке O верна, относительно наших световых часов, аксиома непрерывности.* То есть два события в точке O происходят одновременно тогда и только тогда, когда они соответствуют одному и тому же значению t, определение которого только что дано.

Таким образом, мы определили в точке O *естественное измерение времени*; кроме того, мы можем еще произвольно выбирать начальный момент, заменив t на $(t - t_0)$, где t_0 — постоянная.

Пусть γ замкнутый световой многоугольник с начальной и конечной точкой в точке O, а h — его эвклидова длина в пространстве x, y, z. С помощью последних трех аксиом мы можем доказать, что световой сигнал, пробегающий γ и отправляемый из точки O в момент t, ко времени $(t + h)$ снова будет принят в точку O. Для этого нужно только так определить четыре сходящиеся к нулю последовательности положительных чисел ε_n, ε'_n, η_n и η'_n, чтобы числа

$$2^n(t + \varepsilon_n);\ 2^n(t - \varepsilon'_n);\ 2^n(h + \eta_n);\ 2^n(h - \eta')$$

были целыми. Тогда из аксиом д) и и) следует, что время возвращения τ, пробегающего многоугольник γ светового сигнала, удовлетворяет неравенствам

$$(t - \varepsilon'_n) + (h - \eta'_n) < \tau < (t + \varepsilon_n) + (h + \eta_n),$$

а так как это верно для всех n, то, согласно л), должно быть $\tau = t + h$.

14. Теперь можно представить световые сигналы, пробегающие не вдоль световых многоугольников, а вдоль любых спрямляемых кривых. Если конечные точки такой кривой γ (длины h) совпадают с точкой O, то γ можно рассматривать как предел многоугольников γ_n, чьи длины h_n сходятся к γ. Как и ранее, получим, что световой сигнал, идущий вдоль γ и отправляемый из начальной точки этой кривой в момент t, снова достигает этой точки в момент $t + h$.

Пусть P и Q — произвольные точки среды $\mathfrak{A}$ и пусть даны две кривые γ и γ', соединяющие P и Q. Докажем, что из двух сигналов, отправляемых одновременно из P вдоль этих двух кривых, раньше прибудет в O тот, который пройдет более короткий путь. С этой целью соединим точку O с P кривой γ_1 длины h_1, а Q соединим с точкой O кривой γ_2 длины h_2, а также обозначим дли́ны γ и γ', соответственно, через h и h' и пусть, например, $h<h'$. Пусть α — сигнал, отправляемый вдоль γ, идет дальше по γ_2 в точку O и попадает туда в момент τ. Положим $t = \tau - (h_1 + h + h_2)$ и заметим, что два световых сигнала, исходящие из точки O в момент t, из которых один идет вдоль $(\gamma_1 + \gamma + \gamma_2)$, а второй — вдоль $(\gamma_1 + \gamma' + \gamma_2)$, пройдут кривые γ и γ' одновременно с заданными сигналами. А так как первый из этих сигналов приходит в точку O к моменту τ, второй — к моменту $(\tau + h' - h)$, т. е. позже, то, согласно аксиоме д), второй сигнал должен пройти через точку O позже, чем первый, и этим наше утверждение доказано.

15. Теперь можно избавиться от той исключительности, какой до сих пор обладала точка O. Заметим, отождествив в теореме последнего параграфа точки P и Q, что аксиома и) остается в силе при замене точки O любой точкой P из $\mathfrak{A}$, так что, согласно ранее установленному, можно построить световые часы в любой точке нашей среды. Поэтому можно ввести в любой точке P из $\mathfrak{A}$ *местное время*, поскольку для таких световых часов, как это сразу видно, верны аксиомы к), л).

Теперь дело сводится к такому согласованию друг с другом различных часов, чтобы ни одна точка $\mathfrak{A}$ не была исключительной. Пусть γ — кривая, соединяющая P и Q, и пусть световой сигнал, пробегающий γ и отправляемый из P в момент t_P, достигает Q в t_Q по местному времени. Так как два одновременно вышедшие из P световых сигнала, из которых один пробегает сначала петлю длины h с концами в P, а потом кривую γ, тогда как второй сначала пробегает кривую γ, а потом петлю длины h с концами в Q, одновременно приходят в Q, то мы видим, что световой сигнал, выходящий из P в $(t_P + h)$ и пробегающий γ, приходит в Q в момент $(t_Q + h)$. Следовательно, для двух данных местных часов разность $(t_Q - t_P)$ местных времен не зависит от исходного момента t_P, а зависит только от той кривой γ, которую проходит сигнал.

Такими же рассуждениями мы доказываем, что если γ и γ' обозначают два пути, длины́ h и h', соответственно соединяющие две любые точки P и Q в $\mathfrak{A}$, то два световых сигнала, одновременно отправляемые из P и пробегающие эти два пути, приходят в Q с разностью во времени по местным часам, равной $(h' - h)$.

Все эти факты говорят о том, что различные световые часы можно согласовать друг с другом так, что световой сигнал, отправляемый из P по местному времени в t_P и достигающий точки Q по произвольной кривой γ длины h, приходит туда по местному времени в $t_Q = t_P + h$, притом независимо от пути, от выбора точки P и от момента отправления.

16. Итак, распространение света происходит и замеряется в нашей среде точно так, как в эвклидовом пространстве, в котором мы постулируем понятие одновременности u для событий, происходящих в различных точках, а скорость света полагаем равной единице. Вместе с тем, для получения этого результата мы не использовали ни понятия одновременности в различных точках, ни понятия скорости.

Эквивалентные пространства с нормальным распространением света

17. Будем считать, что распространение света в среде $\mathfrak{A}$ нормально, так что мы можем охарактеризовать каждое происходящее в $\mathfrak{A}$ событие α прямоугольными координатами x, y, z и соответствующим местным временем t.

Чтобы определить вторую среду $\mathfrak{B}$, движущуюся внутри первой и точки которой P^* мы будем обозначать с помощью трех параметров a, b, c, рассмотрим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
x &= \Phi_1(a, b, c);\\
y &= \Phi_2(a, b, c);\\
z &= \Phi_3(a, b, c)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

и перенесем на среду $\mathfrak{B}$ понятия, связанные с распространением света в $\mathfrak{A}$, введя следующие определения:

Определение I. О событии α, которое происходит в точке x, y, z среды $\mathfrak{A}$ по местному времени в момент t, если удовлетворяются уравнения (1), мы говорим, что оно происходит и в точке a, b, c среды $\mathfrak{B}$.

Говорят, что такие две соответствующие друг другу точки «касаются» в момент t по местному времени.

Определение II. Из двух событий α_1, α_2, происходящих в одной и той же точке P^* среды $\mathfrak{B}$, которым соответствуют значения t_1 и t_2 местного времени $\mathfrak{A}$, мы называем более ранним то, *которому отвечает меньшее значение* t. Из второго определения следует, что два события, одновременные в $\mathfrak{B}$ и происходящие в одном месте, одновременны и относительно $\mathfrak{A}$, тогда как в среде $\mathfrak{B}$ понятия, раньше и позже нами определены для событий, которые, возможно, происходят в различных точках $\mathfrak{A}$ и поэтому, как правило, не сравнимы в первой среде.

18. Мы требуем, чтобы функции Φ были непрерывны и имели непрерывные первые полные дифференциалы. Кроме того, нам надо сформулировать то, что две различные точки $\mathfrak{B}$ не должны одновременно касаться одной и той же точки в $\mathfrak{A}$. Чтобы этого не было в некоторой окрестности точки P^*, необходимо и достаточно, чтобы функциональный определитель

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(a, b, c)} \neq 0. \tag{2}$$

Определение III. Под скоростью относительно среды $\mathfrak{A}$ точки P^* в среде $\mathfrak{B}$ мы понимаем вектор, компоненты которого заданы в эвклидовом пространстве x, y, z уравнениями

$$\dot{x} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}; \quad \dot{y} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial t}; \quad \dot{z} = \frac{\partial\Phi_3}{\partial t}. \tag{3}$$

19. Легко проверить, что в силу определений последнего параграфа три аксиомы первой группы верны и для среды $\mathfrak{B}$. Чтобы проверить справедливость и аксиом второй группы г), д), е), мы должны ввести еще *требование недостижимости скорости света*: во всех точках среды $\mathfrak{B}$ и для всех рассматриваемых значений t длина вектора скорости заметно меньше единицы, и поэтому всегда выполняется неравенство вида

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \leqslant (1 - \varepsilon). \tag{4}$$

Наметим, к примеру, как показать, что аксиома г) верна и для среды $\mathfrak{B}$. Пусть P_1^* и P_2^* — две точки $\mathfrak{B}$ с координатами (a_1, b_1, c_1), соответственно (a_2, b_2, c_2). Из точки (x_1, y_1, z_1) среды $\mathfrak{A}$, в которой в момент t_1 находится P_1^*, в этот же момент исходит световой сигнал. Геометрическое место точек $\mathfrak{A}$, в которых местные часы показывают при приеме этого сигнала время $(t_1 + h)$, состоит из точек сферы

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = h^2. \tag{5}$$

Рассмотрим точку

$$x_2(h) = \Phi_1(a_2, b_2, c_2, t_1 + h); \quad y_2(h) = \Phi_2(a_2, b_2, c_2, t_1 + h);$$
$$z_2(h) = \Phi_3(a_2, b_2, c_2, t_1 + h). \tag{6}$$

Заметим, что при малых положительных значениях h эта точка находится вне сферы (5), но вследствие (4) есть значения h, при которых эта точка попадает внутрь сферы (5). Если выразить расстояние $\lambda(h)$ точки (6) от поверхности сферы (5) через h, то элементарный подсчет показывает, что с учетом (4) и для всех положительных значений h всегда

$$\frac{d\lambda(h)}{dh} < 0.$$

Следовательно, для h имеется одно однозначно определенное значение h_1, при котором точка (6) находится на сфере (5), и число $t_2 = t_1 + h$ дает для среды $\mathfrak{A}$ то местное время, когда в P_2^* будет принят соответствующий световой сигнал.

Теперь аксиома е) следует из того, что при указанном вычислении $h_1 > 0$, и из определения II в пункте 17.

Аксиома д) тоже вытекает из только что приведенных соображений, если к ним добавить следующее замечание. Обозначим через $x_1(t)$; $y_1(t)$; $z_1(t)$ траекторию точки P_1^*, как зависящую от местного времени, и пусть k и h два любых положительных числа. Тогда из (4) следует, что сфера

$$(x - x_1(t + k))^2 + (y - y_1(t + k))^2 + (z - z_1(t + k))^2 - h^2 = 0$$

всегда находится целиком внутри сферы

$$(x - x_1(t))^2 + (y - y_1(t))^2 + (z - z_1(t))^2 - (h + k)^2 = 0.$$

20. Наконец, чтобы рассчитать непрерывное распространение света вдоль произвольной кривой $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ среды $\mathfrak{B}$, обозначим через $t(s)$ местное время в $\mathfrak{A}$, когда пробегающий нашу кривую световой сигнал достигает точки $P^*(s)$ этой кривой. Тогда в среде $\mathfrak{A}$ имеем, в силу уравнений (1),

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial a}\frac{da}{ds} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial b}\frac{db}{ds} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial c}\frac{dc}{ds} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial s},$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial a}\frac{da}{\partial s} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial b}\frac{db}{\partial s} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial c}\frac{dc}{ds} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial t}\frac{dt}{ds},$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial\Phi_3}{\partial a}\frac{da}{ds} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial b}\frac{db}{ds} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial c}\frac{dc}{ds} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial t}\frac{dt}{\partial s}. \qquad (7)$$

Но, согласно пункту 15, так как (по предположению) в $\mathfrak{A}$ свет распространяется нормально, имеем

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2. \qquad (8)$$

Подставив значения (7) в (8), получим квадратное уравнение для $\frac{dt}{ds}$, которое в силу (4) имеет положительный действительный корень. Итак, функцию $t(s)$ можно вычислить, проинтегрировав дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$\frac{dt}{ds} = \psi(s,t), \qquad (9)$$

и так как $\psi > 0$, то $t(s)$ — монотонно растущая функция от s.

21. Выведем необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять функции (1), чтобы распространение света в $\mathfrak{B}$ тоже было нормальным.

Для этого должно существовать отображение

$$a = a(x', y', z'); \quad b = b(x', y', z'); \quad c = c(x', y', z') \qquad (10)$$

пространства параметров a, b, c на пространство x', y', z' с необращающимся в нуль функциональным определителем

$$\frac{\partial (a, b, c)}{\partial (x', y', z')} \neq 0, \tag{11}$$

обладающее следующими свойствами: переменные x', y', z' представляют прямоугольные координаты эвклидового пространства, в котором, согласно результатам пункта 15, время прибытия всех одновременно посланных световых сигналов, распространяющихся вдоль кривых, соединяющих две точки P^* и Q^* среды $\mathfrak{B}$, зависит только от длины этих кривых и монотонно увеличивается вместе с ней.

Рассмотрим кривую γ^* длины s, соединяющую начало координат O^* среды $\mathfrak{B}$ с произвольной точкой P^* этого пространства. Световой сигнал, посылаемый вдоль этой кривой из точки O^* в момент $t = 0$ в точку P^*, попадет в P^* по местному времени в момент t, который зависит, согласно предыдущему и в силу определения II в пункте 17, только от координат x', y', z' точки P^* и от длины s. Итак, это время поступления сигнала t задается соотношением

$$t = t(x', y', z', s'), \tag{12}$$

а то, что t монотонно растет с длиной нашей кривой s, выражается неравенством

$$\frac{\partial t}{\partial s} > 0. \tag{13}$$

22. Вводим в среде $\mathfrak{B}$ местное время t', измеряемое часами, установленными в каждой точке $\mathfrak{B}$. Согласно пункту 15, мы можем так согласовать эти часы, чтобы рассмотренное в последнем параграфе время приема светового сигнала всегда определялось уравнением

$$t' = s. \tag{14}$$

Отсюда зависимость между местным временем в $\mathfrak{A}$ и местным временем в $\mathfrak{B}$ в касающихся друг друга точках обеих сред выражается, согласно последним трем соотношениям, уравнением

$$t = t(x', y', z', t') \tag{15}$$

при добавочном условии

$$\frac{dt}{dt'} > 0. \tag{16}$$

23. Если подставить в уравнение (1) вместо a, b, c их значения (10), вместо t — его значение (15), получим уравнения

$$x = x(x', y', z', t');$$

$$y = y(x', y', z', t');$$

$$z = z(x', y', z', t'), \tag{17}$$

которые, вместе с (15), определяют однозначное отображение *четырехмерного* пространства (x, y, z, t) на четырехмерное пространство (x', y', z', t'). Действительно, применяя (2), (11) и (16), находим, что должно соблюдаться условие

$$\frac{\partial(x, y, z, t)}{\partial(x', y', z', t')} \neq 0. \tag{18}$$

Итак, аксиома и) в сочетании с понятием среды $\mathfrak{B}$, движущейся внутри $\mathfrak{A}$ со скоростью, меньшей скорости света, и в которой свет распространяется нормально, естественно, приводит к введению четырехмерной вселенной Минковского.

24. Отображение, определяемое уравнениями (15) и (17), не является произвольным. Действительно, по нашему построению вдоль каждой кривой

$$x'(t'), \quad y'(t'), \quad z'(t')$$

пространства x', y', z' уравнение (15) является следствием дифференциального уравнения (9) (в котором s заменено на t'), причем в качестве параметра t' берется длина дуги, т. е. соблюдается условие

$$dt'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2. \tag{19}$$

Но уравнение (9) эквивалентно уравнению (8), а последнее можно записать в виде

$$dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{20}$$

В конечном счете уравнение (20) посредством преобразования, определяемого соотношениями (15) и (17), должно быть следствием уравнения (19). Но дифференциалы dx, dy, dz, dt — линейные и однородные функции от dx', dy', dz', dt', которые можно вычислить по уравнениям (15) и (17). Следовательно, выражение

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$$

можно рассматривать как квадратичную форму от dx', dy', dz', dt', которая, согласно изложенному, должна обращаться в нуль всегда, когда $dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - dt'^2 = 0$. Но это имеет место тогда и только тогда, когда существует функция $\mu\,(x', y', z', t')$, для которой тождественно удовлетворяется соотношение

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 = \\ = \mu\,(x', y', z', t')\,(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - dt'^2). \tag{21}$$

25. Если $t = iu$ и $t' = iu'$, то уравнение (21) будет означать, что пространство x, y, z, t' *конформно* отображается на пространство x', y', z', t'.

Но, согласно знаменитой теореме Лиувилля [1], любое конформное отображение пространства более чем двух измерений сводится к последовательности отображений подобия и инверсий. Напомним простой ход мыслей в доказательстве этой теоремы, данном С. Ли [2], чтобы показать, что теорема Лиувилля остается в силе и для наших преобразований пространства x, y, z. Будем исходить из замечания, что уравнение (21) можно истол-

---

[1] Liouville. J. de Mathém., 12 (1847), p. 265, Note VI; Monge. Applications de l'Analyse à la Géométrie, 5 éd., Paris, 1850; R. Beer. Ztschr. fur Math. u. Phys., 20 (1875), S. 252; G. Darboux. Ann. Éc. Norm., (2) 7 (1878), S. 282; S. Lie, Gött. Nachr., 1871, S. 191, 535.

[2] Lie-Scheffers. Geometrie der Berührungstransformationen. London, S. 419.

ковать как перестановку между собой элементарных конусов $dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 = 0$ четырехмерного пространства x, y, z, t. Но гиперповерхность $V(x, y, z, t) = 0$, удовлетворяющая уравнению в частных производных

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{dz}\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2;$$

в любой своей точке касается такого конуса и таким образом преобразуется в поверхность $V^1(x^1, y^1, z^1, t^1)^1 = 0$, удовлетворяющую тому же дифференциальному уравнению. Поэтому переставляются и *характеристики* этого дифференциального уравнения, т. е. образующие конуса

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - (t - t_0)^2. \qquad (22)$$

Тем самым мы перенесли свойство, указанное для элементарного конуса $dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 = 0$, на конечный конус (22). Именно в этом и состоит главный вывод в доказательстве, который нельзя было предвидеть и из которого прочее легко получается. И это можно высказать теперь в следующем виде:

если две среды с нормальным распространением света любым образом движутся друг относительно друга, то каждый прямолинейный луч света одной среды преобразуется опять-таки в прямолинейный луч света. В частности, световые многоугольники преобразуются в световые многоугольники *с тем же числом сторон*, а не в криволинейный путь, как можно было бы предполагать.

26. Чтобы закончить доказательство, заметим, что гиперповерхности (23)

$$a(x^2 + y^2 + z^2 - t^2) + 2bx + 2cy + 2dz + 2et + f = 0 \qquad (23)$$

«встречают» [1] свои трехмерные тангенциальные пространства с точкой соприкосновения x_0, y_0, z_0, t_0 на том же конусе второго порядка, что и гиперповерхности (22). Этот конус либо действителен для всех тангенциальных пространств поверхностей (23), либо для всех их мним в зависимости от того, положительно или отрицательно выражение $(b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - af)$. При помощи ли-

[1] «Встречают» здесь равносильно «пересекают».

нейных построений проективной геометрии можно доказать, что существует только одна гиперповерхность с такими свойствами, которая касается в заданной точке заданного линейного трехмерного пространства и содержит вторую произвольно заданную точку.

Итак, каждая поверхность должна удовлетворять уравнению вида (23) и отсюда следует, что при наших преобразованиях гиперповерхности (23) переставляются.

27. Совокупность преобразований, удовлетворяющих уравнения (21), образует группу, которая содержит подгруппу линейных преобразований. Эта подгруппа состоит из преобразований подобия вселенной Минковского в себя. Как известно, кроме преобразований Лоренца, она содержит только тривиальные преобразования.

Кроме того, как показывает вычисление, преобразование

$$x = \frac{x'}{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (t')^2}; \quad y = \frac{y'}{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (t')^2};$$
$$z = \frac{z'}{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (t')^2}; \quad t = \frac{t'}{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} \tag{24}$$

является нелинейным преобразованием нашей группы. Обозначим его через R. Последнее обладает свойством преобразовывать все линейные трехмерные пространства в гиперповерхности, удовлетворяющие уравнению (23), если постоянное слагаемое f равно нулю, и наоборот. Пусть W — произвольное преобразование нашей группы. Можно определить такое преобразование сдвига T вселенной Минковского в себя, чтобы начало координат было неподвижной точкой преобразования WT^{-1}. Следовательно, согласно предыдущему, преобразование WT^{-1} переставляет гиперповерхности (23) с постоянным слагаемым, равным нулю. Итак, преобразование $RWT^{-1}R$ линейно, т. е. совпадает с преобразованием подобия A вселенной Минковского. А так как R — инволюция, т. е. $R^{-1} = R$, то

$$W = RART, \tag{25}$$

что доказывает теорему Лиувилля.

28. Исходя из преобразования (25), в каждом частном случае выписываем уравнения (15) и (17) в явном виде и, исходя из них, получаем уравнения движения. Так полностью решена проблема, сформулированная в пункте 21.

Специальный принцип относительности

29. *Специальный принцип относительности Эйнштейна* утверждает, что два световых пространства $\mathfrak{A}$ и $\underline{\mathfrak{C}}$ могут так двигаться друг относительно друга, что не только остается нормальным распространение света, но и все законы природы преобразуются ковариантно.

Преобразования, которые удовлетворяют этому принципу относительности, должны входить в число тех, которые введены в предыдущем разделе. Однако среди последних содержатся и преобразования, при которых законы механики преобразуются нековариантно.

Действительно, для каждого положительного λ преобразование

$$x + \lambda = \frac{\lambda^2 (\lambda - x')}{s'}\,; \quad y = \frac{\lambda^2 y'}{s'}\,; \quad z = \frac{\lambda^2 z'}{s'}\,; \quad t = \frac{\lambda^2 t'}{s'},$$

$$s'(\lambda) = (\lambda - x')^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2 \tag{26}$$

содержится в (25). Выберем λ настолько большим, чтобы можно было пренебречь квадратом $1 : \lambda$. Из (26) получаем, что

$$\frac{\lambda^2}{s'} = 1 + \frac{2x'}{\lambda} + \frac{3x'^2 - y'^2 - z'^2 + t^2}{\lambda^2} + \ldots$$

Подставляя это в первые четыре уравнения преобразования, находим с нужным приближением, что

$$x = \left(1 + \frac{2x'}{\lambda}\right) x' - \frac{s'(0)}{\lambda}\,; \quad y = \left(1 + \frac{2x'}{\lambda}\right) y'\,;$$

$$z = \left(1 + \frac{2x'}{\lambda}\right) z'\,; \quad t = \left(1 + \frac{2x'}{\lambda}\right) t'. \tag{27}$$

Если вместо уравнений (10) взять

$$a = x' + \frac{x'^2 - y'^2 - z'^2}{\lambda}; \quad b = y' + \frac{2x'y'}{\lambda}; \quad c = z' + \frac{2x'z'}{\lambda} \quad (28)$$

и учесть, что из четвертого уравнения в (27) следует, если пренебречь $1 : \lambda^2$,

$$t' = t\left(1 - \frac{2a}{\lambda}\right),$$

то в нашем случае уравнения движения (1) получатся в виде

$$x = a + \frac{t^2}{\lambda}; \; y = b; \; z = c. \quad (29)$$

Итак, оба световых пространства движутся друг относительно друга с постоянным ускорением. Но один из самых давних экспериментальных законов механики состоит в том, что две координатные системы, которые движутся таким образом одна относительно другой, механически не эквивалентны. Итак, при преобразованиях (27) два пространства с нормальным распространением света, правда, переходят одно в другое, но эти преобразования не удовлетворяют принципу относительности.

30. Теперь общим образом докажем, что *если преобразования специального принципа относительности образуют непрерывную группу, то они должны быть линейны.*

С этой целью сначала освободимся от некоторых тривиальных преобразований, которые содержатся в группе преобразований предыдущего раздела. Действительно, подходящим выбором ориентировки системы осей (x_1', y_1', z_1', t') всегда можно добиться того, чтобы, кроме условия

$$\frac{\partial t}{\partial t'} > 0, \quad (30)$$

которое потребовалось в пункте 22, соблюдалось неравенство

$$\frac{\partial (x, y, z, t)}{\partial (x', y', z', t')} > 0. \quad (31)$$

Затем можно доказать (используя, например, что, вследствие закона инерции для квадратичных форм коэффициент μ в уравнении (21) всегда положителен), что совокупность преобразований нашей группы, удовлетворяющих условиям (30) и (31), снова образует группу, притом непрерывную.

31. Существует пятнадцать бесконечно малых преобразований этой непрерывной группы. Чтобы их удобнее было выписать, введем следующие обозначения:

$$x_1 = x;\ \ x_2 = y_1;\ \ x_3 = z;\ \ x_4 = t;$$

$$R = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2. \tag{32}$$

Теперь можно сгруппировать эти пятнадцать бесконечно малых преобразований следующим образом: среди них имеются четыре *сдвига*

$$X_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4);$$

три пространственных *вращения*

$$Y_{ij} f = x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad (i,j=1, 2, 3);$$

три *лоренцовых преобразования*

$$L_i f = x_4 \frac{\partial f}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial f}{\partial x_4}, \qquad (i = 1, 2, 3);$$

преобразование подобия

$$Af = \sum_{i=1}^{4} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i};$$

четыре *нелинейных преобразования*

$$B_i f = 2x_i \sum_{j=1}^{4} x_j \frac{\partial f}{\partial x_i} - R \frac{\partial f}{\partial x_i}; \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$Cf = 2x_4 \sum_{j=1}^{4} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + R \frac{\partial f}{\partial x_4}.$$

Из этих пятнадцати преобразований три преобразования $\beta_i f_x$ в силу соображений, указанных в пункте 26, не являются бесконечно малыми преобразованиями группы принципа относительности. Чтобы доказать, что такая группа состоит только из линейных преобразований, остается показать, что подлежит удалению и Cf.

32. Нет ни одной собственной подгруппы нашей пятнадцатичленной группы, которая содержала бы одновременно бесконечно малые преобразования $X_i f$ и Cf. Образуя так называемые скобки, последовательно получаем зависимости

$$(X_iC)\,f = 2L_if; \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$(X_4C)\,f = Af;$$

$$(L_iC)\,f = B_if, \ (X_j, B_i)\,f = 2Y_{ij}f,$$

что доказывает наше утверждение.

Так как преобразования $X_i f$ приводят к простым сдвигам системы координат, которые, конечно, удовлетворяют принципу относительности, а преобразования $B_i f$, как мы только что видели, должны быть удалены, то же относится к Cf [1].

Нет необходимости дальше развивать эти выводы: в предположении, что преобразования линейны, группу специального принципа относительности после работы Пуанкаре (1906 г.) столько раз рассматривали, что вряд ли следует добавлять к сказанному.

[1] Это дает ответ на вопрос, на который обратил внимание В. Паули. Enzyclopädie der math. Wissenschaften, V. 19, Relativitätstheorie, S. 554.

ОБ ОСНОВАХ ТЕРМОДИНАМИКИ

К. КАРАТЕОДОРИ

Введение

Одним из самых замечательных результатов, полученных в исследованиях прошлого столетия по термодинамике, следует считать вывод, что эту дисциплину можно обосновать, прибегая только к гипотезам, проверяемым экспериментально. Большинство авторов в течение полувека, прошедшего со времени великих открытий Р. Майера, измерений Джоуля и работ Клаузиуса и В. Томсона, придерживались следующей точки зрения.

Существует физическая величина, называемая теплотой, отличная от механических величин (массы, силы, давления и т. д.), изменение которой можно определить при помощи калориметрических измерений. Теплота сравнима при определенных обстоятельствах с обычной механической работой. Кроме того, при соприкосновении тел различной температуры теплота всегда переходит от более теплого к более холодному телу, наоборот — никогда. Хотя не вводятся другие предложения относительно сущности теплоты, можно построить теорию, учитывающую всю совокупность опытных результатов. Понимание этой теории позже было облегчено введением

---

[1] Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamyk. Mathematische Annalen, 67 (1909), 355—386; см. также C. Carathéodory. Gesammelte mathematische Werke, B. 2. München, 1955, S. 131—177. — Перевод И. Б. Погребысского.

нового понятия энергии. Постепенно выяснилось, что это понятие важно для всей физики. Эта физическая величина зависит лишь от мгновенного состояния рассматриваемых веществ. Теплота не имеет такого преимущества.

Так первое начало теории теплоты приняло форму определения энергии и утверждало, что в каждом конкретном случае эту величину можно определить механическими и калориметрическими изменениями.

Однако несколько авторов подметили, что при таком подходе мы допускаем «переопределенность» [1]. Теорию можно построить, не предполагая существования физических величин, отличающихся от обычных механических величин,— теплоты.

Цель настоящей работы — возможно яснее и детальнее изложить это. Ту или иную физическую теорию можно излагать различными способами. Я избрал такую последовательность выводов, которая как можно меньше отходит от классических доказательств и выявляет параллелизм, который должен существовать между утверждениями теории и тем, что дают действительно выполненные измерения. При таком изложении понятия «адиабатический» и «адиабатически изолированный» не сводятся, как обычно, к понятию энергии, а определяются некоторыми физическими свойствами. При этом аксиому, составляющую первое начало, можно сформулировать так, чтобы она тоже соответствовала постановке опытов Джоуля, если рассматривать использованный в них калориметр как адиабатически изолированную систему.

Избранная формулировка второго начала близка к формулировке Планка. Последнюю пришлось изменить лишь в связи с тем, что при нашем способе изложения теплота и количество теплоты до этого еще не определены.

Мы подробно исследовали условия, при которых адиабатическое изменение состояния обратимо, скорее—систему условий, достаточных для обратимости. Так, мы приходим к определению некоторых термодинамических систем, которые можно назвать простыми, так как они

---

[1] Enzyklopädie d. math. Wissenschaften, v. V, Bryan, Thermodynamik, S. 81; J. P e r r i n. Le contenu essentiel des principes de la thermodynamique. Bullet. de la Soc. franc. de philos., VI (1906), p. 81.

ведут себя как простейшие, известные в термодинамике системы. Это определение отлично от определений, введенных Брайэном в указанной статье [1].

Наконец, чтобы ввести в рассмотрение системы с любым числом степеней свободы, пришлось ввести вместо обычно используемого цикла Карно, наглядного и легко воспринимаемого лишь в случае систем с двумя степенями свободы, одну теорему из теории пфаффовых дифференциальных уравнений. Простое доказательство этой теоремы дано в разделе «Лемма из теории уравнений Пфаффа».

В заключение хотелось бы обратить внимание и на то, что температура не только не вводится заранее в качестве одной из координат, а получается как следствие определенных соотношений, устанавливаемых в разделе «Условия теплового равновесия». В заключение указаны основания для того, чтобы предпочесть такой подход к понятию температуры — это связано с явлениями излучения.

Определения

В работе описаны термические свойства систем, состоящих из химически различных веществ. Однако те общие принципы, на основе которых мы хотели получить такое описание, выявляются уже тогда, когда мы, краткости ради, сужаем проблему, вводя те же допущения, что и Гиббс в первой части его работы «О равновесии неоднородных веществ» [2]. В конце статьи указывается, как на основе тех же принципов можно рассмотреть дальнейшие вопросы.

Итак, вместе с Гиббсом [3] мы постулируем, что имеются системы, которые состоят (по крайней мере в равновесном состоянии) из конечного числа жидких или газообразных однородных сред, «фаз».

Предполагается, что можно пренебречь дальнодей-

---

[1] Там же, стр. 80.

[2] J. W. G o b b s. On the equilibrium of heterogeneous substances. Scientific Papers, I, p. 55.

[3] Там же, стр. 62.

ствием, например силой тяжести, равно как электромагнитными и капиллярными силами [1].

Мы определяем исследуемые системы S только при помощи приписываемых им определенных «значков», полный набор которых характеризует систему. С этой целью рассмотрим какое-либо равновесное состояние и будем последовательно перебирать ее фазы, т. е.

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n.$$

Каждой фазе (φ_i) соотносим значки двух видов: с одной стороны, определенные признаки, которыми качественно определяется химический состав φ_i, так что указываются различные вещества и соединения, входящие в φ_i, с другой стороны,— числа, получаемые измерением. Эти числа представляют следующие величины:

а) общий объем V_i фазы φ_i;

б) давление p_i фазы φ_i на соприкасающиеся с нею тела;

в) количества $m_{1i}, m_{2i}, \ldots, m_{\beta i}$ различных веществ и соединений в единице объема φ_i.

Например, если первая фаза φ_1 состоит из раствора поваренной соли в воде, то в нашей теории определенное положение равновесия этой фазы полностью характеризуется числами V_1, p_1 и символическим уравнением вида

$$\varphi_1 = m_{11}\,(\mathrm{H_2O}) + m_{21}\,(\mathrm{NaCl}). \qquad (1)$$

Однако символическими уравнениями вида (1) и совокупностью чисел

$$V_i,\ P_i,\ m_{ki} \quad i = 1, 2, \ldots \alpha, \qquad (2)$$
$$k = 1, 2, \ldots, \beta$$

определяются все фазы φ_i, каждая в отдельности, но не вся система S. Следует учесть также свойства, которые связаны с соприкосновением различных фаз как между собой, так и со стенками содержащих их сосудов. При этом мы будем считать массы этих стенок достаточно малыми, чтобы сами стенки не вводить в качестве фаз φ_i. В более общей теории, когда фазами могут быть и твердые тела, изотропные и кристаллические, такое ограничение отпадает.

---

[1] Из раздела «Аксиомы» видно, каковы следствия этих допущений.

Но физические свойства стенок сосудов, содержащих одну или несколько фаз, весьма разнообразны. Например, подобный сосуд Γ может быть таков, что находящиеся в Γ фазы остаются в равновесии, а установленные для них числа (2) сохраняют свое значение, когда тела вне сосуда изменяются любым образом, лишь бы сосуд Γ оставался неподвижным и сохранял свою первоначальную форму. «Термос» мог бы быть примером такого сосуда. Стенки сосуда Γ не обязаны быть твердыми. Можно вообразить деформируемый сосуд Γ, обладающий указанными свойствами. Следует лишь ограничиться такими изменениями тел, находящихся вне сосуда Γ, при которых испытываемые сосудом давления не вызывают его деформации.

Сосуд, обладающий такими свойствами, будем называть *«адиабатическим»*, а находящиеся в нем фазы — *«адиабатически изолированными»*. Если две фазы φ_1, φ_2 соприкасаются вдоль твердой адиабатической стенки, то вследствие такого соприкосновения, по аналогии с предыдущим, не может возникнуть никакой зависимости между V_1, p_1, m_{k1} и V_2, p_2, m_{k2}. Иными словами, любые два равновесных состояния фаз, находящихся по обе стороны от такой стенки, могут сосуществовать.

При иных твердых стенках дело обстоит так, что равновесие вообще возможно лишь при выполнении одного или нескольких условий вида

$$F(V_1, P_1, m_{k1};\ V_2, P_2, m_{k2}) = 0. \qquad (3)$$

Тогда говорят, что стенка «проницаема». Стенка может быть проницаемой или только «для теплоты» или, кроме того, для некоторых из соприкасающихся с нею химических веществ, или налицо еще более сложные обстоятельства. Какой смысл мы вкладываем в эти различные выражения — это надо точно определять каждый раз, когда мы экспериментально устанавливаем зависимости вида (3), выражающие термодинамические свойства рассматриваемых стенок. Для твердой стенки к этому добавляется условие равенства давлений по обе стороны от нее.

Существуют также необходимые условия равновесия вида (3), когда между фазами φ_1, φ_2 нет материальной стенки и они соприкасаются непосредственно.

Исследование подобных зависимостей, встречающихся в практике, составляет одну из главных задач измерительной термодинамики. В дальнейшем мы учтем наиболее важные из них. Предварительно достаточно знать, что если записать (для упрощения обозначений) числа (2) в виде

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n+\Lambda}, \tag{4}$$

то для равновесия необходимо, чтобы удовлетворялись не зависящие друг от друга уравнения

$$\begin{gathered} F_1(c_0, c_1, \ldots, c_{n+\Lambda}) = 0; \\ F_2(c_0, c_1, \ldots, c_{n+\Lambda}) = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_\Lambda(c_0, c_1, \ldots, c_{n+\Lambda}) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Теперь предположим, что можно экспериментально установить *все* такие зависимости для S, т. е. что каждой системе чисел (4), удовлетворяющей уравнениям (5), соответствует положение равновесия. В каждом конкретном случае, как показывает опыт, такое допущение осуществимо.

Определение 1. *Две системы S и S' будем называть «эквивалентными», если их фазы находятся в одноoднозначном соответствии, в смысле уравнения* (1), *и если их соответствующие друг другу коэффициенты c_i, c_i' должны удовлетворять одинаковым или математически эквивалентным условиям* (5), *чтобы было возможно равновесие.*

В дальнейшем мы не будем различать взаимно эквивалентные системы. Итак, «значки», *определяющие* нашу систему S,— это, с одной стороны, символические уравнения вида (1), с другой, система уравнений (5).

Присоединим к системе (5) $n+1$ уравнений вида

$$\begin{gathered} G_0(c_0, c_1, \ldots, c_{n+\Lambda}) = x_0; \\ G_1(c_0, c_1, \ldots, c_{n+\Lambda}) = x_1; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ G_n(c_0, c_1, \ldots, c_{n+\Lambda}) = x_n. \end{gathered} \tag{6}$$

Функции G_i надо выбрать так, чтобы при изменении величин c_i в пределах, указываемых практикой, и с одновременным учетом условий (5) между возможными системами значений

$$c_0, c_1 \dots, c_{n+\Lambda}$$

и соответствующими им значениями

$$x_0, x_1, \dots, x_n$$

соблюдалось однооднозначное соответствие. Для этого необходимо (но не достаточно), чтобы функциональный определитель

$$\frac{\partial (G_0, G_1, \dots, G_n; F_1, F_2, \dots, F_\Lambda)}{\partial (c_0, c_1, \dots, c_{n+\Lambda})}$$

при всех допустимых значениях c_i был отличен от нуля [1]. Поэтому систему уравнений (5), (6) можно решить относительно c_i и считать c_i функциями от $x_0, x_1, \dots, x_n$,

$$c_i = c_i(x_0, x_1, \dots, x_n), \tag{7}$$

тождественно удовлетворяющими при подстановке в (5) этой системе.

Однозначная зависимость между различными возможными положениями равновесия системы S и системами значений

$$x_0, x_1, \dots, x_n \tag{8}$$

дает средство для сравнения этих состояний и для их представления с помощью «обобщенных координат», аналогичных координатам, используемым в механике.

Как говорят, каждой системе значений чисел (8) соответствует некоторое «состояние» системы S, и мы будем называть числа x_i *«координатами состояния»*.

Чтобы в дальнейшем воспользоваться языком геометрии, удобно рассматривать координаты состояния как декартовы координаты $(n+1)$-мерного пространства. Тогда каждому состоянию S будет соответствовать некоторая точка этого многомерного пространства, а совокупность рассматриваемых положений равновесия будет од-

[1] Из того, что функциональный определитель не равен нулю, следует однозначная зависимость между c и x лишь «в малом», «локально», т. е. в окрестности любой точки, но это не означает, что область G величин x не налегает сама на себя.

нозначно отображаться на некоторую область G этого пространства.

Мы приходим к следующему итоговому положению.

Определение 2. *Для характеристики положений равновесия любой системы следует учитывать лишь координаты состояния* (8); *и две эквивалентные системы, для которых эти величины совпадают, с точки зрения термодинамики следует считать тождественными.*

Теперь обратимся к «изменениям состояния» S, т. е. к переходам из одного положения равновесия в другое. Изменение состояния, подобно положениям равновесия, характеризуется определенными числами.

В качестве таких чисел можно взять координаты начального и конечного состояний. Далее, учитывается еще одна величина, относимая к каждому изменению состояния, которую называют «внешней работой». Эта величина, обозначаемая A, для рассматриваемых систем зависит только от деформации формы S[1].

Она должна тождественно совпадать с механической работой тех сил, с которыми S действует во время рассматриваемого изменения на внешние (на соприкасающиеся с S) тела. Физическое значение этих сил ясно, и A можно всегда измерить с помощью механических устройств, подобных применяемым в технике при испытаниях паровых и газовых двигателей.

Введем еще одну характеристику изменений состояния. Именно, если все время изменения состояния система S остается *адиабатически* изолированной, это изменение назовем *адиабатическим*. Такие адиабатические изменения состояния образуют особый класс.

Мы приходим, таким образом, к следующему определению:

Определение 3. *Каждое изменение состояния характеризуется координатами начального и конечного состояний, произведенной при этом изменении внешней работой и указанием, является ли оно адиабатическим.*

---

[1] Это следствие того обстоятельства, что мы пренебрегли дальнодействием.

Аксиомы

Разъясненные понятия удовлетворяют некоторым аксиомам, т. е. обобщениям опытных фактов, наблюдаемых при особенно простых обстоятельствах. В термодинамике известны две такие аксиомы, не зависящие одна от другой. Первая составляет основу «первого начала» теории теплоты и является выражением общего принципа энергии для рассматриваемых систем.

Сформулируем ее следующим образом:

Аксиома 1. *Каждой фазе φ_i любой системы S в положении равновесия соответствует функция ε_i величин* (2)

$$V_i,\ P_i,\ m_{ki},$$

пропорциональная общему объему v_i этой фазы и называемая ее внутренней энергией.

Сумма по всем фазам

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$$

называется внутренней энергией системы. При каждом адиабатическом изменении состояния сумма изменения энергии и внешней работы равна нулю, т. е.

$$\bar{\varepsilon} - \varepsilon + A = 0, \tag{9}$$

где ε — начальное, $\bar{\varepsilon}$ — конечное значение энергии.

В такой формулировке первого начала содержатся сделанные в начале работы допущения; мы пренебрегаем силами, действующими на расстоянии, и силами капиллярными. Если бы, например, учитывались и капиллярные силы, это означало бы, что сумма всех объемных энергий фаз не дает всей энергии ε системы S и что к этой сумме надо прибавить некоторые слагаемые, связанные с поверхностями раздела фаз. Если надо было бы учесть силы, действующие между фазами на расстоянии, то добавились бы новые слагаемые, которые зависели бы не от одной фазы, а сразу от нескольких.

Второе начало, к которому мы сейчас переходим, другого рода. Установлено, что при всех адиабатических изменениях состояния, при которых мы исходим из любого, но одного и того же начального состояния, нельзя достичь некоторых конечных состояний и что такие «недостижимые» конечные состояния имеются сколь угодно близко к заданному начальному состоянию.

Впрочем, физические измерения не могут быть абсолютно точными, поэтому содержание этого экспериментального утверждения шире, чем математическое содержание высказанного положения. Мы должны потребовать, чтобы, если исключаются какие-то точки, исключалась и малая область вокруг этой точки, а размеры этой области зависят от точности измерений. Чтобы не учитывать, какова эта точность, целесообразно принять соответствующую аксиому в несколько более общем виде.

Аксиома 2. *В любой окрестности произвольно заданного начального состояния имеются состояния, которые нельзя как угодно точно аппроксимировать адиабатическими изменениями состояния.*

Простые системы

Задача дальнейшего исследования сводится к тому, чтобы показать, исходя из обоих начал, что можно определить внутреннюю энергию каждой рассматриваемой физической системы и заодно найти общие свойства функции ε.

Такая проблема сравнительно легко решается для некоторых частных систем, которые назовем «простыми». Если удается представить заданную фазу φ_1, внутреннюю энергию которой мы ищем, как составную часть такой простой системы, а предыдущие исследования дали нам значение внутренней энергии остальных фаз, то есть все необходимые данные, так как, согласно аксиоме 1,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \ldots - \varepsilon_\alpha.$$

Проблема построения для заданной фазы «простой системы» в любом практически встречающемся случае — одна из важнейших, правда, и одна из труднейших проблем измерительной термодинамики. Физико-химики называют это «сделать процесс обратимым». В нашем общем анализе такая проблема не рассматривается — нам достаточно знать, что, вообще говоря, ее можно решить.

Свойства, характерные для «простых систем»,— это свойства разного рода. Во-первых, все координаты состояния системы S, *кроме одной*, должны зависеть только от внешнего вида системы. Такие координаты, определяющие внешний вид S_1, мы будем называть *координатами деформации*; с учетом уравнений (5) они должны содержать только величины $V_1, V_2, \ldots, V_\alpha$. Так обстоит дело, например, если система состоит только из одной фазы, у которой все координаты состояния, кроме давления p и общего объема V, постоянны, или если S состоит из двух таких фаз, разделенных твердой стенкой, проницаемой только «для теплоты». В таком случае внешний вид S зависит от двух величин — общих объемов V_1, V_2 — ее составных частей, и у системы две координаты деформации, тогда как на четыре подлежащие рассмотрению величины V_1, P_1, V_2, P_2 накладывается вследствие проницаемости стенки одна зависимость

$$F(V_1, P_1, V_2, P_2) = 0,$$

так что S в итоге определяется тремя координатами состояния.

Из первого свойства простых систем следует, что, зная при адиабатическом изменении состояния начальное положение простой системы S, можно вычислить ее конечное состояние по ее конечному виду и по величине внешней работы, произведенной при изменении состояния, с помощью уравнения (9)

$$\bar{\varepsilon} - \varepsilon + A = 0.$$

Предполагается, что энергия ε известна как функция координат состояния и, что, как увидим, ε не определяется видом системы.

Второе условие, которое должно соблюдаться для простых систем, состоит в том, что внешняя работа, производимая при адиабатическом изменении состояния, не должна однозначно определяться начальным и конечным состояниями. Напротив, должны быть возможны такие адиабатические изменения состояния, при которых мы переходим от заданного начального к одному и тому же конечному состоянию с разными значениями произведенной работы. Например, если газ находится в адиабатическом цилиндре, закрытом подвижным поршнем, то производимая при движении поршня работа при заданном расширении газа будет той или иной в зависимости от скорости поршня.

Из этого условия следует, если обратиться к уравнению (9), что энергия ε, как функция координат состояния x_i, заведомо содержит ту координату, которая не зависит от внешнего вида S. Пусть x_0 такая координата, а x_1, $x_2, \ldots$, x_n — координаты деформации нашей системы. Рассмотрим различные возможные значения A при переходе системы из заданного начального состояния к заданному конечному ее виду. Совокупность этих значений можно представить точечным множеством на некотором отрезке. В качестве третьего свойства простых систем предположим, что в любом случае это точечное множество всегда связано. Иными словами, оно должно заполнять какой-то промежуток, который, впрочем, может простираться до бесконечности и в одну, и в другую сторону.

Из последнего свойства с учетом уравнения (9) следует, что при тех же условиях возможные значения x_0 тоже составляют связанное точечное множество, по крайней мере тогда, когда область изменения координат состояния берется в пределах некоторой окрестности начального состояния.

Очевидно, что при действии подходящих внешних сил можно перейти от любого заданного начального положения к любому возможному конечному виду системы. Более того, можно задать изменение вида системы S, происходящее при адиабатическом изменении состояния, как функцию времени. Иными словами, можно задать n функций

$$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t) \qquad (10)$$

и потребовать, чтобы при изменении состояния координаты x_1, x_2, ..., x_n изменялись со временем согласно (10). Такое новое описание изменения состояния, при котором мы не обращаем внимания только на то, как изменяется x_0, значительно подробнее того, которым мы пользовались ранее. Но мы оставляем вопрос открытым, однозначно ли определяется величина внешней работы, производимой при таком адиабатическом изменении состояния, начальным состоянием и функциями (10). Напротив, если система деформируется «бесконечно медленно», т. е. точнее говоря, если производные

$$x_1'(t),\ x_2'(t),\ \ldots,\ x_n'(t)$$

равномерно стремятся к нулю, работа A в пределе должна стремиться к определенному значению. Изменение состояния, которое происходит настолько медленно, что разница между производимой внешней работой и указанным предельным значением ее лежит ниже границы наблюдения, мы будем называть *квазистатическим*. Если при квазистатическом адиабатическом изменении состояния внешняя работа задана как функция времени, то, учитывая уравнение

$$\varepsilon\{x_0,\ x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)\} - \varepsilon_0 + A(t) = 0$$

(ε_0 — начальное значение энергии), можно считать координату x_0 известной функцией от t. Поэтому квазистатическое адиабатическое изменение состояния можно рассматривать как *последовательность положений равновесия*, и каждому такому изменению состояния в пространстве x_i соответствует определенная кривая.

Введем последнее условие: при каждом квазистатическом изменении состояния внешнюю работу A можно измерить так, как если бы производящие ее силы были такими, какие необходимы для сохранения равновесия (если мы, согласно предыдущему, представляем изменение состояния в виде последовательности положений равновесия). А такие силы зависят только от состояния.

Поэтому выражение для работы должно быть вида

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} DA, \tag{11}$$

где DA обозначает пфаффову форму,

$$DA = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n, \tag{12}$$

а $p_1, \ldots, p_n$ являются функциями от $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Функции p_i можно определить экспериментально, измеряя для каждого состояния S те силы, которые должны извне действовать на S, чтобы было равновесие. Уравнение (9) второго начала можно записать для квазистатических адиабатических изменений состояния в виде

$$\int_{t_0}^{t} [d\varepsilon + DA] = 0. \tag{13}$$

Так как эта зависимость верна для любого t, то представлять квазистатические адиабатические изменения состояния могут лишь такие кривые $(n+1)$-мерного пространства x_i, для которых соблюдается уравнение Пфаффа

$$d\varepsilon + DA = 0. \tag{14}$$

Наоборот, каждую кривую $(n+1)$-мерного пространства x_i, удовлетворяющую уравнению (14), можно рассматривать как изображение квазистатического адиабатического изменения состояния нашей простой системы.

Действительно, пусть параметрически задана дуга такой кривой уравнениями

$$x_0 = x_0(\tau);\ x_2 = x_2(\tau); \ldots, x_n = x_n(\tau), \tag{15}$$
$$0 \leqslant \tau \leqslant 1.$$

Если $\tau = \lambda t$, где t — время, λ — параметр, можно ввести адиабатические изменения состояния, удовлетворяющие при любом заданном значении λ уравнениям

$$x_1 = x_1(\lambda t);\ x_2 = x_2(\lambda t); \ldots, x_n = x_n(\lambda t).$$

При достаточно малом λ такое изменение состояния квазистатично и, согласно предыдущему, оно должно удовлетворять уравнению (14). Проинтегрировав (14), получим $x_0 = x_0\ (\lambda t)$, что доказывает наше утверждение. Но если подставить в уравнение (15)

$$\tau = 1 - \lambda t,$$

то при возрастающем t и достаточно малом λ была бы пройдена та же кривая, только в противоположном направлении. Получаем следующую теорему: *квазистатические адиабатические изменения состояния простой системы «обратимы».*

При обычном изложении теории «обратимые» изменения состояния вводят как нечто наглядно данное. Однако при более внимательном рассмотрении оказывается, что свойства, приписываемые обратимым процессам, точно такие же, какие мы положили в основу определения простых систем. Сведем их воедино.

Определение. *«Простая» система с $(n+1)$ координатами состояния $x_0, x_1, \ldots, x_n$ должна удовлетворять следующим условиям:*

1) *пекоординат, например $x_1, x_2, \ldots, x_n$,— координаты деформации;*

2) *внешняя работа A при адиабатических изменениях состояния не определяется однозначно начальным положением и окончательным видом S; множество всех возможных при этих условиях значений A связано;*

3) *при «квазистатических» адиабатических изменениях состояния внешняя работа равна интегралу от некоторой пфаффовой формы вида*

$$DA = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n. \tag{16}$$

Обычно считают, что первое предположение о числе координат деформации влечет за собой два других. Так, в указанных примерах мы имеем дело с простыми системами. Такое допущение, которое мы принимаем, приемлемо для обычно рассматриваемых веществ, в частности для газов и жидкостей: получаемые отсюда следствия, как показывает опыт, хорошо согласуются с результатами измерений.

Вполне допустимо, притом физически, что в природе есть вещества, которые никогда нельзя считать составной частью какой-либо простой системы. Так было бы, например, если бы внутреннее трение рассматриваемого вещества, которое вообще является функцией скорости деформации, не стремилось к нулю при квазистатических изменениях состояния. Действительно, силы, производящие внешнюю работу A, не были бы тогда сравнимы с силами, обеспечивающими равновесие; внешнюю работу A нельзя было бы представить в виде пфаффовой формы (12), и, наконец, квазистатические изменения состояния не были бы обратимыми. Нашу теорию нельзя непосредственно распространить на подобные системы, что, впрочем, относится в равной мере и к классической термодинамике.

Применив аксиому второго начала к квазистатическим адиабатическим изменениям состояния простых систем, можно определенным образом пронормировать координаты состояния таких систем. Для этого потребуется одна математическая теорема об уравнениях Пфаффа, которую мы сейчас докажем.

Лемма из теории уравнений Пфаффа

Пусть задано уравнение Пфаффа

$$dx_0 + X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_n\,dx_n = 0, \qquad (17)$$

где X_n — конечные, непрерывные, дифференцируемые функции от x_i, и пусть известно, что в любой окрестности любой точки P пространства x_n есть точки, недостижимые вдоль кривых, удовлетворяющих этому уравнению. Тогда для левой части уравнения (16) обязательно существует множитель, обращающий его в полный дифференциал.

Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — координаты P. Согласно условию, есть бесконечно много точек P_i, для которых P предельная точка, и таких, что никакая дуга кривой, удовлетворяющая уравнению (16), не соединяет P и P_i. Но поскольку коэффициент при dx_0 не нуль, всегда можно найти кривые C, которые удовлетворяют дифференциальному уравнению (16), содержат P_i и лежат в двумерной плоскости, соединяющей P_i с прямой G,

$$x_0 = t, \; x_k = a_k, \; (k = 1, 2, \ldots, n),$$

если только P уже не находится на этой прямой. Пусть Q_i — точка пересечения C_i с G. По построению точки Q_i

с возрастанием i должны сходиться к P. Вместе с тем, точек Q_i нельзя достичь из P вдоль кривых, удовлетворяющих уравнению (17), так как в противном случае, добавив кривую C_i, можно было бы достичь из P и точек P_i, что противоречит условию. Отсюда следует, что в любом интервале прямой G, содержащем P, находятся точки, которые недостижимы из P.

Введем прямую G_1, параллельную G, а во всем остальном произвольную, и любой двумерный цилиндр, соединяющий G_1 и G.

Пусть M — точка, в которой прямую G_1 пересекает кривая, удовлетворяющая уравнению (17), расположенная на этом цилиндре и содержащая P. Как бы мы ни изменяли цилиндр, точка M должна оставаться неизменной,— в противном случае интегральная кривая дифференциального уравнения (16), которая на измененном цилиндре проходит через M, могла бы содержать произвольную точку окрестности P, и мы могли бы из P через M дойти до некоторых из точек Q_i вдоль интегральных кривых уравнения (16), что исключается.

Если непрерывно изменять положение прямой G_1, точка M будет описывать n-мерную поверхность, и все интегральные кривые уравнения (17), проходящие через P, должны лежать на этой поверхности. Но точка P взята произвольно; изменяя ее положение, получаем семейство поверхностей

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = C,$$

зависящих от параметра C, на которых должны лежать все интегральные кривые уравнения (17). Поэтому в уравнениях

$$dx_0 + X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_n\, dx_n = 0;$$

$$\frac{dF}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n = 0$$

коэффициенты при dx пропорциональны, так что получаем уравнение

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_0} \{dx_0 + X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_n\, dx_n\},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} \neq 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x_0} \neq \infty,$$

и наша теорема доказана.

Нормировка координат простой системы

Пусть S — простая система, зависящая от координат

$$\xi_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \tag{18}$$

причем последние n величин из (18) представляют координаты деформации, а внешняя работа при квазистатических изменениях состояния равна интегралу от

$$DA = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n.$$

Адиабатические квазистатические изменения состояния такой системы можно представить интегральными кривыми уравнения Пфаффа

$$d\varepsilon + DA = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi_0} d\xi_0 + X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n = 0,$$

$$X_i = \frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i} + p_i. \tag{19}$$

Если бы можно было достичь, исходя из заданной начальной точки, некоторой ее окрестности, двигаясь по интегральным кривым уравнения (19), можно было бы также, в силу наших допущений относительно простых систем, аппроксимировать любое конечное состояние с помощью адиабатических изменений состояния. Но последнее невозможно, согласно нашей аксиоме II. С другой стороны, для простых систем $\partial\varepsilon/\partial\xi_0$ не равно нулю тождественно, поэтому, если отвлечься от некоторых особых точек, можно разделить (19) на $\partial\varepsilon/\partial\xi_0$, и тогда мы будем в тех же условиях, что и в предыдущем разделе. Поэтому для выражения (19) существует множитель, отличный и от нуля, и от бесконечности. Обозначив его через $1/M$, получаем

$$d\varepsilon + DA = M dx_0, \tag{20}$$

где x_0 — некоторая функция переменных (18). Сравнивая (19) и (20), находим, что

$$\frac{\partial x_0}{\partial\xi_0} = \frac{1}{M}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi_0},$$

и это, согласно предыдущему, отлично от нуля. Поэтому уравнение $x_0 = x_0 (\xi_0, x_1, \ldots, x_n)$ можно решить относительно ξ_0 и ввести вместо ξ_0 в качестве $(n + 1)$ координаты нашей системы x_0, наряду с n координатами деформации.

Если мы так поступим, то выражение для внешней работы

$$DA = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n \tag{21}$$

сохранит свой первоначальный вид, так как в нем нет дифференциала $d\xi_0$. Тогда p_i будут функциями новых переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Функцию M в (20) тоже надо считать зависящей от тех же переменных.

Кривые, соответствующие адиабатическим квазистатическим изменениям состояния нашей системы, удовлетворяют уравнению

$$x_0 = \text{const.} \tag{22}$$

Каждую кривую пространства x_i, на которой x_0 постоянно, можно считать образом такого изменения состояния. Действительно, уравнение (22) равносильно (19), а в разделе «Простые системы» мы видели, что удовлетворяющие последнему уравнению кривые обладают указанным свойством.

Если учесть, что уравнение (20) есть тождество и заменить в нем DA согласно (21), получим соотношения

$$M\, dx_0 = d\varepsilon + DA = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_0} dx_0, \tag{23}$$

$$p_i = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}, \text{ где } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{24}$$

Систему координат, удовлетворяющую условиям (21), (23), (24), будем называть «нормированной». Система остается нормированной при замене x_0 произвольной функцией $f(x_0)$ этой же величины, что, впрочем, непосредственно вытекает из теории множителя пфаффовой формы. А в термодинамике из всех возможных нормированных систем можно выделить одну систему, которая определяется с помощью физических свойств твердых стенок, проницаемых только для теплоты. Это будет нашей ближайшей задачей.

Условия теплового равновесия

Пусть даны две системы S_1 и S_2 с нормированными координатами

$$x_0, x_1, \ldots, x_n;$$

$$y_0, y_1, \ldots, y_m.$$

Пусть эти системы разделены твердой стенкой, проницаемой только для теплоты. Такая стенка определяется следующими свойствами.

1. Координаты деформации обеих рассматриваемых систем можно изменять независимо друг от друга после наложения такой связи.

2. Если вся система адиабатически изолирована, то за конечное время после любого изменения ее вида наступает равновесие.

3. Вся система S лишь тогда (но обязательно тогда) находится в равновесии, когда имеет место определенная зависимость вида

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_n; y_0, y_1, \ldots, y_m) = 0. \tag{25}$$

4. Системы S_1 и S_2 находятся в равновесии, когда каждая из систем S_1 и S_2 находится (при аналогичных условиях) в равновесии с какой-то третьей системой S.

Последнее условие равносильно следующему: из трех уравнений, которые, аналогично (25), обусловливают равновесие между S_1 и S_2; S_1 и S_3; S_2 и S_3,

$$\begin{aligned} F\,(x_0, x_1, \ldots, x_n; y_0, y_1, \ldots, y_m) &= 0; \qquad (26)\\ G\,(x_0, x_1, \ldots, x_n; z_0, z_1, \ldots, z_k) &= 0;\\ H\,(y_0, y_1, \ldots, y_m; z_0, z_1, \ldots, z_k) &= 0, \end{aligned}$$

каждое является следствием двух остальных.

Но это возможно только тогда, когда система уравнений (26) равносильна системе вида

$$\rho\,(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sigma\,(y_0, y_1, \ldots, y_m) =$$
$$= \tau\,(z_0, z_1, \ldots, z_k).$$

В частности, условие (25) можно заменить двумя уравнениями вида

$$\begin{aligned} &\rho\,(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \tau; \\ &\sigma\,(y_0, y_1, \ldots, y_m) = \tau, \end{aligned} \tag{27}$$

где τ — новая переменная.

Величину τ называют *температурой, а уравнения* (27) — уравнениями состояния систем S_1 и S_2.

С другой стороны, система (27) равносильна системе вида

$$W\,(\rho) = \tau_1, \;\; W\,(\sigma) = \tau_1,$$

где W — произвольная функция. Поэтому функции (27) не определены однозначно. Эту неопределенность выражают, говоря, что можно еще произвольно выбрать «шкалу температур».

Из наших предположений следует, что, по крайней мере, одна из величин $\frac{\partial \rho}{\partial x_0}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial y_0}$ не равна тождественно нулю. Действительно, если бы обе они были нулями, то ρ и σ зависели бы только от $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_2, \ldots, y_m$. Но это все координаты деформации, которые можно изменять независимо друг от друга. Поэтому можно было бы достичь состояний, для которых удовлетворяется уравнение (25), что противоречит нашему предположению относительно теплового равновесия.

Итак, одна из этих величин, например $\partial\rho/\partial x_0$, отлична от нуля, и в точках «общего положения» можно выразить x_0 через остальные $n + m + 1$ координат с помощью уравнения $\rho = \sigma$. Следовательно, систему S можно считать системой с $n + m + 1$ степенями свободы, имеющей $n + m$ координат деформации. Согласно нашему допущению, на стр. 202, S — простая система, к которой применимы прежние рассуждения.

Абсолютная температура

В соответствии с предположениями предыдущего раздела энергия ε всей системы S равна сумме энергий обеих ее составных частей ε_1 и ε_2. Внешняя работа A для S при любом изменении состояния также равна сумме соответствующих работ A_1 и A_2 систем S_1 и S_2. Но последние системы были простыми, а их координаты нормированы, поэтому можно записать, что

$$d\varepsilon_1 + DA_1 = M(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, dx_0;$$
$$d\varepsilon_2 + DA_2 = N(y_0, y_1, \ldots, y_m)\, dy_0.$$

Сложив эти уравнения, получим

$$d\varepsilon + DA = M\, dx_0 + N\, dy_0. \tag{28}$$

Система S, как мы показали, тоже простая система, поэтому правая часть в (28) с учетом (27) должна иметь множитель.

Предположим, что в природе имеется по крайней мере одна система, уравнение состояния которой содержит одну или несколько координат деформации. Такое предположение оправдывается, например, для газов. Если мы выберем такую систему в качестве S_1, то для нее функция ρ содержит по крайней мере одну из величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, например, x_1. Тогда в уравнении (28) можно считать M функцией от

$$x_0,\ \tau,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n.$$

Примем во внимание следующие возможности для уравнения состояния

$$\sigma(y_0, y_1, \ldots, y_m) = \tau.$$

1. Если σ не зависит ни от одной из величин $y_0, y_1, \ldots, y_m$, то в M надо подставить вместо τ какое-то определенное значение. В получающемся тождестве

$$du = \lambda\, [M\, dx_0 + N\, dy_0] \tag{29}$$

функция u должна зависеть только от x_0 и y_0, так что λM и λN тоже зависят только от этих двух переменных.

А так как y_i не входят в M, то λ не может содержать ни одной из координат деформации системы S_2. Но последние не входят и в λN, поэтому они не входят и в N, так что N зависит лишь от y_0.

2. Если σ зависит только от одной координаты состояния y_0, то можно подставить в M величину τ, как функцию y_0. Аналогично приходим к выводу, что Nu в этом случае зависит лишь от y_0.

Оба случая в природе не наблюдаются, но они не противоречат нашим предположениям относительно простых систем.

3. Наконец, рассмотрим случай, когда в τ входит по крайней мере одна координата деформации. Пусть это будет, например y_1; эту величину y_1, следовательно, и величину N можно считать функцией от y_0, τ, y_2, y_3, . . ., y_m. В (29) λM и λN по-прежнему функции только от x_0 и y_0.

Так как ни M, ни λM не содержат координат y_2, y_3, . . ., y_m, то это верно и для λ. Следовательно, N тоже не зависит от этих величин, иначе они входили бы и в λN.

Применяя аналогичные рассуждения к x_i, получаем, что λ может зависеть не более чем от x_0, y_0, τ, M — только от x_0 и τ, а N только от y_0, τ. А так как M и λN не зависят от τ, получаем

$$M\frac{d\lambda}{\partial\tau}+\lambda\frac{\partial M}{\partial\tau}=0;\quad N\frac{\partial\lambda}{\partial\tau}+\lambda\frac{\partial N}{\partial\tau}=0,$$

так что логарифмическая производная от λ по τ, $\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\tau}$, не может зависеть ни от y_0, ни от x_0 и, следовательно, λ является произведением функции только от τ и функции от x_0 и y_0. Итак,

$$\lambda=\frac{\psi(x_0,\, y_0)}{f(\tau)},$$

откуда следует (поскольку λM зависит только от x_0, y_0), что M должно иметь вид $M = f(\tau)\,\alpha\,(x_0)$.

Таким же образом получаем, что

$$N = f(\tau)\,\beta\,(y_0).$$

Самым общим расщеплением M и N на два множителя, из которых один зависит только от τ, а второй — только от x_0, соответственно от y_0, будет

$$M = Cf(\tau)\frac{\alpha(x_0)}{C}, \quad N = Cf(\tau)\frac{\beta(y)_0}{C}, \tag{30}$$

где C — произвольная, отличная от нуля постоянная. Если исходить из заданной шкалы температур, то для любой системы, уравнение состояния которой содержит одну из координат деформации, функция $f(\tau)$ полностью определена с точностью до мультипликативной постоянной и одинакова для всех таких систем. Для систем, рассмотренных в первых двух разделах, возможно такое расщепление функции N. Таким образом, функция $f(\tau)$ имеет вполне общий физический смысл. Определяемая этой функцией температурная шкала

$$t = Cf(\tau)$$

называется *«абсолютной»*. Чтобы определить и постоянную, задаются разностью двух определенных температур, например, температур таяния льда и кипения воды при заданном давлении.

Энтропия

Для каждой простой системы можно, согласно (23) и (30), так пронормировать координаты, чтобы

$$DA = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1}dx_1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2}dx_2 - \ldots - \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_n}dx_n;$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_0} = \frac{t\alpha(x_0)}{C},$$

где t — абсолютная температура. Введем с помощью уравнения

$$\eta - \eta_0 = \int\limits_{a_0}^{x_0}\frac{\alpha(x_0)}{C}dx_0 \tag{31}$$

новую координату η. Уравнение (31) можно решить относительно x_0, так как M, как (согласно (30)), и α, отлично от нуля. Тогда полный дифференциал энергии получается в виде

$$d\varepsilon = t d\eta - DA. \tag{32}$$

Новую координату η называют, по Клаузиусу, *«энтропией»* системы; она определяется из (31) с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

Для системы $S = S_1 + S_2$, которую мы рассматривали в предыдущем разделе, получаем для каждого квазистатического изменения состояния

$$d\varepsilon = d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 = t\,(d\eta_1 + d\eta_2) - DA_1 - DA_2,$$

где η_1, η_2 — энтропии систем S_1, S_2. Если с помощью уравнений

$$\eta_1 + \eta_2 = \eta; \tag{33}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \eta_1} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \eta_2} = 0$$

выразить η_1 и η_2 в виде функций от x_i, y_k и от новой переменной η, то опять получим полный дифференциал общей энергии ε в виде (32). Итак, энтропия всей системы равна сумме энтропий различных ее частей. Это аддитивное свойство энтропии сохраняется и тогда, когда S_1 и S_2 отделены стенками, отличающимися от рассматриваемых, т. е. от проницаемых только для теплоты. Это побудило многих физиков рассматривать энтропию как физическую величину, связанную, как и масса, с любым протяженным телом, только зависящую от состояния тела в данный момент.

Так как энтропия, согласно (30), зависит при нормированных координатах только от x_0, она остается неизменной при всяком адиабатическом квазистатическом процессе. И каждое изменение состояния простой системы, при котором энтропия остается постоянной, обратимо, как это разъяснено выше.

Необратимые изменения состояния

Относительно простых систем мы предположили, что при адиабатических изменениях состояния значения работы, возможные для заданного начального состояния и конечного вида системы, образуют связное числовое множество. Если определить с помощью формулы, верной для *любого* адиабатического процесса,

$$\varepsilon(\eta, x_1, x_2, \ldots, x_n) - \varepsilon_0 + A = 0,$$

соответствующие значения энтропии η, то по соображениям непрерывности они тоже заполняют какой-то интервал.

Начальное значение энтропии η_0 обязательно должно быть точкой этого интервала, так как при квазистатических изменениях состояния, которые надо отнести к числу рассматриваемых, значение η остается неизменным.

Если бы η_0 была *внутренней* точкой интервала, можно было бы получить с помощью адиабатических изменений состояния любое значение η из некоторой окрестности η_0; затем, не изменяя η, путем квазистатических изменений состояния можно было бы произвольно менять координаты деформации. Но это противоречит аксиоме второго начала.

Итак, значение η_0 находится в конечной точке рассматриваемого интервала. Отсюда значение энтропии при любом адиабатическом изменении состояния, исходящем из данного начального состояния, либо не может возрастать, либо не может уменьшаться.

Меняя начальное состояние, из соображений непрерывности получаем, что для любых двух начальных состояний одной и той же системы под запретом находится изменение энтропии одного и того же знака. То же (вследствие указанного аддитивного свойства энтропии) относится и к двум различным системам.

Возрастает или убывает энтропия — это зависит еще от знака мультипликативной постоянной C в (31). Эту постоянную выбирают так, чтобы абсолютная температура была положительна. Тогда (и для этого достаточно одного эксперимента) энтропия не должна уменьшаться.

Отсюда, если при всех возможных изменениях состояния простой системы энтропия должна уменьшаться, то должно быть равновесие, т. е. в состоянии равновесия энтропия имеет максимум.

Кроме того, из наших соображений следует, что если энтропия не остается постоянной при каком-то изменении состояния, то нельзя адиабатическим изменением состояния перевести систему из ее конечного состояния в начальное.

Каждое изменение состояния, при котором энтропия изменяется, «необратимо».

Возможность экспериментального определения энергии, энтропии и абсолютной температуры

Следует показать, что введенные величины ε, η и t можно в каждом конкретном случае определить экспериментально. Это проще всего сделать, если предположить (и из этого мы будем исходить), что обратимые процессы можно наблюдать достаточно точно. Так как логических возражений это не встречает, приходим к выводу, что термодинамику можно обосновать чисто экспериментально, т. е. без всяких предположений относительно природы теплоты.

В действительности применение указанного метода наталкивается на трудности, возникающие из-за величины неизбежных ошибок наблюдения. Поэтому в проблеме выделяют две части: сначала определяют абсолютную температуру, но этот вопрос мы не можем здесь рассматривать, так как это потребовало бы обширных разъяснений. Но если t определили, то легко определить ε и η, как мы увидим далее, притом с помощью измерений, которые можно выполнить довольно точно. Предположим, что дана простая система S, которая зависит от координат ξ_0, x_1, x_2, . . ., x_n, причем x_i — координаты деформации.

Пусть можно определить с помощью измерений следующие функции:

1. Уравнения состояния для S при некоторой шкале температур τ.

$$\psi(\xi_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tau. \tag{34}$$

2. Коэффициенты пфаффовой формы для работы A

$$DA = p_1 dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots + p_n\, dx_n. \tag{35}$$

3. Коэффициенты уравнения Пфаффа для квазистатических адиабатических изменений состояния,

$$0 = \frac{1}{\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi_0}}(d\varepsilon + DA) = d\xi_0 + X_1\, dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_n\, dx_n. \tag{36}$$

Чтобы экспериментально определить коэффициенты $X_1, X_2, \ldots, X_n$ в последнем выражении, можно представить себе такие опыты. Рассматриваем адиабатические изменения состояния системы, при которых только одна координата деформации, например x_1, получает приращение Δx_1, а остальные $x_2, x_3, \ldots, x_n$ — постоянны. Измеряем получающееся при этом приращение Δ_0; тогда, если достаточно мало Δx_1 и изменение состояния происходило достаточно медленно, для рассматриваемого начального состояния

$$X_1 = -\frac{\Delta\xi_0}{\Delta x_1}.$$

В соответствии с предыдущими выводами, пфаффова форма (36) должна иметь множитель λ, обращающий ее в полный дифференциал. Это возможно только при условии, что x_i удовлетворяют определенным дифференциальным уравнениям, которые в силу этого должны подходить для всякой реальной системы, поскольку верна наша теория. Получаем уравнение

$$\lambda\,(d\xi_0 + X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n) = dx_0,$$

которое интегрируется. Взяв любой его интеграл в качестве x_0, можем ввести эту величину в качестве новой координаты. Тогда (34) переходит в

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \tau, \tag{37}$$

а (35) тоже сохраняет свою первоначальную форму, только надо считать p_i функциями новых переменных.

Если положим, что абсолютная температура

$$t = \beta(\tau),$$

то из уравнений (24) и (32) получим

$$d\varepsilon = \beta(\tau)\,\alpha(x_0)\,dx_0 - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n. \tag{38}$$

Функции α и β надо определить так, чтобы правая часть в (38) была интегрируемой.

Но это возможно лишь тогда, когда соотношение (35) интегрируемо при постоянном x_0; отсюда для p_i получаются определенные условия, которые должны выполняться для любой системы. Положим, что

$$x_2 = a_2,\ x_3 = a_3, \ldots,\ x_n = a_n,$$

где a_i — постоянные; введем следующие обозначения:

$$\tau = \varphi(x_0, x_1, a_2, \ldots, a_n) = f(x_0, x_1), \tag{39}$$

$$p_1(x_0, x_1, a_2, \ldots, a_n) = g(x_0, x_1). \tag{40}$$

Тогда

$$\beta\,[f(x_0, x_1)]\,\alpha(x_0)\,dx_0 - g(x_0, x_1)\,dx_1$$

должно быть полным дифференциалом, что дает условие

$$\beta'\,[f(x_0, x_1)]\,\frac{\partial f}{\partial x_1}\,\alpha(x_0) + \frac{\partial g}{\partial x_0} = 0,$$

или

$$\beta'(\tau)\,\alpha(x_0) = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x_0}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}\,. \tag{41}$$

Таким образом, правая часть этого уравнения после подстановки в нее выражения x_1 через x_0 и τ из (39) должна распадаться на два множителя, на функцию от x_0 и функцию от τ, так что

$$-\frac{\frac{\partial g}{\partial x_0}}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \Psi(x_0)\,\theta(\tau).$$

Окончательно получаем

$$t = \beta(\tau) = C\int_{\tau_1}^{\tau} \theta(\tau)\,d\tau + C' \quad \alpha(x_0) = \frac{1}{C}\Psi(x_0),$$

где C и C' — постоянные, подлежащие определению. Первое из этих уравнений дает абсолютную температуру, второе позволяет определить энтропию $\eta - \eta_0 = \frac{1}{C}\int_{\alpha_0}^{x_0} \Psi(x_0)\,dx_0$. Произвольно задав разность D абсолютной температуры между двумя определенными температурами τ_1 и τ_2, получим постоянную интегрирования C по формуле

$$C = \frac{D}{\int_{\tau_1}^{\tau_2} \theta(\tau)\,d\tau}.$$

Введя найденные значения α и β в (38), можно проинтегрировать это уравнение (если выполнены все условия интегрируемости, как и должно быть в каждом конкретном случае), что дает

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = C'(\eta - \eta_0) + F(\eta, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Итак, *с помощью обратимых процессов абсолютная температура определяется только с точностью до аддитивной постоянной, а внутренняя энергия — с точностью до линейной функции энтропии.*

Однако этой неопределенности можно избежать, установив раз и навсегда значение C' путем наблюдения только одного адиабатического *необратимого* процесса, например, такого, при котором не производится внешняя работа. В этом случае энергия остается постоянной, а изменения координат можно измерить, что дает линейное уравнение для C'.

Для идеальных газов расчеты таковы. Если в качестве координат при постоянстве общей массы газа взять давление p и удельный объем v, то уравнением состояния будет $pv = \tau$, а уравнение адиабатических кривых получается в виде $pv^{\gamma+1} = \mathrm{const}$.

Положим, что $v = x_1$, $pv^{\gamma+1} = x_0$; тогда формулы (39) и (40) примут вид

$$\tau = f(x_0, x_1) = x_0 x_1^{-\gamma},$$

$$p = g(x_0, x_1) = x_0 x_1^{-(\gamma+1)}.$$

Уравнение (41) получается в виде

$$\beta'(\tau)\,\alpha(x_0) = \frac{1}{\gamma x_0},$$

так что

$$t = \beta(\tau) = C\tau + C', \quad \alpha(x_0) = \frac{1}{C\gamma x_0};$$

$$d\varepsilon = \left[\frac{x_1^{-\gamma}}{\gamma} + \frac{C'}{C\gamma x_0}\right] dx_0 - x_0 x_1^{-(\gamma+1)}\, dx_1.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим, что

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{x_0 x_1^{-\gamma}}{\gamma} + \frac{C'}{C\gamma}\log x_0,$$

или, опять введя координаты τ и v,

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{\tau}{\gamma} + \frac{C'}{C_\gamma}\log\tau + \frac{C'}{C}\log v.$$

Необходим какой-либо необратимый процесс, чтобы получить значение C'. Например, при адиабатическом расширении, когда газ не производит работы, τ остается постоянным. Поэтому $C' = 0$, и мы приходим к формулам

$$\varepsilon = \frac{1}{C\gamma}t; \quad pv = \frac{1}{C}t,$$

которым легко придать обычный вид.

Определение ε и η на практике

Предполагается, что известна абсолютная температура и что для простой системы S (с координатами состояния $\xi_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$) можно путем измерений получить:

1. Уравнение состояния;

2. Функции $p_1, p_2, \ldots, p_i$ в пфаффовой форме для внешней работы.

3. «Теплоемкость» при сохранении формы. Последнее значит, что с помощью калориметрических измерений, т. е. наблюдая определенные необратимые процессы, можно получить величину $\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}$ при постоянных $x_1, x_2, \ldots x_n$. Из пункта 1 следует, что в качестве $(n+1)$ независимых координат можно взять $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$, где t — абсолютная температура. В этих координатах (32) переходит в

$$d\varepsilon = t\frac{\partial\eta}{\partial t}dt + \sum_1^n\left[t\frac{\partial\eta}{\partial x_i} - p_i\right]dx_i.$$

Так как это выражение должно быть полным дифференциалом, то в силу условий интегрируемости получаем

$$\frac{\partial\eta}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial t}\quad(i = 1, 2, \ldots, n). \tag{42}$$

Кроме того, согласно пункту 3, известна величина

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{1}{t}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}. \tag{43}$$

Уравнения (42) и (43) позволяют однозначно определить энтропию η_i с точностью до аддитивной постоянной, если для p_i и $\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}$ выполняются известные условия интегрируемости. Если же подставим значение (42) в $d\varepsilon$, получим уравнение

$$d\varepsilon = t\frac{\partial\eta}{\partial t}dt + \sum_1^n\left[t\frac{\partial p_i}{\partial t} - p_i\right]dx_i, \tag{44}$$

которое интегрируется при выполнении этих условий.

Таким образом, интеграция уравнений (42), (43) и (44) дает все нужные данные.

Приходим к аналогичным вычислениям, если измерения дают вместо теплоемкости при неизменной форме теплоемкость при постоянных внешних силах. При этом пришлось бы сначала вычислить не энергию ε, а «термодинамический потенциал»

$$\varepsilon - p_1 x_1 - p_2 x_2 - \ldots, - p_n x_n$$

Кристаллические среды

Все наши соображения и результаты можно применить в том более общем случае, когда некоторые из сред твердые и обладают кристаллическим строением. Разница будет только в том, что величины, характеризующие такие фазы, будут иными. Наряду с v, надо рассматривать инварианты деформации, определение которых дается в теории упругости. Так как каждую фазу в отдельности мы считаем однородной, то такие величины одинаковы в любой точке фазы и характеризуют фазу в целом.

Вместо давления, которое здесь уже зависит от направления, надо ввести «механические инварианты», т. е. коэффициенты при дифференциалах величин, определяющих деформацию, в пфаффовом выражении для внешней работы. Последнее тоже выводится в теории упругости.

Всего получаем с добавлением V 13 координат вместо двух (V, p), которые были до сих пор, но для частных кристаллических систем число их может быть меньше.

Напротив, химические координаты, т. е. величины m_{ki}, о которых шла речь в разделе «Определения» этой работы, остаются прежними.

Однако в таком случае существуют определенные зависимости между всеми этими величинами, даже если рассматривать фазы отдельно, тогда как раньше только при соприкосновении различных фаз возникали уравнения связи. По вопросу о выводе этих соотношений мы отсылаем к теории упругости.

Замечания о значении термодинамических теорем

Примененный способ вывода основных результатов термодинамики и особенно то, как введены понятия «абсолютной температуры» и «энтропии», позволяет предположить (хотя мыслимы и другие пути построения этой теории), что эти теоремы и понятия связаны с многочисленными допущениями и что область их применимости (соответственно) ограничена.

Конечно, возможны некоторые непосредственные обобщения. Так, можно сразу освободиться от предположения, что все наши среды однородны. Для этого следует считать наши координаты состояния функциями точки и соответственно изменить определения внутренней энергии и внешней работы, вводя подходящие интегралы. Трудности, вызываемые подобными обобщениями, чисто математические, их можно не учитывать, и они ни в коей мере не влияют на наши результаты. Подобным образом можно трактовать тот случай, когда учитываются капиллярные силы. Термодинамическую трактовку этой проблемы содержит цитированная работа Гиббса. По-видимому, там изложены основные соображения, которые должны дать удовлетворительное решение этих вопросов.

Иные трудности возникают в проблемах излучения и «движения теплоты», особенно в термодинамике движущихся сред. Уже при самых простых явлениях излучения нельзя обойтись конечным числом координат, давая определение эквивалентных систем или состояния системы. Эмиссионные, дисперсионные и абсорбционные свойства вещества надо указать для каждой длины волны, так что здесь необходимы для описания этих свойств не числа, а функции одной или нескольких переменных. Отличие здесь такое же, как в механике при переходе от системы с конечным числом степеней свободы к механике континуума.

Понятие температуры не является первоначальным, т. е. мы должны уметь ввести различные координаты состояния, не пользуясь этой величиной. Как мы видели, температура входит в расчет при установлении определенных условий равновесия. Можно было бы определить температуру некоторой излучающей среды S_1 условием, что S_1 находится в равновесии с одной из наших прежних систем S_2, обладающей уже определенной температурой t. Ясно, что такое определение приведет к неувязкам. Действительно, систему S_2 придется рассматривать как излучающую среду, и вполне допустимо существование двух систем S_2' и S_2'', которые по отношению к излучению различны, а в обычной термодинамике, использующей меньшее число координаты, одинаковы. Поэтому S_1 не обязательно будет одновременно в равновесии с S_2' и S_2''; в таком случае эта система не сможет иметь температуру в обычном смысле этого слова. Необходимо тщательно исследовать подобные вопросы. Аналогичные опасения можно высказать и по поводу понятия энтропии, которое тесно связано с понятием абсолютной температуры. Иного характера трудности в термодинамике движущихся сред (куда можно отнести и теорию теплопроводности), когда не учитываются явления излучения. Здесь, вероятно, можно было бы приписать определенную и меняющуюся со временем температуру каждой материальной точке системы. Однако эта температура, возможно, зависела бы от всех координат состояния, следовательно, и от скоростей. И все же нельзя бы применять наши прежние методы для определения энергии и уравнений движения. так как из-за непренебрежимого внутреннего трения все процессы здесь необратимы.

КРИТИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ПОВОДУ ТРАДИЦИОННОГО ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИКИ [1]

М. БОРН

Бад Пирмонт

Введение

Вспомогательные математические средства, которые нужны физику для изложения классических областей его науки, не слишком разнообразны: системы уравнений в частных производных господствуют в течение того периода, который теперь, на заре наступающего квантового века, мы видим уже завершенным. Повторно приходится встречаться лишь с поразительно малым числом дифференциальных уравнений. Нет ни одной области физики непрерывной среды, где бы не появлялось, например, уравнение Пуассона. Это обстоятельство, бросающееся в глаза даже начинающему, не случайно — оно является следствием метода исследования, порождаемого экономией мышления, поставляемых математикой форм. Сравнительно небольшое количество отработано так, что физик может кое-что предпринять с их помощью. А потому он будет перерабатывать свой эмпирический материал и извлеченные оттуда законы до тех пор, пока они не уложатся в одну из подготовленных форм. В классической физике логическая обработка какой-либо области лишь тогда признается законченной, когда она сведена к одной из глав «нормальной» математики.

---

[1] Phys. Zeitschrift, 22, 1921, s 218—224, 249—254, 282—286. Перевод И. Б. Погребысского.

Но есть одно поразительное исключение: классическая термодинамика.

Методы, обычно применяемые в этой дисциплине для вывода основных положений, резко отличаются от принятых в других областях. Это видно из того, что нет области физики, где бы применялись соображения и выводы, имеющие сходство с циклом Карно и тому подобным. Каковы же математические формы и положения, которые применяются в выводах термодинамики? Эти выводы трудно охарактеризовать математически: они настолько своеобразны и специфичны для физической дисциплины, что кажется, будто после изъятия физического содержания от них ничего не останется. А все-таки такого быть не может, потому что термодинамику венчает типично математическое утверждение — о существовании определенной функции параметров состояния, энтропии, и термодинамика дает методы вычисления этой функции. Итак, термодинамика в своем традиционном виде еще не воплотила в себе логического идеала отщепления физического содержания от математической формы.

Но в 1909 г. появилась работа К. Каратеодори [1], которая полностью решает такую задачу. Физики на эту работу почти не обратили внимания. Это отчасти связано с абстрактным, нацеленным на возможно большую общность изложением, отчасти с изданием, где работа была опубликована. Большинство физиков не обратило внимания на исследование по термодинамике, помещенное в «Математических анналах», в котором даже не упоминаются циклические процессы. Но работа заслуживает того, чтобы с ней познакомиться, и не только для лучшего уяснения основных понятий, но и ради тех преимуществ, которыми новое изложение обладает с педагогической точки зрения.

Чтобы облегчить изучение работы Каратеодори, я хочу попытаться представить здесь своим коллегам ее основные мысли в достаточно простом виде. Известно, что термодинамика в том виде, в каком ее создали великие мастера, обладает большой интеллектуальной привлека-

---

[1] C. Caratheodory. Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik. Math. Ann., 61, 1919, S. 355. Русский перевод см. выше, стр. 188—222.

тельностью и очень прочно утвердилась в сознании физиков. Несмотря на это, быть может, новое изложение завоюет себе друзей: пусть оно лишено тех удивительных озарений, которые точно волшебством приводят нас от простых опытных фактов к основным положениям, зато оно лучше «просматривается» и пользуется «нормальной» математикой, которую каждый учил.

Далее мы полностью дадим ту цепь умозаключений, которая ведет от опытных фактов к математическим формулам основных законов. Звенья, которые совпадают с обычным способом изложения, будут изложены вкратце; более подробно разъясняться будут те, в которых виден новый подход. Неизбежна критика классических доказательств, но это не означает принижения великолепных достижений мастеров науки, чья интуиция вывела нас на верный путь; нужно только отмести в сторону мусор, который не отваживалась удалить чересчур почтительная традиционность.

Определения

Мы ограничимся рассмотрением самых простых систем, которые состоят из химически неизменных газов и жидкостей. Однако наш метод без труда обобщается на произвольные системы, какие обычно рассматриваются в термодинамике. В заключение мы кратко остановимся на этом.

Мы считаем известными основные механические понятия, такие, как объем, масса, сила, давление и т. д., но неизвестны такие термические понятия, как температура, количество тепла и т. д. Наша цель — строго определить последние.

При чисто механическом подходе внутреннее состояние жидкости заданной массы определено, если известен ее объем; давление тогда есть функция объема. На деле этого нет: с помощью нагревания и охлаждения—процессов, которые сопровождаются ощущением тепла и холода, при постоянном объеме можно менять давление и наоборот. Термодинамический подход состоит в том, чтобы ввести в качестве независимой переменной, наряду с объемом

V, давление p. Примем, что внутреннее состояние тела (жидкости) полностью определено заданием V и p.

Отдельные тела такого рода снаружи и друг от друга отделены «стенками», которые мы не относим к рассматриваемым телам. Относительно физического поведения стенок примем определенные «идеализирующие» допущения. Рассмотрим стенки только двух видов с общим свойством непроницаемости для вещества.

Как известно, для теоретической термохимии важны и пропускающие вещество стенки, но их введение не влечет за собой новых принципиальных трудностей. Мы еще вернемся к этому.

Итак, ограничимся стенками нетеплопроводными (адиабатическими) и теплопроводными (диатермическими). Но, так как мы не ввели понятия теплоты, определение стенок надо дать так, чтобы в нем не было этого понятия.

Адиабатическая стенка характеризуется следующим свойством: если некоторое тело в адиабатической оболочке находится в состоянии равновесия, то при отсутствии дальнодействующих сил (Fernkräfte) его равновесие может быть нарушено только движением частей стенки и никакими другими внешними процессами. Это значит, если заранее воспользоваться термическими понятиями, что такая стенка не допускает изменения равновесия нагревом, а только затратой механической работы. Последнее, если исключить в нашем пространстве дальнодействие, может быть достигнуто лишь движением частей стенки (смещение, сжатие и т. п.). Без этого понятия адиабатической оболочки в нашей теории не обойтись, и оно таким же образом применяется в обычной термодинамике. Однако и практически как можно более совершенное его воплощение в «калориметре» является предпосылкой любого термодинамического измерения.

Диатермическая стенка характеризуется следующим свойством:— если два тела разделены диатермической стенкой и помимо этого они находятся в адиабатических оболочках, они не могут быть в равновесии при произвольных значениях их параметров состояния p_1, V_1 и p_2, V_2. Чтобы наступило равновесие, должно соблюдаться следующее соотношение этих четырех величин:

$$F(p_1, V_1, p_2, V_2) = 0. \tag{1}$$

Такое уравнение выражает термическое соприкосновение, а стенка введена лишь для того, чтобы исключить обмен веществ. Стенки, допускающие такой обмен (полупроницаемые), должны быть определены аналогичным образом (указано в заключительном параграфе).

Эмпирическая температура

Основой для понятия температуры является эмпирическое положение о том, что когда два тела находятся в термическом равновесии с третьим, то они в термическом равновесии и друг с другом. Если воспользоваться формулой (1) как выражением для термического соприкосновения, то эта теорема, очевидно, формулируется так:

если удовлетворяются уравнения

$$F_1(p_2, V_2, p_3, V_3) = 0; \quad F_2(p_1, V_1, p_3, V_3) = 0,$$

то удовлетворяется уравнение

$$F_3(p_1, V_1, p_2, V_2) = 0,$$

или в более общем виде: из любых двух таких соотношений следует третье. Это возможно лишь тогда, когда эти три уравнения равносильны следующим.

$$f_1(p_1, V_1) = f_2(p_2, V_2) = f_3(p_3, V_3).$$

Итак, условие равновесия (1) для двух тел можно всегда представить в виде

$$f_1(p_1, V_1) = f_2(p_2, V_2). \tag{2}$$

Одно из двух тел можно использовать как *термометр* и рассматривать значение функции

$$f_2(p_2, V_2) = \vartheta$$

как *эмпирическую температуру*. Тогда условие равновесия в форме (2) значит, что первое тело находится в равновесии со вторым, *термометром*, если существует определенная зависимость

$$f_1(p_1, V_1) = \vartheta \tag{3}$$

между параметрами состояния p_1, V_1 и эмпирической температурой ϑ. Это соотношение называется *уравнением состояния тела.*

Соответствующие кривые плоскости (p, V) называются *изотермами*. В качестве эмпирической температуры можно принять любую функцию от ϑ, изотермы при этом не изменяются. Такой выбор лимитируется только практическими соображениями. В качестве термометрических веществ надо выбирать лишь такие тела, у которых любые два различные состояния не находятся в термическом равновесии (стало быть, жидкости — только в области капельного или только в области газообразного состояния), иначе нарушается однозначность показаний термометра.

Необходимо подчеркнуть исключительный произвол в выборе определенной шкалы температур. Предпочтение, оказываемое газовому термометру, оправдывается тем, что, согласно практике, его показания в широких пределах не зависят от выбора газа. Последнее обусловлено тем, что для всех газов в состоянии высокого разрежения изотермы имеют вид гипербол $pV = \mathrm{const}$. Но на этом этапе развития теории нельзя логически обосновать то, что температурой газа считают как раз произведение $pV = \vartheta$, а не какую-либо функцию этой величины, хотя бы $(pV)^2 = \vartheta$ или $\sqrt{pV} = \vartheta$, разве что прибегнуть к сомнительному доводу «простоты» или заранее сослаться на последующие результаты термодинамики (см. раздел «Примеры»).

Если установлена температурная шкала, то вместо p, V можно ввести как параметры состояния p, ϑ или V, ϑ.

Первое начало

Обычно определяют понятие количества тепла и полагают, что это согласуется с историей развития понятий термодинамики. Тогда следует ввести понятие теплоты как вещества, которое течет от более теплого тела к более холодному, как и представляли до открытия Майера превращаемости теплоты в другие формы энергии. Но после этого открытия представление о теплоте как о веществе отпало. Когда было установлено, что тела могут нагреваться не благодаря отдаче ими теплоты окружающим телам, а благодаря затрате механической работы, понятие количества тепла, конечно, стало бессодержательным. Сначала надо установить закон указанного превращения; лишь после этого будет ясно, с какими предосторожностями следует измерять теплоту величиной «количества тепла».

Мы сначала не вводим понятие количества тепла; лишь позже мы свяжем его с опытными фактами, входящими в формулировку первого начала. Этим не только достигается бóльшая логическая отчетливость, но мы непосредственно исходим из тех экспериментов, которыми Джоуль доказал первое начало.

Эксперименты состоят в том, что находящееся в адиабатической оболочке тело (вода) переводится из состояния 1 в состояние 2 затратой механической или электрической работы и доказывается, что при фиксированных начальном и конечном состояниях всегда требуется затрата одной и той же работы, каким бы образом и в каком бы виде это ни происходило. Это и есть сущность первого начала. То, что изменение состояния тела определялось с помощью измерения температуры по некоторой эмпирической шкале и затем вычислялось в традиционных единицах тепла, является побочным обстоятельством. Принимается, что второй параметр состояния, объем, практически постоянен (не тратится сколько-нибудь заметная работа на расширение). Если, таким образом, опустить все лишние понятия, результат опытов Джоуля можно сформулировать так:

I начало: Чтобы адиабатически перевести какое-либо тело (или систему тел) из определенного начального состояния в определенное конечное, всегда необходима одна и та же механическая работа (соответственно электрическая энергия) независимо от способа перехода.

Для полной характеристики такого адиабатического изменения состояния используются следующие данные:

1) параметры равновесного начального состояния (для одного тела — p_0, V_0); 2) те же параметры для конечного состояния (p, V); 3) затраченная работа A. Если начальное состояние одно и то же, то работа A зависит только от значений параметров конечного состояния, тогда

$$A = U - U_0, \tag{4}$$

где U — функция состояния (следовательно, в случае одного тела функция p, V) и U_0 — ее значение в начальном состоянии. U — *энергия* системы.

Итак, разница между этим способом введения функции, выражающей энергию, и обычным в том, что в первом случае использованы лишь адиабатические процессы, тогда как принято определять U как сумму затраченной работы и теплоты при любых процессах. Последнее определение выходит за пределы того, что непосредственно дают эксперименты, и помимо этого использует понятие количества тепла, которому присущ атавистический характер неразрушаемой субстанции. При этом в тени остается тот факт, что U — это непосредственно измеримая величина, получаемая в экспериментах Джоуля как функция параметров состояния. Действительно, если начальное состояние раз и навсегда фиксировано, то для каждого адиабатически достижимого состояния можно измерить необходимую при этом работу, чем прямо определяется значение U в конечном состоянии. Таким образом, в принципе достижимо *любое* состояние, так как ограничение, накладываемое на достижимые состояния вторым началом, можно всегда устранить, поменяв местами начальное и конечное состояния.

При термодинамических измерениях действуют по этой схеме. Наиболее ясно это видно в новом методе Нернста для измерения энергосодержания (удельной теплоты): исследуемое тело является «калориметром», т. е. по возможности его адиабатически изолируют и измеряют, какую (электрическую) работу надо затратить, чтобы добиться определенного изменения состояния. Последнее определяется показаниями термоэлемента при соблюдении условия $V = \text{const}$.

Лишь *после* установления первого начала можно ввести понятие количества тепла.

Химики называют энергию самого тела *теплосодержанием*, а изменение энергии — *тепловым эффектом*. Это вполне оправдано, поскольку связанное с изменением энергии изменение состояния проявляется преимущественно в изменении температуры. Мы приблизимся к исторически возникшему понятию количества тепла, если примем в качестве тепловой единицы ту энергию, которая нужна для определенного изменения температуры 1 *г* воды (при постоянном объеме). Эта энергия, выражаемая в механических единицах (эргах), составляет (механический) *эквивалент тепла*. Первое начало указывает, в какой мере можно обращаться с теплотой традиционным образом — как с веществом (при использовании водяного калориметра): для того, чтобы теплота, не преобразуясь, «текла», нужно исключить всякую затрату работы. Так, увеличение энергии воды в калориметре измеряет уменьшение энергии погруженного в нее тела лишь тогда, когда приняты меры против изменений объема (соответственно против других явлений с затратой работы), либо когда такие изменения ничтожны. Сколь ни понятно само собою такое ограничение после установления первого начала, оно противоречит здравому смыслу. Теперь можно определить количество тепла и для произвольных процессов. Для этого надо принять, что известна энергия как функция состояния и измерена затраченная при любом процессе работа, тогда подведенное при этом процессе тепло есть

$$Q = U - U_0 - A. \qquad (5)$$

В дальнейшем понятие теплоты самостоятельной роли не играет. Мы пользуемся им лишь как кратким обозначением разности прироста энергии и затраченной работы.

Функцию, выражающую энергию, мы считаем определенной для каждого тела «калориметрическими» измерениями. Об энергии *системы* тел следует сказать следующее. Если два тела адиабатически изолированы, то (по определению) энергия системы равна сумме энергий тел, т. е.

$$U = U_1 + U_2. \qquad (5')$$

Вообще при соприкосновении двух тел их энергия не аддитивна, но отклонение пропорционально поверхности (соприкосновения) и при большом объеме пренебрежимо. Поступая таким образом, мы отмечаем на основании опыта, что и при термическом соприкосновении энергия ведет себя как аддитивная величина. А так как здесь мы будем иметь дело только с адиабатическими и диатермическими стенками, то уравнение (6) всегда можно применять.

Квазистатические (обратимые) изменения состояния

При формулировке первого начала механическую работу мы считали в принципе измеримой. Чтобы это было возможно на деле при любом процессе, как бы бурно он ни протекал, допустим, что можно замерять мгновенные значения сил, действующих на подвижные части стенок,— ведь работа подсчитывается как произведение перемещения и силы. Практически это достижимо лишь в немногих случаях, потому что при быстрых движениях в жидкостях возникают турбулентные течения и волны, и нет возможности контролировать вызываемое этим нерегулярное давление на стенки. Чтобы исключить такие явления, для измерения подводимой работы применяют главным образом два способа:

1. Пользуются стационарными процессами, например мешалкой (Rührer), вращающейся с постоянной скоростью (как в опыте Джоуля для определения теплового эквивалента). При этом создается установившееся течение жидкости, и мешалке приходится преодолевать постоянное сопротивление. Если пренебречь интервалами ускоренного движения в начале и в конце опыта (их можно сделать сколь угодно относительно краткими), то работу можно определить как произведение угловой скорости и вращательного момента мешалки. Сюда же относится (в принципе) и нагрев стационарным электрическим током.

2. Процесс ведут бесконечно медленно, так что в любой момент состояние можно считать равновесным. Такие

процессы следовало бы называть *квазистационарными*, но обычно пользуются словом «*обратимый*», так как вообще они обладают свойством обратимости. Мы не будем рассматривать те условия, при которых обратимость осуществляется. Допустим, что эти условия выполнены, и оба термина будем применять как равнозначные.

В обычной термодинамике каждую кривую фазового пространства (в случае жидкости — плоскости p, V) считают образом обратимого процесса. Считают, что можно обеспечить обратимый подвод тепла, последовательно приводя рассматриваемое тело в термическое соприкосновение с большими резервуарами тепла, лишь бесконечно мало отличающимися по температуре. Такие мысленные эксперименты дозволены. Но данный эксперимент слишком далек от выполняемых в действительности, и в нем есть нечто отталкивающее для математически вышколенного ума.

Ограничимся адиабатическими квазистатическими (обратимыми) процессами — они выполнимы и осуществляются в эксперименте, так как состоят в достаточно медленных движениях (адиабатических) стенок. Для таких процессов можно строго показать, что в пределе при бесконечно малых скоростях каждое промежуточное состояние является равновесным, поскольку кинетическая энергия уменьшается как квадраты скоростей.

Работа, сообщаемая жидкости при обратимом бесконечно малом изменении объема dV, есть

$$dA = -pdV, \tag{6}$$

где p — давление в состоянии равновесия. Поэтому первое начало запишется в виде

$$dQ = dU + pdV = 0. \tag{7}$$

Для системы тел, разделенных адиабатическими и диатермическими стенками, соответствующее уравнение получается сложением, так как функции, выражающие энергию и работу, аддитивны, например, для двух тел

$$dQ = dQ_1 + dQ_2 = dU_1 + dU_2 + p_1dV_1 + p_2dV_2 = 0. \tag{8}$$

Конечные квазистатические адиабатические изменения состояния представляют непрерывную последовательность равновесных состояний, т. е. в фазовом пространстве (для одного тела — на плоскости p, V) изображаются кривыми, в каждой точке удовлетворяющими условию (7) или (8). Эти кривые называются *адиабатами.*

Формулы (7) и (8), выражающие первое начало,— дифференциальные уравнения адиабат. Если U записать как функцию двух параметров состояния, скажем V и ϑ, то

$$dU = \frac{\partial U}{\partial V}\,dV + \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\,d\vartheta.$$

Поэтому, согласно (7), получаем

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial V} + p\right)dV + \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\,d\vartheta = 0. \qquad (7')$$

Уравнение (8) имеет значение лишь в случае термического соприкосновения двух тел: тогда система характеризуется тремя независимыми параметрами состояния, хотя бы обоими объемами V_1, V_2 и общей температурой ϑ, а давление выражается через эти параметры по уравнениям состояния

$$f_1(p_1, V_1) = f_2(p_2, V_2) = \vartheta.$$

Тогда из (8) получаем

$$dQ = \left(\frac{\partial U_1}{\partial V_1} + p_1\right)dV_1 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial V_2} + p_2\right)dV_2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial \vartheta} + \frac{\partial U_2}{\partial \vartheta}\right)d\vartheta = 0. \qquad (8')$$

Уравнения типа (7′) и (8′) называются *дифференциальными уравнениями* Пфаффа, и им должны удовлетворять адиабаты.

Необходимо познакомиться со свойствами таких уравнений. При традиционном изложении термодинамики без этого не обойтись. Наша цель — показать, что «абсолютная температура есть интегрирующий делитель дифференциала теплоты». Такое исследование обычно проводится поверхностно; во многих учебниках вообще нет определения интегрирующего множителя или делителя, хотя условия его существования выводятся. Наша задача не критиковать учебники, а показать, что по сравнению с лучшими изложениями классической теории надо лишь не намного продвинуться в исследовании интегрируемости уравнений Пфаффа, чтобы готовые формулы термодинамики посыпались, как спелые плоды.

Вспомогательные математические теоремы

Излагаемые результаты собственно составляют математический формализм термодинамики. Чтобы достичь отделения физического содержания от математической формы, будем развивать теорию дифференциальных уравнений Пфаффа самостоятельно. Речь пойдет о самых простых теоремах.

Рассмотрим на плоскости x, y пфаффову форму двух переменных

$$dQ = X\,dx + Y\,dy, \tag{9}$$

где X и Y — функции от x, y.

Таково термодинамическое уравнение (7′). dQ в общем случае вовсе не полный дифференциал. Если справедливо последнее, то $dQ = d\varphi$, где φ — функция от x и y. Тогда

$$X = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Следовательно, коэффициенты пфаффовой формы должны были бы удовлетворять условию

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}. \tag{10}$$

Решениями уравнения Пфаффа $dQ = 0$ являются кривые однопараметрического семейства на плоскости x, y : $y = y\,(x, c)$ или $\varphi\,(x, y) = C$, потому что это уравнение можно записать как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{X}{Y}, \tag{11}$$

где справа известная функция от x и y. Геометрический смысл этого дифференциального уравнения в том, что в каждой точке плоскости задается направление (11), и проинтегрировать уравнение значит провести такие кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с заданными направлениями.

Для этого семейства кривых должно быть и $dQ = 0$ и $d\varphi = 0$; следовательно, левые части должны быть пропорциональны. Положим, что

$$d\varphi = \frac{dQ}{\lambda}; \tag{12}$$

назовем λ *интегрирующим делителем* для dQ, так как dQ переходит в полный дифференциал $d\varphi$ путем деления на λ. Конечно, λ — функция от x и y.

Итак, пфаффова дифференциальная форма от двух переменных всегда имеет интегрирующий делитель.

Если заменить φ функцией от φ, скажем $\varphi^*(\varphi)$, то $\varphi^* = C$ тоже будет решением нашего дифференциального уравнения. Ведь

$$d\varphi^* = \frac{d\varphi^*}{d\varphi}\, d\varphi = \frac{d\varphi^*}{d\varphi} \cdot \frac{dQ}{\lambda} = \frac{dQ}{\lambda^*},$$

т. е. и

$$\lambda^* = \lambda \frac{d\varphi}{d\varphi^*} \tag{13}$$

есть интегрирующий делитель для dQ. Стало быть, всегда есть бесконечно много интегрирующих делителей, которые связаны между собой зависимостью (13).

Обратимся к пфаффовой форме от трех переменных:

$$dQ = X dx + Y dy + Z dz, \tag{14}$$

где X, Y, Z — непрерывные функции от x, y, z.

Такой вид имеет термодинамическое уравнение (8′).

Отношения дифференциалов $dx : dy : dz$ определяют направление в пространстве x, y, z. Итак, пфаффово уравнение $dQ = 0$ означает, что эти отношения удовлетворяют линейному уравнению, в силу которого в каждой точке пространства соответствующее направление находится в определенной плоскости.

В общем случае dQ — не полный дифференциал. Если это не так, т. е. $dQ = d\varphi$, где φ — функция от x, y, z, то

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Значит, коэффициенты пфаффовой формы должны были бы удовлетворять следующим трем зависимостям:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}; \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}; \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}. \tag{15}$$

Тогда каждая интегральная кривая удовлетворяла бы уравнению $\varphi(x, y, z) = c$, т. е. лежала бы на одной из поверхностей семейства, представляемого этим уравнением.

Возникает вопрос, можно ли и здесь всегда найти интегрирующий делитель $\lambda(x, y, z)$, чтобы $d\varphi = \frac{dQ}{\lambda}$ было полным дифференциалом. Если бы так было, то каждая интегральная кривая уравнения $dQ = 0$ удовлетворяла бы и уравнению $d\varphi = 0$, т. е. лежала бы на одной из поверхностей семейства $\varphi(x, y, z) = c$. Геометрически это значит, что соответствующие дифференциальному уравнению $dQ = 0$ плоскости, содержащие допустимые направления, совпадали бы с касательными плоскостями однопараметрического семейства поверхностей.

Но это вовсе не должно быть при любых коэффициентах x, y, z.

Каждой точке пространства можно непрерывным образом сопоставить проходящую через нее плоскость так, чтобы эти плоскости не обвертывали семейство поверхностей. Простейшим примером такой конфигурации является *линейный комплекс*, или *нулевая система*, описываемая так: через каждую точку P пространства проведены винтовые линии; все эти линии имеют одинаковый шаг k и общую ось — ось z; плоскости, перпендикулярные к касательным этих кривых, образуют линейный комплекс и обладают тем свойством, что никакой поверхности не обвертывают. Чтобы это показать, рассмотрим окрестность оси z. Плоскость, отнесенная точке P на самой оси, перпендикулярпа к оси; во всех бесконечно близких точках этой плоскости, равноудаленных от оси z, нормали к соответствующим этим точкам плоскостям скрещиваются с осью z и переходят одна в другую при вращении вокруг оси z. Ясно, что такая конфигурация плоскостей не касательна ни к какой поверхности.

То же можно вывести аналитически. Соответствующее линейному комплексу дифференциальное уравнение Пфаффа [1] будет

$$dQ = -ydx + xdy + kdz = 0.$$

Если бы существовал интегрирующий делитель, т. е. если $dQ = \lambda d\varphi$, то

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y}{\lambda}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x}{\lambda}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{k}{\lambda}.$$

Отсюда следовало бы, что

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\lambda}\right); \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-y}{\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{\lambda}\right); \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{\lambda}\right),$$

или

$$2\lambda = x\frac{\partial\lambda}{\partial x} + y\frac{\partial\lambda}{\partial y}; \quad \frac{\partial\lambda}{\partial x} = -\frac{y}{k}\frac{\partial\lambda}{\partial z}; \quad \frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{x}{k}\frac{\partial\lambda}{\partial z},$$

откуда $\lambda = 0$.

Существование интегрирующего делителя является исключением, особенностью; иначе нельзя понять смысла второго начала, которое утверждает, что именно такую особенность имеют пфаффовы дифференциальные уравнения термодинамики. Вплоть до этого пункта при строгом из-

---

[1] Аналитически еще проще пример

$$dQ = xdy + kdz = 0.$$

Если бы существовал интегрирующий делитель λ, то мы имели бы $\partial\varphi/\partial x = 0$; $\partial\varphi/\partial y = x/\lambda$; $\partial\varphi/\partial z = k/\lambda$.

Из первого уравнения следует, что φ зависит только от y и z, из третьего тоже получается для λ; это противоречит второму.

ложении надо следовать «классической» традиции. Сделаем еще один шаг; он позволит отбросить крайне запутанные соображения, которыми обычно пользуются при выводе второго начала, и заменить их формальным применением простой и наглядной математической теоремы.

Все пфаффовы дифференциальные формы распадаются на два класса — обладающих и не обладающих интегрирующим делителем. Поэтому будем искать *другой* признак для такого различения, менее абстрактный и легче связываемый с теми фактами, из которых получается второе начало термодинамики. Таким признаком является достижимость некоторой точки при движении из другой точки вдоль интегральной кривой пфаффового дифференциального уравнения (т. е., в термодинамике, вдоль адиабаты).

Рассмотрим плоский случай. Через каждую точку x, y проходит одна кривая семейства $\varphi(x, y) = c$. Поэтому, двигаясь из этой точки по интегральной кривой, заведомо нельзя достичь любой соседней точки.

Перейдем к пространству. Для класса пфаффовых дифференциальных уравнений, обладающих интегрирующим делителем, дело обстоит так же, как и на плоскости: все интегральные кривые лежат на поверхностях семейства $\varphi(x, y, z) = c$, поэтому для точки x, y, z не *все* соседние точки достижимы; достижимы лишь те, которые находятся на одной поверхности с нею, даже если допускать ломаные дуги, составленные из нескольких гладких частей. И недостижимые точки находятся сколь угодно близко к исходной точке.

Если сколь угодно близко к любой точке имеются недостижимые из нее точки, имеет ли тогда пфаффова дифференциальная форма интегрирующий делитель? Ответ утвердителен.

Из соображений непрерывности недостижимые точки должны заполнять пространственную область, граница которой состоит из достижимых точек, а такая граница — поверхность. Так как очевидно, что каждой бесконечно близкой недостижимой точке соответствует другая такая точка в противоположном направлении, то граничная поверхность содержит все достижимые точки, т. е. существует интегрирующий множитель.

Чтобы эти соображения оформить в виде строгого доказательства, заметим, что все решения пфаффова уравнения

$$dQ = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

лежащие на заданной поверхности F

$$x = x(u, v); \quad y = y(u, v); \quad z = z(u, v),$$

удовлетворяют уравнению Пфаффа вида

$$dQ = U\,du + V\,dv = 0,$$

где

$$U = X\frac{\partial x}{\partial u} + Y\frac{\partial y}{\partial u} + Z\frac{\partial z}{\partial u};$$

$$V = X\frac{\partial x}{\partial v} + Y\frac{\partial y}{\partial v} + Z\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Поэтому через каждую точку поверхности F проходит в точности одна интегральная кривая.

Предположим, что в любой окрестности точки P есть недостижимые точки; пусть одна из них Q. Тогда на любой прямой g, проходящей через P так, что ее направление не удовлетворяет нашему уравнению, есть недостижимые и сколь угодно близкие к P точки. Проведем через Q и g плоскость E (рис. 1); на плоскости E есть одна проходящая через Q интегральная кривая уравнения Пфаффа; эта кривая пересекает прямую g в некоторой точке R, если Q достаточно близко к P. Тогда точка R недостижима из P, потому что если бы существовала интегральная кривая из P в R, то и Q была бы достижима по такой непрерывной (ломаной) кривой, вопреки допущению. Точку Q всегда можно взять настолько близко к P, чтобы R было сколь угодно близко к P.

Представим, что прямая g соединена с достаточно близкой к ней и параллельной прямой g' какой-либо цилиндрической поверхностью C (рис. 2). На этой поверхности имеется в точности одна проходящая через P интегральная кривая k и пусть она пересекает g' в M. Соединим теперь прямые g и g' второй цилиндрической поверхностью C' — на ней имеется одна проходящая через M интегральная кривая k'; пусть она пересекает g в точке N.

Мы утверждаем, что N должна совпасть с P, так как поверхность C^1 можно непрерывно перевести в C, причем кривая k' перейдет непрерывно в k, и N будет непрерывно двигаться к P. Затем с помощью дальнейшей деформации можно сместить N и дальше, за P. Но точка N достижима по непрерывной (ломаной) дуге k_1k'. Поэтому на прямой g получился бы конечный интервал, содержащий P и состоящий только из достижимых точек, а это противоречит установленному ранее факту, что на g имеются недостижимые точки сколь угодно близко к P.

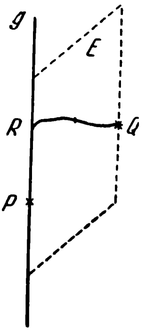

Рис. 1

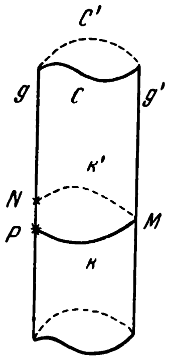

Рис. 2

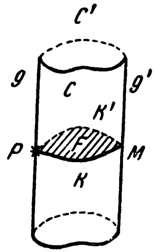

Рис. 3

Если N совпадает с P, то кривая k при деформации цилиндра C описывает поверхность F, содержащую все исходящие из P решения (рис. 3). Тем самым доказана следующая теорема, которая, как мы увидим, составляет математическую сущность второго начала.

Если пфаффова дифференциальная форма

$$dQ = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

такова, что сколь угодно близко к любой точке P (x, y, z) есть точки, недостижимые из P по интегральным кривым уравнения $dQ = 0$, то для нее существует интегрирующий делитель.

Тогда имеется бесконечно много интегрирующих множителей, образуемых по одному из них согласно (13).

Эти выводы переносятся и на пфаффовы дифференциальные формы от более чем трех переменных.

Второе начало

До сих пор наше изложение термодинамики не отличалось существенно от традиционного; мы стремились лишь четче определять понятия. Различие проявится лишь при установлении второго начала. Конечно, исходный пункт остается тем же: опытный факт подтверждает, что некоторые процессы невозможны. Эти изложения расходятся в формулировке такого факта и еще более в выводе из него второго начала. Чтобы облегчить сравнение, кратко дадим набросок обычной теории.

Эмпирическая основа обычно дается в виде одного из принципов Клаузиуса или Томсона.

Принцип Клаузиуса. Не существует устройства, которое позволило бы осуществить теплопередачу из более холодного в более горячий источник тепла без затраты механической работы и без каких-либо изменений участвующих в этом процессе тел.

Принцип Томсона. Не существует устройства, которое позволяло бы извлечь тепло из его источника и превратить его в работу без каких-либо иных изменений участвующих в этом процессе тел (невозможность вечного двигателя второго рода).

Оба принципа эквивалентны.

Затем переходят к рассмотрению цикла Карно. Обычно ограничиваются простыми газами, для которых все процессы можно изобразить кривыми на плоскости p, v, но этого, конечно, недостаточно для общего вывода второго начала. Можно ограничиться системами с тремя независимыми переменными, так как дальнейшее увеличение числа переменных не требует новых соображений. В этом случае пространство состояний трехмерно, и состояния с одинаковой температурой находятся на поверхностях $\vartheta = \mathrm{const}$.

На любой иной поверхности F такие изотермические поверхности дают в пересечении однопараметрическое семейство изотерм. Эта двумерная поверхность F покрыта однопараметрическим семейством адиабат, являющимися решениями пфаффова дифференциального уравнения $dQ = 0$. Криволинейный четырехугольник, образуемый на поверхности F двумя изотермами ϑ_1 и ϑ_2 и двумя адиабатами, представляет цикл Карно. Этот цикл можно приближенно осуществить, приводя систему в соприкосновение с очень мощным источником тепла W_1 практически постоянной температуры ϑ_1, затем осуществляя адиабатическое воздействие, пока температура системы не станет ϑ_2. Затем систему надо привести в соприкосновение со вторым источником тепла W_2 температуры ϑ_2 и, наконец, надо дать ей вернуться к исходному состоянию адиабатически. Если A — работа, произведенная системой в течение всего цикла, Q_1 — тепло, полученное источником W_1, Q_2,— тепло, отданное источником W_2, то, по первому началу

$$A = Q_2 - Q_1.$$

Если $\vartheta_1 < \vartheta_2$, то

$$\frac{A}{Q_1} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \frac{Q_2}{Q_1} - 1 \tag{16}$$

называют «коэффициентом полезного действия» той «машины», которую составляют система и источники тепла.

Либо из принципа Клаузиуса, либо из принципа Томсона следует, что при заданных ϑ_1 и ϑ_2 кпд для одной и той же системы не только не зависит от того, как осуществлен цикл Карно, но он один и тот же для различных систем — при тех же источниках тепла. Для доказательства рассматривают сложный процесс, когда одна машина проделывает цикл Карно в одном направлении, другая — в обратном, причем равны либо работы, $A = A'$, либо отдаваемые охладителю количества тепла, $Q_1 = Q_1'$. Если

$$\frac{A}{Q_1} > \frac{A'}{Q_1'},$$

то из $A = A'$ следует, что $Q_1 - Q_1' < 0$ и $Q_2 - Q_2' < 0$, т. е. из охладителя тепло передано в нагреватель.

Если $Q_1 = Q_1'$, то $A - A' > 0$ и $Q_2 - Q_2' > 0$, т. е. система выполняет работу только за счет тепла в W_2.

Если

$$\frac{A}{Q_1} < \frac{A'}{Q_1'},$$

то те же противоречия с принципами Клаузиуса и Томсона получились бы при рассмотрении обратного процесса.

Следовательно,

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = G(\vartheta_1, \vartheta_2) \tag{17}$$

должно быть *универсальной функцией* обеих температур ϑ_1, ϑ_2 источников тепла, не зависящей от вида системы, выбранной поверхности F и обеих адиабат.

Положим $\vartheta_1 = \vartheta$, $\vartheta_2 = \vartheta + \Delta\vartheta$ и пусть $\Delta\vartheta$ стремится к нулю; так как $G(\vartheta_1 \vartheta) = 0$, то

$$\frac{dQ}{Q} = g(\vartheta)\, d\vartheta,$$

где для сокращения принято, что

$$g(\vartheta) = \left(\frac{\partial G(\vartheta_1, \vartheta_2)}{\partial \vartheta_2}\right), \quad \vartheta = \vartheta_1 = \vartheta_2;$$

$g(\vartheta)$ — тоже универсальная функция от ϑ. Отсюда получаемое системой на изотерме тепло

$$Q = \Psi e^{\int g(\vartheta) d\vartheta}, \tag{18}$$

где ψ зависит от того, как заданы адиабаты, и может быть разным для разных систем.

Далее рассматривают жидкость, состояние которой определяется двумя переменными. Тогда пфаффова дифференциальная форма в выражении для dQ имеет интегрирующий делитель, $dQ = \lambda d\varphi$ и помимо ϑ можно выбрать в качестве независимой переменной φ. Тогда Ψ может зависеть только от параметров φ_1, φ_2 адиабат цикла Карно и, если положить $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \varphi + \Delta\varphi$ и устремить $\Delta\varphi$ к нулю, то с учетом очевидного равенства $\Psi(\varphi_1 \varphi) = 0$ получаем

$$dQ = \Phi(\varphi)\, d\varphi \cdot e^{\int g(\vartheta) d\vartheta},$$

где для сокращения принято

$$\frac{d\Psi(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_2} = \Phi(\varphi). \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi.$$

Затем вводят *абсолютную температуру*

$$T = Ce^{\int g(\vartheta)d\vartheta}, \tag{19}$$

где постоянная C определяется тем, что для каких-либо двух фиксированных точек задается разность абсолютных температур, скажем, 100°.

Потом определяют *энтропию*

$$S = \frac{1}{C}\int \Phi(\varphi)\, d\varphi \tag{20}$$

и получают тогда *обычную формулировку* второго начала:

$$dQ = TdS. \tag{21}$$

Но эта формула справедлива лишь для простых жидкостей, состояние которых характеризуется двумя переменными, и ее распространение на любые системы требует особого обоснования. Достаточно рассмотреть случай трех переменных, когда существование интегрирующего делителя уже не тривиально. Сначала можно выразить кпд любой системы через абсолютную температуру. Действительно, согласно (18) и (19),

$$Q = \Psi \frac{1}{C} T,$$

Так как Ψ принимает одинаковые значения на обеих изотермах цикла Карно, то

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_1};$$

или

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}.$$

Поэтому криволинейный интеграл по циклу Карно

$$\oint\limits_C \frac{dQ}{T} = 0.$$

То же верно для любой непрерывной замкнутой кривой K, так как через нее можно провести поверхность F и на ней построить сеть изотерм и адиабат и, очевидно,

$$\oint_K \frac{dQ}{T} = \lim \sum \oint_C \frac{dQ}{T},$$

где слагаемые суммы представляют циклы Карно ячеек сети, а переход к пределу означает дробление сети на бесконечно малые ячейки. Итак, для любой замкнутой кривой K

$$\oint_K \frac{dQ}{T} = 0,$$

т. е. интеграл

$$\int \frac{dQ}{T}$$

по любому пути от одной точки до другой от пути не зависит, стало быть, есть функция состояния.

Таким же образом в общем случае можно доказать, что абсолютная температура для любой термодинамической системы является интегрирующим делителем дифференциала тепла.

Краеугольным камнем теории Каратеодори является то, что достаточна значительно более общая формулировка экспериментального принципа, основанная на невозможности определенных процессов, чтобы с помощью доказанной теоремы о пфаффовых формах просто получить второе начало без новых физических соображений.

Обычно при формулировке экспериментального принципа придают особое значение тому, чтобы возможно *больше* процессов зачислить в невыполнимые: так, *никоим* образом не представляется возможным передать тепло без «компенсации» от более холодного тела более теплому или целиком превратить тепло в работу. На деле для полного вывода второго начала достаточно опытного факта, что вообще имеются *некоторые* невыполнимые процессы. Достаточно указать, что адиабатически замкнутая система не может полностью отдать содержащуюся в ней энергию в виде работы. Это вызвано тем, что такая система в ходе процесса, при котором форма и положение стенок в начале и в конце одинаковы, может только нагреваться, но не охлаждаться. Самое большее, можно сохранить температуру постоянной, если вести процесс квазистатически. Итак, имеются адиабатически недостижимые соседние состояния, притом сколько угодно близко к начальному. Но для термодинамических выводов несущественно, каковы недостижимые соседние состояния — дело лишь в том, что таковые имеются. Поэтому мы формулируем лежащее в основе второго начала опытное положение так:

Принцип Каратеодори. *В любой окрестности любого состояния имеются соседние состояния, недостижимые из него адиабатическими процессами.* Отсюда с помощью математических соображений следует, что пфаффова форма dQ (дифференциал количества тепла) всегда имеет интегрирующий делитель, из чего легко получаются формулы термодинамики, тогда как традиционная теория лишь здесь приводит в движение мощный аппарат своих циклов.

Для отдельной жидкости, состояние которой определено двумя переменными, хотя бы V; ϑ, этот принцип не дает ничего нового, так как пфаффова форма от двух переменных всегда имеет интегрирующий делитель.

Итак, надо перейти к системам, по крайней мере, из двух тел, находящихся в термическом равновесии.

Аналогичное наблюдается и в обычной теории, когда заставляют две машины, с теми же нагревателем и охладителем, описывать цикл Карно, в двух противоположных направлениях. Но такой обходный путь не нужен; надо рассматривать два находящихся в тепловом соприкосновении тела, для которых дифференциал тепла задается по (8′) и представляет пфаффову форму от трех переменных V_1, V_2, ϑ. Наша математическая теорема и принцип Каратеодори совместно приводят к результату, что

$$dQ = dQ_1 + dQ_2 = \lambda d\varphi, \tag{22}$$

где λ и φ — некоторые функции состояния.

С другой стороны,

$$dQ_1 = \lambda_1 d\varphi_1, \; dQ_2 = \lambda_2 d\varphi_2. \tag{23}$$

Следовательно,

$$\lambda d\varphi = \lambda_1 d\varphi_1 + \lambda_2 d\varphi_2. \tag{24}$$

Но вместо V_1, V_2 и ϑ можно ввести в качестве независимых переменных φ_1, φ_2, ϑ, тогда λ и φ надо считать функциями φ_1, φ_2, ϑ, и из формулы (24) вытекает, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = 0. \tag{25}$$

В силу третьего из этих уравнений φ не зависит от ϑ, а только от φ_1, φ_2, поэтому и отношения $\frac{\lambda_1}{\lambda}$, $\frac{\lambda_2}{\lambda}$ не зависят от ϑ:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\lambda}{\lambda_2}\right) = 0$$

или

$$\frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial\lambda_1}{\partial\vartheta} = \frac{1}{\lambda_2}\frac{\partial\lambda_2}{\partial\vartheta} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\vartheta}.$$

Но λ_1 — величина, характеризующая состояние первого тела, т. е. зависящая только от φ_1 и ϑ; аналогично λ_2 зависит только от φ_2 и ϑ. Поэтому первое равенство возможно лишь при условии, что обе его части зависят только от ϑ. Итак,

$$\frac{\partial \log \lambda_1}{\partial\vartheta} = \frac{\partial \log \lambda_2}{\partial\vartheta} = \frac{\partial \log \lambda}{\partial\vartheta} = g(\vartheta), \tag{26}$$

где функция $g(\vartheta)$ *универсальна*, так как она принимает одно и то же значение для обоих произвольных тел и для системы, состоящей из них. Это небольшое рассуждение, использующее вполне «нормальную» математику, выявляет *существование универсальной функции температуры*, по которой можно установить обычную шкалу температур простой нормировкой интегрирующего делителя.

Опустим индексы и будем понимать под λ интегрирующий делитель произвольной системы, тогда

$$\log\lambda = \int g(\vartheta)\, d\vartheta + \log\Phi, \tag{27}$$

где постоянная интегрирования $\log \Phi$ будет зависеть от второго параметра состояния системы, т. е. для жидкости — от φ. Далее,

$$\lambda = \Phi e^{\int g(\vartheta) d\vartheta}, \tag{28}$$

Итак, для каждой термодинамической системы интегрирующий делитель распадается на два сомножителя, один из которых зависит только от температуры, второй — только от другого параметра состояния. Вводим абсолютную температуру

$$T = Ce^{\int g(\vartheta) d\vartheta}, \tag{29}$$

где постоянная C определяется тем, что для некоторых двух фиксированных точек устанавливается разность абсолютных температур, скажем, в $100°$.

При таком определении дифференциал количества тепла будет

$$dQ = \lambda d\varphi = T \cdot \frac{\Phi}{C} d\varphi. \tag{30}$$

Если рассматривается только одна жидкость, то Φ может зависеть лишь от φ, поэтому формулой

$$S = \frac{1}{C} \int \Phi(\varphi)\, d\varphi \tag{31}$$

можно определить зависящую только от φ величину, которая характеризует состояние и постоянна на адиабатах. Ее называют *энтропией*; она определена с точностью до аддитивной постоянной. Получаем *второе начало в виде формулы*

$$dQ = TdS, \tag{32}$$

т. е. при такой нормировке температура является интегрирующим делителем дифференциала количества тепла.

То же верно для системы из двух тел, находящихся в термическом контакте (и вообще для любой системы), потому что, согласно (24) и (30),

$$\Phi d\varphi = \Phi_1 d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2, \tag{33}$$

следовательно,

$$\Phi \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_1} = \Phi_1, \; \Phi \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_2} = \Phi_2.$$

Здесь Φ_1 зависит лишь от φ_1; Φ_2 — лишь от φ_2; дифференцируя первое уравнение по φ_2, второе — по φ_1, получаем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_1} + \Phi \frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2} = 0;$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_2} + \Phi \frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2} = 0.$$

Отсюда вычитанием получаем, что функциональный определитель

$$\frac{\partial(\Phi, \varphi)}{\partial(\varphi_1\varphi_2)} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_2} - \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_1} = 0,$$

т. е. Φ — функция от φ. Поэтому и для системы можно определить энтропию S по (31) и, согласно (33),

$$dS = dS_1 + dS_2 = d(S_1 + S_2). \tag{34}$$

Определив аддитивные постоянные, можно положить, что

$$S = S_1 + S_2, \tag{35}$$

энтропия системы равна сумме энтропий ее частей.

Для более сложных систем, где возможен массообмен между их частями, надо особо доказать аддитивность энтропии, что всегда можно сделать аналогично изложенному. Но мы не прослеживаем далее построение термодинамического формализма, так как нас интересует только принципиальная сторона дела.

Необратимые изменения состояния

Переходим к исследованию поведения энтропии при произвольных, не квазистатических процессах. Рассмотрим систему, состоящую из двух термически контактирующих тел.

Эта система зависит от трех переменных, которыми мы считали раньше V_1, V_2 и ϑ; сейчас вместо ϑ введем как третью переменную S.

Пусть V_1^0, V_2^2 и S^0 — значения переменных в начальном состоянии; V_1, V_2, S — в конечном. Мы утверждаем, что при всех возможных процессах S либо никогда не растет, либо никогда не убывает. Действительно, конечного состояния можно достичь следующим.

Во-первых, объемы изменяются квазистатически от V_1^0, V_2^0 до V_1, V_2, причем энтропия остается постоянно равной S^0.

Во-вторых, при неизменных объемах V_1, V_2 состояние изменяется адиабатической затратой работы (перемешивание, трение и т. д.), пока энтропия S^0 не превратится в S.

Если бы S при различных процессах была либо больше, либо меньше, чем S^0, то каждое соседнее для исходного (V_1^0, V_2^0, S^0) состояние V_1, V_2, S было бы адиабатически достижимо — ведь объемы можно изменять как угодно. Но это противоречит тому опытному положению, на котором основано второе начало. Поэтому всегда должно быть либо $S \geqslant S^0$, либо $S \leqslant S^0$. Если исходить из другого начального состояния, то по соображениям непрерывности ясно, что невозможность изменять энтропию в сторону увеличения или уменьшения всегда должна быть одного знака. То же относится и к двум различным системам в силу аддитивности энтропии.

Но может ли энтропия только увеличиваться или только уменьшаться, зависит еще от постоянной C в (29) и в (31). Эту постоянную, естественно, выбирают так, чтобы абсолютная температура была положительной. Тогда достаточно одного эксперимента, чтобы установить знак изменения энтропии, и опыт (хотя бы с газами) учит, что энтропия никогда не уменьшается.

Отсюда, если при каком-либо изменении состояния значение энтропии не остается постоянным, то нет такого адиабатического изменения состояния, которое переводило бы систему из начального в конечное состояние. В этом смысле справедлива следующая теорема: *каждое изменение состояния, при котором значение энтропии меняется, необратимо.*

Далее получается, что в равновесии энтропия имеет максимум, а отсюда легко получить другие экстремальные теоремы термодинамики. Мы этим не будем заниматься. Приведенное доказательство для систем, состоящих из двух (или более) термически связанных тел, переносится на более сложные системы. Основным для доказательства было то, что оба объема можно изменять произвольно и что кроме них есть только одна независимая переменная — энтропия.

Но аналогичное положение имеем в общем случае: не только при этом выводе, но и при всем построении термодинамики предполагается, что для системы с n независимыми переменными $n-1$ из них типа геометрических величин, значения которых можно менять произвольно, и есть только одна «термическая» переменная (температура, энтропия). Но это ограничение, по Каратеодори, характерно не только для термодинамики, но и для традиционной теории. При выводе основных начал это ограничение не столь явно. Известно, что для действительного вычисления энтропии в конкретном случае надо иметь возможность «вести процесс как обратимый», а это значит, что все независимые переменные, кроме одной (температуры), можно изменять произвольным образом. Для этого вводят полупроводящие перегородки и другие ухищрения.

Примеры

Мы не поясняли примерами ход абстрактных рассуждений, в частности, не обращались к идеальным газам, играющим доминирующую роль во многих книгах по термодинамике. По нашему убеждению, такое «преобладание идеальных газов» — недостаток, и учащийся склонен думать, что вся термодинамика зависит от наличия определенных газообразных веществ. Конечно, есть изложения, где нет такой погрешности. Но в некоторых книгах ее допускают: там температура газа pV выступает как основа для абсолютной температуры, и даже если позже доказывается, что абсолютная температура не зависит от существования тех или иных тел и может быть определена по термо-калориметрическим измерениям различного рода, такой способ логически неудовлетворителен, поскольку a priori нет ни малейшего основания, чтобы считать эмпирической температурой именно $\vartheta = pV$, а не хотя бы $\vartheta = (pV)^2$ или ввести любую иную монотонную функцию $\vartheta = f\,(pV)$.

Здесь мы принимаем это общее допущение и из него выводим абсолютную температуру. Нам нужно еще калориметрическое определение функции энергии U. Как обычно, для этого используем идеализированный опыт Джоуля — Томсона, согласно которому при адиабатическом расширении газа без затраты работы произведение pV, или газовая температура $\vartheta = f\,(pV)$ не меняется (в первом приближении). Отсюда следует, что U зависит только от ϑ. Поэтому полагаем

$$pV = F\,(\vartheta); \quad U = U\,(\vartheta).$$

Отсюда получаем уравнение адиабатического процесса

$$dQ = dU + pdV = U'\,(\vartheta)\,d\vartheta + F\,(\vartheta)\,\frac{dV}{V} = 0.$$

Если записать, что

$$dQ = F\,(\vartheta)\left\{\frac{U'\,(\vartheta)}{F\,(\vartheta)}\,d\vartheta + d\log V\right\},$$

и положить

$$\log\theta\,(\vartheta) = \int \frac{U'\,(\vartheta)}{F\,(\vartheta)}\,d\vartheta,$$

то

$$dQ = F\,(\vartheta)\,d\log\theta V = 0.$$

Поэтому можно положить

$$\lambda = F\,(\vartheta), \quad \varphi = \log\theta V.$$

Но, согласно (13), есть бесконечно много интегрирующих делителей и если, например, положить

$$\varphi^* = e^{\varphi} = \theta V,$$

то

$$\lambda^* = \lambda \frac{d\varphi}{d\varphi^*} = F(\vartheta)\, e^{-\varphi} = \frac{F(\vartheta)}{\theta V}.$$

Нет никаких оснований сразу выделить интегрирующий делитель $\lambda = F(\vartheta) = pV$, как это обычно делают. Лишь второе начало оправдывает это. Из (26), где φ надо считать при дифференцировании постоянным, мы получаем

$$g(\vartheta) = \frac{d \log F(\vartheta)}{d\vartheta},$$

и тогда, согласно (29),

$$T = CF(\vartheta) = C_p V.$$

Этим доказано совпадение абсолютной температуры со шкалой для идеальных газов. Для энтропии из формулы $dQ = TdS$ получаем

$$S = S_0 + \frac{1}{C} \log \theta V.$$

Это переходит в обычное выражение, если положить, что

$$U = cT; \quad C = \frac{1}{R}.$$

Тогда

$$\log \theta = \int \frac{c}{RT}\, dT = \frac{c}{R} \log T.$$

Стало быть,

$$pV = RT, \; S = S_0 + c \log T + R \log V.$$

Второй пример определения абсолютной температуры связан с *черным излучением* [1]. Эмпирические основы здесь следующие:

1. Давление излучения p связано с плотностью энергии u формулой $p = \frac{u}{3}$.

2. Плотность энергии зависит только от температуры: $u = u(\vartheta)$. Поэтому то же верно для p.

---

[1] Т. е. излучением абсолютно черного тела.

Полная энергия в объеме V составляет $U = 3Vp$. Пфаффово уравнение адиабаты имеет вид

$$dQ = dU + pdV = 4pdV + 3Vdp = 0,$$

и его можно записать так:

$$dQ = pV \cdot d\log V^4 p^3 = 0.$$

Поэтому можно принять $\lambda = pV$, $\varphi = \log V^4 p^3$, и если выразить λ как функцию от p (ϑ) и φ, получим

$$\log\lambda = \frac{1}{4}\log p + \frac{\varphi}{4},$$

Поэтому, согласно (26) и (27),

$$g(\vartheta) = \frac{\partial \log p^{\frac{1}{4}}}{\partial\vartheta}, \quad \log\Phi = \frac{\varphi}{4},$$

и, согласно (29),

$$T = Cp^{\frac{1}{4}}.$$

Обычно вводят обозначение $a = \frac{3}{C^4}$ и тогда получают закон Стефана — Больцмана

$$u = 3p = aT^4.$$

Далее, согласно (23), энтропия

$$S = \frac{1}{C}\int \Phi d\varphi = \frac{1}{C}\int e^{\frac{\varphi}{4}} d\varphi = \frac{4}{C} e^{\frac{\varphi}{4}} = \frac{4}{C} V p^{\frac{3}{4}} =$$
$$= \frac{4}{C^4} VT^3 = \frac{4a}{3} VT^3,$$

если определить постоянную так, чтобы при $T = 0$ было $S = 0$. Следовательно, плотность энтропии

$$s = \frac{4a}{3} T^3.$$

Обобщения

Как ранее подчеркивалось, вся эта цепь рассуждений переносится на более сложные системы, где может происходить массообмен между однородными частями или фазами. Необходимо, чтобы можно было произвольно менять все переменные, кроме одной, и поэтому на границе раздела между любыми двумя фазами надо задать (исходя из опыта) достаточное число условий, заменяющих простое условие термического равновесия (уравнение состояния). Затем вводят полупроницаемые стенки, подвижность которых дает нужное количество прои вольно изменяющихся параметров.

Так как теоремы о пфаффовых уравнениях верны при любом числе переменных, то все заключения остаются в силе.

Таким образом, в общей теории с выгодой исключаем циклические процессы, но при фактическом вычислении термодинамических функций использовать последние часто удобно. В частности, применять при расчетах теорему Нернста лучше всего, используя циклические процессы с ветвями, устремленными к абсолютному нулю.

Значительно труднее, как подчеркиваст Каратеодори, термодинамически обосновать теорию излучения и процессы в движущихся телах, так как состояние системы нельзя описать с помощью конечного числа параметров. Действительно, до сих пор в этих областях применялись только статистические методы кинетической теории.

К ИСТОРИИ АКСИОМАТИКИ ТЕРМОДИНАМИКИ

У. И. ФРАНКФУРТ

Москва

Аксиоматика термодинамики исследует существующие термодинамические теории, факты и мыслимые эксперименты, с которыми последние связаны. В первую очередь она стремится выяснить логическую структуру термодинамических теорий. Однако было бы неверно представлять, что аксиоматика термодинамики может и должна быть противопоставлена другим физическим методам. Она также оперирует реальными объектами, в основе ее лежат те же экспериментальные результаты, но непосредственным своим объектом она выбирает структуру термодинамических теорий, обращаясь, однако, во всех случаях к эксперименту, как к решающему фактору, но она связана иерархией типа эксперимент — теория — аксиоматика.

Существуют и другие представления о роли аксиоматики. «С установлением какой-либо теории,— пишет Г. Фальк,— она сама становится предметом исследования прежде всего, когда она благодаря дополнениям в такой мере расширяется, что становится все труднее проникнуть в ее логические связи. Тогда и начинаются задачи аксиоматики...» [1]

[1] G. Falk. Die Rolle der Axiomatik in der Physik, erläutert am Beispiel der Thermodynamik. Die Naturwissenschaften, 1959, H. 16, S. 481.

17 Заказ № 652

При таком подходе необходимо исключить из «аксиоматики» все те теории, которые основаны на отдельных аксиомах. Лишь в том случае, если все положения теории могли бы быть получены дедуктивным способом из ряда положений, можно говорить об аксиоматике как о способе выяснения структурного характера теории.

Анализ исторического развития термодинамики может во многом помочь выяснению роли аксиоматики. Исходным моментом такого анализа должны служить работы С. Карно.

Карно в своей книге «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу», опирался на циклический метод. Эта книга, по словам Томсона, не имела равных по достоинству среди книг XIX в. В свою очередь его циклический метод базировался в скрытом виде на свойствах полного дифференциала, хотя математическая структура выступает на первом этапе развития второго начала термодинамики недостаточно рельефно, особенности этой структуры сказались во многом.

Подчеркивая математические особенности работы Карно, Энгельс писал, что Карно сконструировал идеальную паровую машину, «которую, правда, так же нельзя осуществить, как нельзя, например, осуществить геометрическую линию или геометрическую плоскость, но которая оказывает по-своему такие же услуги, как эти математические абстракции: она представляет рассматриваемый процесс в чистом, независимом, неискаженном виде» [1]. Это не противоречит тому, что второе начало возникло как обобщение закономерностей, наблюдающихся в тепловых процессах, а толчком, приведшим к активному его излучению, послужило распространение паровых машин. Воображаемый циклический процесс, которым пользуется Карно, прост. Понятие о циклическом процессе и о способах его осуществления, а также мысль о возможной обратимости этого процесса не имели до Карно аналогов в физике.

Новым термодинамическим элементом было то, что любое расширяющееся вещество в циклическом процессе

---

[1] Ф. Энгельс. Диалектика природы. Госполитиздат, 1955, стр. 181—182.

должно постоянно соприкасаться с окружающими телами такой же температуры, как и оно, т. е. между рабочим телом и источником тепла не должно быть прямого переноса тепла, вызываемого конечной разностью температур. Новым было и то, что при обращенном действии машины должна быть затрачена работа для того, чтобы взятую от холодного тела теплоту перенести на теплое тело. В работе Карно использована теория теплорода, хотя многие и оспаривали, что именно в этом смысле надо понимать употребляемый им термин. Ла Мер исходил из того, что мемуар Карно будет находиться в полном согласии с современным представлением, если рассматривать его *calorique* как энтропию. На это обстоятельство указал и Бренстэд.

Казалось бы, что теория теплорода и аналогии из гидравлики о получении работы в тепловом двигателе в результате падения теплорода с высшего температурного уровня на низший противоречит принципу исключенного перпетуум мобиле первого рода, который Карно принимает. Это должно было привести к серьезным внутренним противоречиям, тем не менее Карно доказал как независимость полезного действия тепловых двигателей от природы рабочего вещества, так и определяющую роль температур внешних источников.

Наряду со многими факторами положительную роль сыграла математическая структура работы Карно, позволившая в дальнейшем Клаузиусу ввести более явно аксиоматические элементы.

Система термодинамики в том виде, в каком она была изложена Карно, не только не была законченной, но и те основания, на которых она базировалась, вскоре подверглись коренной переработке. Идеи об эквивалентности тепла и работы стали доминирующими. Представления, связанные с понятием теплорода, быстро теряли всякую значимость. Клаузиус ставит перед собой задачу согласовать важнейшие результаты, полученные Карно, с новыми представлениями о природе тепла. Если Карно скрыто опирается на понятие дифференциала, то Клаузиус использует аксиоматические элементы более явно. При построении второго начала Клаузиус исходит из выдвинутого им постулата, «что теплота не может переходить сама собой от более холодного тела к более теплому». Это не аксиоматическое положение в полном его значении.

У Клаузиуса слова «сама собой» должны выражать то, что теплота никогда не может накопляться с помощью теплопроводности или излучения в более теплом теле за счет более холодного. В тех процессах, где теплота переходит от более холодного тела к более теплому, наряду с этим переходом должен отмечаться и процесс компенсации. Возражения против обоснования второго начала Клаузиусом можно разбить на две группы.

Во-первых, это возражения, связанные с негативным отношением к физическому содержанию принципа, вызванные главным образом ошибочным его пониманием (Рэнкин, Гирн, Тэт, Эттинген, Пикте и др.). Исторически это не сыграло никакой роли в установлении аксиоматики.

Во-вторых, это возражения, связанные с критическим анализом исходных посылок и методов доказательства (Пирогов, Шиллер, Каратеодори, Афанасьева-Эренфест). Критический анализ работ Клаузиуса показал, что в данном случае нет строгой термодинамической теории, которую можно было бы аксиоматизировать. Клаузиус сформулировал второй принцип термодинамики для квазистатических и нестатических процессов в виде одного утверждения. Афанасьева-Эренфест указывала, что это по существу два логически независимых закона природы. Второе начало термодинамики для нестатических процессов логически независимо в пределах термодинамике от второго начала для квазистатических процессов. Постулат Клаузиуса был сформулирован для нестатических процессов и введен как основа для анализа проблем равновесного состояния.

Доказательство теоремы Карно на основании постулата Клаузиуса не может быть по крайней мере достаточно строгим. Суммируя существующие критические анализы теории Клаузиуса, Белоконь писал: «Обоснование теоремы Карно, предложенное Р. Клаузиусом и получившее широкое распространение, не может быть признано правильным: в схему доказательства внесено лишнее условие — более совершенной, по предположению, обратимой машине в схеме механических сопряженных обратимых машин неизменно приписывается роль теплового двигателя и вместе с тем нарушена симметрия необходимого постулата; вместо необходимого постулата второго начала термостатики о невозможности одновременного самопроизвольного перехода тепла в противоположных направлениях использован постулат о невозможности самопроизвольного перехода тепла от тел менее нагретых к телам более нагретым, т. е. постулат одностороннего запрещения...»[1]

В схему построения Клаузиуса неявно включен также постулат о возможности существования идеального газа. Это несовместимо со строгой аксиоматикой.

Гухман отмечал, что «рассуждения Клаузиуса, строго говоря, вообще не содержат доказательства теоремы Карно. Действительно, в качестве предпосылок предлагается некоторый общий принцип, представляющий результат обобщения Клаузиусом данных опыта относительно свойств явлений определенного класса (явлений нестатического обмена). Однако по ходу рассуждений возникает необходимость в рассмотрении явлений другого класса (круговых обратимых процессов, т. е. явлений квазистатического обмена), свойства которых явно противоречат основному принципу. Поэтому первоначальную предпосылку нельзя использовать и фактически не используют. Она незаметным образом заменяется другой, которая тождественна с ней по форме, но выражает совершенно иной объем физических знаний» [2]. Из-за многих в скрытом виде введенных предположений и недостаточно строгого использования сформулированных сложно было видеть в этих теориях нечто законченное и не требующего дальнейших исследований.

В период создания термодинамики как науки было очень сложно одновременно развивать конструктивную и критическую части. Развитие специальных применений второго начала значительно опередило ту работу, которую необходимо было провести над теоретическими и логическими основами второго начала. Аксиоматика

[1] Н. И. Белоконь. Термодинамика. М.— Л., 1954, стр. 223.

[2] А. А. Гухман. Об основаниях термодинамики. Алма-Ата, 1917, стр. 81—82.

термодинамики не могла быть развита без того анализа и критического разбора, которым подверглись работы Клаузиуса. Казалось бы, что учение об эквивалентности, вводя некоторое расчленение задачи, приближает нас к более строгому обоснованию второго начала и тем самым в какой-то мере и к аксиоматике.

В своих дальнейших исследованиях Клаузиус изменил форму второго начала. Он ввел принцип эквивалентности превращений. Термин «превращение» употребляется и при превращении теплоты в работу и работы в тепло. Все мыслимые процессы делятся на две группы: положительные, или естественные, и отрицательные, или неестественные. Примером положительных превращений могут служить переход теплоты от более теплого тела к более холодному, переход работы в тепло, взаимная диффузия двух газов. Отрицательными превращениями являются переход теплоты в работу, разделение двух газов, составляющих смесь. Клаузиус, вводя понятие эквивалентности превращений, стремился найти закон, который позволил бы представить превращения математическими величинами. Однако этот шаг по пути развития аксиоматики термодинамики не оказался успешным. В 1879 г. Планк критически рассмотрел учение Клаузиуса об эквивалентности и доказал математически, что при более строгом их рассмотрении возникают неустранимые трудности. Анализируя работы Карно и Клаузиуса, Ван-дер Ваальс и Констамм писали: «...что она вряд ли удовлетворяет требованиям строго реального вывода. Логически ясным ход доказательства никоим образом не является. Что говорит нам полезный эффект тепловых двигателей о взаимной зависимости калорических и термических величин, ...В какой связи находится эта зависимость величин, относящихся к определенному состоянию равновесия и к исходящим от него «бесконечно малым» процессам, с условиями возможности перпетуум мобиле и даже с различием между обратимыми процессами» [1].

Первые попытки систематической аксиоматики второго начала, а в дальнейшем и термодинамики в целом,

---

[1] Ван-дер Ваальс и Констамм. Курс термостатики. Главная редакция химической литературы, т. I. М., 1936, стр. 117.

стремился провести Н. Н. Шиллер. В работе Шиллера «О втором законе термодинамики и об одной новой его формулировке» [1] анализируются формулировки Клаузиуса и Томсона и выясняются причины, побудившие автора исследовать вопрос об уточнении закона. Второе начало рассматривается в непосредственной связи с первым. «Основная задача термодинамики,— пишет Шиллер,— исчерпывается решением вопроса о количестве тепла dQ, которое должно быть приведено телу; или системе тел, для того, чтобы изменить температуру t и «n» других параметров тела $p_1, p_2, \ldots, p_n$ соответственно на $dt, dp_1, \ldots, dp_n$ при условии обратимости процесса изменений» [2]. Аналитически это формулируется равенством

$$dQ = C\,dt + l_1 dp_1 + l_2 dp_2 + \ldots + l_n dp_n. \qquad (1)$$

Задача сводится к определению коэффициентов c, l_1, $l_2, \ldots l_n$ как функций от t, $p_1 \ldots p_n$.

Шиллер, обращаясь к анализу процесса обмена тепла между телами, дает три выражения для второго начала, эквивалентных между собой. Первая формулировка гласит, что изменение одной только температуры данного тела может произойти лишь за счет приведенного к телу тепла. Во избежание ошибок Шиллер полагает, что это имеет место не только при абсолютной неизменяемости параметров, но и в тех случаях, когда параметры, определяющие состояние тела, претерпев какие угодно обратимые изменения, возвратились к своим прежним значениям. Вторая формулировка гласит, что «для данного тела нельзя подобрать такого обратимого кругового процесса изменений параметров, независимых от температуры, при помощи которого достигалось бы непрерывное повышение или понижение температуры тела» [3]. Третья формулировка гласит: «при всяком обратимом адиабатном изменении тела, характеризуемом с помощью n независимых друг от друга параметров, любой из вышеуказанных параметров возвращается к своему первоначальному значению, коль скоро остальные $n - 1$ параметров

---

1 Н. Н. Шиллер. Оттиск из Киев. ун-их изв., 1898, стр. 1.
2 Там же, стр. 1.
3 Там же, приложения, стр. 7.

возвращаются к своим»[1]. Хотя каждая из формулировок второго закона термодинамики приводит к решению основной термодинамической задачи; к наиболее непосредственному пути приводит третья формулировка. «Третья формулировка второго закона,— пишет Н. Н. Шиллер,— требует, чтобы при любом адиабатическом процессе, при котором параметры состояния возвращаются к своим первоначальным значениям, температура также приводилась бы к своей первоначальной величине. Это требование выполняется прежде всего тогда, когда приращение температуры не будет зависеть от промежуточных значений параметров состояния, т. е. прежде всего, когда любая из температур адиабатического процесса определится только как функция соответствующих параметров, независимо от каких-либо предыдущих или последующих значений этих последних. А это обстоятельство очевидно соответствует тому условию, чтобы уравнение (1) имело интеграл»[2]

$$0 = cdt + l_1 dp_1 + \ldots l_n dp_n.$$

Шиллер вводит интегрирующий множитель вообще в виде функции

$$\text{от } t,\ p_1 \ldots p_n.$$

Далее показано, что в выражении

$$dQ = \theta dS \tag{2}$$

θ должно быть функцией одной температуры. В самом деле

$$dQ_1 = \theta_1 dS_1,\ dQ_2 = \theta_2 dS_2 \ldots dQ_k = \theta_k dS_k \ldots \tag{3}$$

Рассматривая систему тел как одно тело, получаем $dQ = \theta dS$. Но $dQ = dQ_1 + dQ_2 + \ldots dQ_k$, следовательно,

$$\theta_1 dS_1 + \theta_2 dS_2 + \ldots + \theta_k dS_k = \theta dS \ldots \tag{4}$$

при всяких произвольных значениях $dS_1 \ldots dS_k$. Общим аргументом в выражениях $dS_1 \ldots dS_k$ является только t

[1] Н. Н. Шиллер. Оттиск из Киев. ун-их изв., 1898, стр. 7.
[2] Там же, стр. 10—11.

и ни один из других аргументов, входящих в одно из выражений, не входит в остальные. Тождество (4) возможно, если

$$dS_1 + dS_2 + \ldots + dS_k = dS;$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_k = \theta,$$

где θ — одинаковая для всех тел функция одной температуры. Шиллер развивал свои взгляды в ряде работ; интерес для нас представляют более поздние работы.

В 1900 г. Шиллер публикует работу «Опытные данные и определения, лежащие в основании второго закона термодинамики»[1]. В ней он ссылается на свою более раннюю работу[2], в которой, обсуждая возможную новую формулировку второго закона термодинамики, он указывал, что все следствия, вытекающие из закона в его обычных формулировках, могут быть выведены из положения о том, что температуру термически изолированного тела нельзя безгранично повышать или понижать при помощи обратимых циклических процессов. В рассматриваемой статье Шиллер хотел выяснить, «что те опытные данные, которые ведут к составлению понятия об условиях изменения температуры тела и к понятию о получении или отдачи тепла, также приводят к вышеупомянутому заключению о свойстве обратимого адиабатного процесса, независимо от представления об эквивалентности тепла и работы»[3].

В целях аксиоматизации термодинамики Шиллер сформулировал несколько теоретических положений. Первое из них гласит, что среди различных параметров, характеризующих состояние тела, всегда найдутся такие, с помощью которых можно выразить температуру этого тела. Положение второе, являющееся результатом опыта, гласит, что независимые друг от друга изменения этих параметров происходят не иначе, как с изменениями других параметров, т. е. независимые друг от друга изменения термических параметров данного тела могут проис-

[1] Там же, XL, 1900, № 3, стр. 1—14.

[2] Н. Н. Шиллер. ЖРФХО, ч. физ., т. 30, вып. 2, 1898, стр. 31.

[3] Киев. ун-ие изв., XL, 1900, № 3, стр. 1.

ходить только при условии его термического общения с другими телами.

Изменения параметров Шиллер подразделяет на обратимые и необратимые. Положение третье гласит, что «независимые друг от друга обратимые изменения термических параметров данного тела могут происходить или только при помощи непрерывного термического общения с одним и тем же другим телом, всегда одинаковой температуры с первым, или при помощи последовательных термических общений с различными телами то высшей, то низшей температуры» [1].

Положение четвертое гласит, что тела, приведенные в условия взаимного термического общения, находятся в термическом равновесии, когда все их термические параметры остаются неизменными.

Положение пятое вводит понятие об измерении процессов термического общения тел; положение шестое вводит понятие обмена тепла между данным телом и другими телами; положение седьмое устанавливает содержание «первой половины первого закона термодинамики» (эквивалентность тепла и работы). При помощи функциональной зависимости между изменяющимися параметрами тела и источника тепла дается количественная оценка случаев термического общения.

Одни из параметров могут характеризовать данное тело, не входя в уравнение состояния — это дополнительные параметры, или параметры скрытой теплоты. Температурные параметры вместе с дополнительными называются термическими.

На основе приведенных определений и положений Шиллер формулирует восьмое положение о том, что о температуре и ее изменениях можно судить по тем признакам, которые находятся в самом теле, и для ее определения достаточно знания значения определенного числа параметров, входящих в уравнение состояния. Для определения термических изменений недостаточно знать термические параметры данного тела, необходимо еще задать параметры другого тела.

Установив основные определения и положения, Шил-

[1] Там же, стр. 4 –5.

лер переходит к количественной оценке случаев термического общения, используя функциональную зависимость между изменяющимися параметрами тела и источника тепла. Доказав, что невозможно непрерывно повышать или понижать температуру тела путем замкнутых адиабатических круговых процессов, Шиллер выдвигает девятое положение: «Лежащее в основании второго закона термодинамики утверждение о существовании определенной функциональной связи между термическими параметрами тела, при его адиабатических изменениях, является следствием того обстоятельства, что всевозможные температурные условия данного тела могут быть исчерпаны изменениями термических параметров этого тела, и другого, находящегося в термическом общении с первым» [1]. Шиллер дал также другой вывод основного свойства адиабатического процесса и вытекающего как следствие второго закона термодинамики и проанализировал понятия температуры и энтропии.

В 1901 г. Шиллер прочитал доклад на XI съезде русских естествоиспытателей [2], посвященный основным законам термодинамики. Он ставил задачу выяснить, что понятие энтропии может быть установлено независимо от понятия о тепле и о превращении тепла в работу. В отношении первого закона он стремился доказать, что его существенное значение в установлении эквивалентности термических и механических процессов может быть сделано без вспомогательного понятия о количестве тепла.

Вводятся понятия температуры, температурных параметров, термических параметров, термического общения, адиабатических изменений тел, энтропии. Получено дифференциальное уравнение

$$A_0\,da_0 + A_1\,da_1 + A_n\,da_n = 0, \qquad (5)$$

характеризующее процесс адиабатических изменений данного тела, где a_0, a_1, $\ldots a_n$ — температурные параметры; A_0, A_1, $A_2 \ldots A_n$ — функции a_0, a_1, $\ldots$ a_n. Анализируются условия наличия или отсутствия интеграла уравнения (5).

---

[1] Н. Н. Шиллер. Опытные данные и определения, лежащие в основании второго закона термодинамики; там же, стр. 8.

[2] Н. Н. Шиллер. Основные законы термодинамики. Киев, ун-ие изв., 1903, стр. 1—51.

Устанавливается, «...что всегда существует некоторая определенная функция обратимых термических параметров данного тела, которая сохраняет постоянное значение, когда термическое состояние тела изменяется обратимым адиабатным процессом» [1]. Анализируется изменение энтропии при термическом общении, механическая схема обратимых термических изменений, вводится функция θ — абсолютная шкала температур. Рассматриваются основная задача термодинамики и необратимые процессы. Несколько специфичный характер носят параграфы, посвященные форме выражения энергии при термических процессах, простейшие случаи механической аналогии термических изменений. В письме в редакцию журнала «Успехи физических наук» В. П. Русаков привел формулировку Шиллера «Не представляется возможным понимать или повышать непрерывно температуру тела путем замкнутых адиабатических круговых процессов» [2] и указал, что спустя девять лет это положение было развито К. Каратеодори и вошло в науку под его именем. Русаков приводит формулировку принципа Каратеодори. «Существуют такие состояния термически однородной системы, которые нельзя достичь, исходя из данного состояния, путем адиабатического процесса» и считает, что обе формулировки равносильны.

В 1911 г. Косоногов [3] отметил, что в исследованиях Шиллера, посвященных критическому исследованию основных понятий и законов термодинамики, некоторые положения, высказанные в ранних статьях, повторялись во всех последующих, в то время как другие положения и выводы видоизменялись. К числу основных положений, оставшихся неизменными, Косоногов относит точное определение основной задачи термодинамики.

Кроме приведенных ранее работ, Шиллер написал работы, примыкающие к ним по своим основным идеям [4].

---

[1] Н. Н. Шиллер. Основные законы термодинамики. Киев. ун-те изв., 1903, стр. 12.

[2] В. П. Русаков. Успехи физ. наук, 49, вып. 1, 1958, стр. 181—182.

[3] У. Косоногов. Н. Н. Шиллер. ЖРФХО, ч. физ., т. 43, 1911, вып. 9, стр. 466.

[4] Элементарный вывод закона сохранения энергии. ЖФО, 12, 1880, 14—19; Киев. ун-ие изв., 1880, № 2, 73—78; К вопросу о тер-

В последние годы появились возражения против одного из основных постулатов Шиллера, гласящего, что в обратимом адиабатическом процессе изменений состояния тела, характеризуемого с помощью независимых друг от друга параметров, любой из упомянутых параметров возвращается к своему первоначальному значению, когда $n-1$ остальных параметров возвращается к своим. «В такой общей формулировке,— пишет Белоконь,— основной постулат Н. Н. Шиллера не может быть признан справедливым... Если дополнить основной постулат Н. Н. Шиллера указанием, что все части изменяющегося тела (или системы тел) находятся в тепловом равновесии, то этот постулат может быть рассматриваем как частное выражение теплового равновесия тел...» [1]

Перечислим основные недостатки, отмечаемые у Шиллера.

1. Отсутствует непосредственная очевидность в утверждении Шиллера о существовании интегрирующих делителей выражений обратимого теплообмена системы тел, находящихся в тепловом равновесии.

2. При переходе от постулатов Шиллера к утверждению о существовании интегрирующих делителей выражений обратимого теплообмена неявно использованы предпосылки, эквивалентные теореме Каратеодори и не являющиеся очевидными.

3. «...Постулаты Н. Н. Шиллера (I—III), даже после внесения необходимых корректив, не могут быть отнесены к категории непосредственно очевидных положений, причем общее доказательство этих положений возможно лишь на основе принципа существования энтропии, в связи с чем исключается возможность плодотворного использования постулатов Н. Н. Шиллера в качестве средств обоснования этого принципа».

модинамическом потенциале. Отд. физ. наук Об-ва любителей естествознания, антропологии и этнографии, 1894 (1), 22—31; Соотношения между обратимыми круговыми процессами и общими условиями равновесия приложенных сил. ЖФО, 27, 1895, 197—202; Киев. ун-ие изв., 1896, № 2, 1—15; Происхождение и развитие понятий о «температуре» и «тепле».— Киев. ун-ие изв., 1899, № 7, 1—53; Основные законы термодинамики.—ЖФО, 34, 1902, 377—426.

[1] Н. И. Белоконь. Термодинамика. М.— Л., Госэнергоиздат, 1954, стр. 241—242.

4. Шиллер неявно использовал предпосылку о существовании аддитивных S-функций. Предпосылка непосредственно не очевидна.

Использование этой предпосылки, доказуемой лишь на основе математического выражения принципа существования энтропии равновесных систем, в качестве средств построения принципа существования абсолютной температуры и энтропии неправомерно.

5. Произвольные температурные шкалы, на которые опирается Шиллер, в общем случае могут не быть связанными непрерывными закономерностями с физическими свойствами тел, и этим «...в принципе исключается возможность выражения абсолютной термодинамической температуры в зависимости от температуры, измеренной в произвольной эмпирической температурной шкале» [1].

Рассмотрим подход Планка к разрешению этой проблемы.

Первое начало термодинамики Планк определяет таким образом: ни при помощи механических, термических, химических или каких-либо других приборов нельзя построить периодически действующую машину, посредством которой непрерывно получалась бы работа или живая сила из ничего.

С точки зрения первого начала начальное и конечное состояние всякого процесса равноценны.

Особенность и значение второго начала он усматривает в том, что оно дает необходимый и достаточный критерий для определения обратимости или необратимости происходящего процесса в природе.

Второе начало термодинамики характеризует направленность процессов, в то время как первое совершенно не затрагивает этого вопроса. Этим и объясняется, по Планку, сложность формулировки второго начала. «Задача получения точной и общей формулировки второго начала потребовала от физиков десятков лет работы. Эта работа продолжалась до тех пор, пока не стало ясным, что содержание второго начала не исчерпывается тем, что, как это делал иногда еще Клаузиус и позднее с новой энергией Оствальд, каждый процесс природы разлагается на ряд

[1] Н. И. Белоконь. Термодинамика. М.—Л., Госэнергоиздат, 1954, стр. 242.

превращений энергии, после чего ставится вопрос о направлении каждого такого отдельного превращения»[1]. Хотя, вероятно, и представлялась бы возможность аксиоматизации, но сложность возникает при попытке аксиоматизации самого расчленения. Планк отмечает, что при таком методе остается произвольным порядок расположения превращения и произвол этот не может быть устранен ограничениями общего характера. Планк критикует и то направление в обосновании второго начала, которое исходит из понимания самой сущности начала, как тенденции процессов природы к обесценению энергии. Он строит общее доказательство второго начала, основываясь на опытном законе о невозможности построить периодически действующую машину, вся деятельность которой сводилась бы к поднятию некоторого груза и соответствующему охлаждению теплового резервуара.

В «Лекциях по термодинамике» Планк писал: «Чтобы уяснить значение второго начала, существует только один путь: его сводят к фактам, устанавливая положения, которые путем опытов могут быть подтверждены или опровергнуты. Таково, например, следующее положение: при посредстве каких бы то ни было приемов нельзя процесс, в котором теплота возбуждается вследствие трения, заставить происходить в совершенно обратном направлении»[2]. Методы обоснования второго начала термодинамики, используемые Планком, трудно совместимы с аксиоматическими методами.

Планк придавал большое значение способам обоснования второго начала. Он отмечал, что при том особом положении, которое общая термодинамика занимает в системе теоретической физики, вопрос обоснования второго начала столь же важен, как и вопрос о пределах его применимости. Вслед за Гельмгольцем[3] он признает, что для определения абсолютной температуры и энтропии нет необходимости ни в допущении существования идеального газа, ни в рассмотрении круговых процессов. В 1926 г. Планк вновь обратился к вопросу обоснования

---

[1] М. Планк. Теория теплоты. М.— Л., ОНТИ, 1935, стр. 44.

[2] М. Планк. Лекции по термодинамике. СПб., 1900, стр. 71.

[3] Helmholtz. Ges. Abhadlg. 3, 1895, 121. Budde. Wied. Ann., 45, 1892, 751.

второго начала термодинамики[1]. Он признает убедительность заключений, связанных с принципом Каратеодори, утверждающего, что в любой близости всякого состояния, системы тел существуют смежные состояния, которые из первого состояния не могут быть достигнуты адиабатическим путем, но сомневается в том, что для обоснования второго закона этот принцип может служить полной или преимущественной заменой принципа невозможности перпетуума мобиле второго рода. Планк исходит из того, что всякий принцип, лежащий в основании второго закона, заимствован из опыта и с результатами опыта надо сравнивать либо положения самого принципа, либо следствия, из него вытекающие.

«...При первом способе непосредственно сказывается превосходство принципа Томсона. Ибо в то время как вопрос относительно перпетуум мобиле второго рода экспериментально рассматривался бессчетное количество раз, никто еще никогда не ставил опытов с целью достижения всех смежных состояний какого-либо определенного состояния адиабатическим путем» [2]. Планк понимает, что это не может служить решающим аргументом, поскольку экспериментальные подтверждения отдельных следствий второго закона вытекают из принципа Каратеодори, как и из принципа Томсона. Планк прибегает к новому аргументу, полагая, что эквивалентность принципов была бы доказана и можно было бы склониться к тому, чтобы вопросу придать лишь формальный характер, если бы термодинамика была бы замкнутой теорией «...но, как известно, это никоим образом не так. Напротив, так называемая общая термодинамика образует в системе современной физики, построенной в целом на атомистической основе, специальную часть — определенный предельный случай, который, строго говоря, даже никогда не был осуществлен с абсолютной полнотой»[2]. Планк исходит из того, что второе начало получает такую трактовку в статистической форме, при которой принцип пер-

---

[1] M. Planck. Über die Begründung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik.—Sitzungsbericht d. preus. Akad. d.Wiss., phys. mat. Kl., 31, 1926, 453—463; См. Доп. к кн.: Ван-дер Ваальс и Констамм. Курс термостатики. Там же, стр. 439—440.

[2] М. Планк. Там же, стр. 440.

петуум мобиле второго рода остается. Он не может быть применен в системе, обладающей немногими механическими степенями свободы. «Совершенно иначе,— пишет Планк,— обстоит дело с принципом Каратеодори. Последний имеет определенный смысл также и для рассматриваемого случая, но содержащееся в нем высказывание не является общеприменимым к естественным процессам; и именно, оно неприменимо ко всем тем системам (а их — преобладающее большинство), к которым относится квазиэргодическая гипотеза; эта же гипотеза гласит, что в совершенно изолированной от внешнего мира системе тел всякое вообще возможное, согласно принципу энергии, состояние с течением времени действительно достигается с любым приближением» [1]. Этот аргумент Планка был бы решающим, если бы «состояние» понималось бы одинаково как в аксиоматике Каратеодори, так и в статистике, где применяется квазиэргодическая гипотеза.

Планк выдвигает также тот аргумент, что принцип Каратеодори не указывает признаков, по которым можно отличать достижимые смежные состояния от недостижимых смежных состояний. Исходя из указанной критики, Планк возвращается к методу, которым он пользовался уже в 1879 г., не прибегая к круговым процессам с идеальными газами, но полностью используя принцип Томсона.

Критика Планка не могла получить достаточно сильного резонанса потому, что она не указывала на противоречивые элементы теории Каратеодори, но лишь уточнила границы ее применимости, за пределы которых Каратеодори не выходил. Однако Планк, утверждая решающую роль принципа Томсона, не учитывает, что это приводит к выводу о невозможности обоснованного разделения принципов существования и возрастания энтропии. Шаг в направлении аксиоматики, состоящий в утверждении двух постулатов, позволяет прийти к разделению принципов. Свою работу «Об основах термодинамики» Каратеодори начинает с утверждения, что одним из самых замечательных результатов, полученных в исследованиях XIX в. по термодинамике, является осознание возможности обоснования термодинамики с помощью гипотез,

---

[1] М. Планк. Там же, стр. 441.

которые можно проверить экспериментально. Он указывает, что аксиому, составляющую первое начало, можно сформулировать таким образом, чтобы она соответствовала постановке опытов Джоуля, если калориметр рассматривать как адиабатически изолированную систему [1].

Понятия «адиабатический» и «адиабатически изолированный» определяются некоторыми физическими свойствами и не сводятся к понятию энергии.

Первое начало термодинамики, как известно, имело форму определения энергии и сводилось к утверждению, что в каждом определенном случае ее можно определить механическими и калориметрическими измерениями. Эта точка зрения подвергалась критике [2] и, учитывая ее, автор стремился к иной трактовке. При формулировке второго начала Каратеодори исходит из трактовки Планка, видоизменив ее, поскольку при избранном им способе изложения понятия «теплота» и «количество теплоты» еще не определены.

Вслед за Гиббсом Каратеодори постулирует существование систем, содержащих в равновесном состоянии конечное число жидких или газообразных сред φ_α ($\alpha = 1, 2, \ldots n$). Он пренебрегает гравитационными, электромагнитными и капиллярными силами.

Символическими уравнениями вида

$$\varphi_1 = m_{11}\,(H_2O) + m_{21}\,(NaCl) \tag{6}$$

(раствор поваренной соли в воде) и совокупностью чисел

$$V_i,\ P_i,\ m_{ki} \quad \begin{matrix} i = 1, 2 \ldots \alpha \\ k = 1, 2 \ldots \beta \end{matrix} \tag{7}$$

не определена вся система, а лишь ее фазы в отдельности.

В общем случае равновесие фаз возможно при выполнении одного или нескольких условий вида

$$F\,(V_1, P_1, m_{k1}; V_2, P_2, m_{k2}) = 0. \tag{8}$$

[1] C. Caratheodory. Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik Math. Ann., 67, 1909, 355—386; см. Gesammelte mathemaische Werke, Bd. 2. München 1955, S. 131—177.

[2] Bryan. Enz. d. math. Wiss., Bd. V. 3, Thermodynamik, S. 81.

Если числа (7) записывают в виде

$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots\ c_{n+\lambda}\ \ldots, \tag{9}$$

то для равновесия необходимо, чтобы удовлетворились независящие друг от друга уравнения

$$F_\lambda\,(c_0,\ c_1,\ldots,\ c_n + \varLambda) = 0. \tag{10}$$

Каратеодори вводит три определения: 1) эквивалентности систем, 2) тождественности систем и 3) характеристики изменений состояний.

На основании введенных определений он сформулировал аксиомы. Аксиомы трактуются как обобщения опытных фактов, наблюдаемых при особенно простых обстоятельствах.

Аксиома I (аксиома первого начала). «Каждой фазе φ_i любой системы S в положении равновесия соответствует функция ε_i величин (7):

$$V_i,\ P_i,\ m_{ki},$$

пропорциональная общему объему V_i этой фазы и называемая ее внутренней энергией. Сумма по всем фазам

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$$

называется внутренней энергией системы. При каждом адиабатическом изменении состояния сумма изменений энергии и внешней работы равна нулю $\bar{\varepsilon} - \varepsilon + A = 0$, где ε — начальное; $\bar{\varepsilon}$ — конечное значение энергии».

Аксиома II (второго начала). «В любой окрестности произвольно заданного начального состояния имеются состояния, которые нельзя как угодно точно аппроксимировать адиабатическими изменениями состояния» [1].

Исходя из двух аксиом, можно определить внутреннюю энергию рассматриваемой физической системы и общие свойства функции ε. Задача упрощается для частных систем, названных «простыми». Анализ «простых» систем приводит к следующему определению:

[1] C. Caratheodory. Там же, 139—140.

«Простая» система с $(n + 1)$ координатами состояния x_0, x_1, ..., x_n должна удовлетворять следующим условиям:

1) n ее координат, например, x_1, x_2, ...x_n — координаты деформации (координаты деформации — координаты, определяющие внешний вид системы);

2) Внешняя работа A при адиабатических изменениях состояния не определяется однозначно начальным положением и окончательным видом S; множество всех возможных при этих условиях значений A связано;

3) при «квазистатических» адиабатических изменениях состояния внешняя работа равна интегралу от некоторой пфаффовой формы вида

$$DA = P_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + P_n dx_n.$$

В зависимости от свойств соответствующей пфаффовой формы можно судить о свойствах системы.

Свойства пфаффовых форм, которыми оперирует Каратеодори, можно изложить таким образом.

Пусть М — пфаффова форма

$$M = X\,(x, y)\,dx + Y\,(x, y,)\,dy,$$

где X, Y — непрерывные, дифференцируемые и однозначные функции от x и y.

$Y \neq 0$ во всей области изменения переменных (x, y). Если

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

то уравнение

$$M = Xdx + Ydy$$

определяет семейство интегральных кривых $F\,(x, y) = c$, зависящих от одного параметра. Если условие $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ не выполнено, то всегда существует функция $\mu\,(x, y)$, что $\mu\,(x, y)\,M = dF$.

Рассматривают также пфаффову форму трех переменных

$$M = X\,(x, y, z)\,dx + Y\,(x, y, z)\,dy + Z\,(x, y, z)\,dz,$$

где X, Y, Z — однозначные, непрерывные и дифференцируемые функции x, y, z. Если выполнены условия

$$\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}=0;\quad \frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}=0,$$

где M — полный дифференциал и уравнение

$$M = Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

определяет семейство интегральных поверхностей $F(x, y, z) = c$, зависящих от одного параметра. Для трех и более переменных не всегда существует интегрирующий множитель. Пусть μ — интегрирующий множитель. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu X)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu Y);\quad \frac{\partial}{\partial z}(\mu Y)=\frac{\partial}{\partial y}(\mu Z);$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu Z)=\frac{\partial}{\partial z}(\mu X);$$

или

$$\mu\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=Y\frac{\partial\mu}{\partial x}-X\frac{\partial\mu}{\partial y};$$
$$\mu\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=Z\frac{\partial\mu}{\partial y}-Y\frac{\partial\mu}{\partial z};$$
$$\mu\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)=X\frac{\partial\mu}{\partial z}-Z\frac{\partial\mu}{\partial x};$$

Умножив первое уравнение на Z, второе на X, третье на Y, имеем

$$Z\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)+X\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)+Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)=0.$$

Доказано, что это — необходимое и достаточное условие существования интегрирующего множителя.

К анализу работ Каратеодори обращалась Афанасьева-Эренфест, выдвинув свою систему обоснования второго начала термодинамики, близкую по методике к аксиоматической. К ней примкнул Ван-дер-Ваальс.

Он дал физическую интерпретацию рассуждений Каратеодори. Гомогенная фаза изображается точкой в поле с двумя переменными. Изолируем точку адиабатически. В непосредственной близости каждого состояния находятся точки, которых нельзя достигнуть путем любого ряда изменений и которые остаются изолированными. Достижимы лишь те состояния, которые лежат на той же адиабате. С недостижимостью математически связано существование интегрирующего множителя. Затем рассматриваются два идеальных газа по молю в каждом. Газы разделены адиабатической перегородкой. Перегородка подвижная. Давление по обе стороны перегородки одинаково

$$dQ_r = c_1 dT_1 + c_2 dT_2 + p\,(dv_2 + dv_1),$$

где c_1 и c_2 — значения c_v на один моль; v_1 и v_2 — полные объемы.

Эта система с тремя переменными обнаруживает ту особенность, что из всякого состояния достижимо любое другое адиабатическим квазистатическим путем.

«Конечно,— пишет Ван-дер-Ваальс,— не всякое другое состояние достижимо непосредственно. Так, в случае адиабатической изолированной двойной системы нельзя непосредственно достигнуть состояния с равным общим объемом и большей энергией»[1]. Однако этого можно достигнуть косвенным путем.

Систему сжимают с затратой внешней работы. Давление повышается.

Перераспределяют тепло без нарушения условия $dQ_r = 0$ для всей системы. Направление перехода так можно выбрать, чтобы давление понизилось от p_1 до p_2.

Системе предоставляют расшириться адиабатически до первоначального полного объема. Поскольку совершенная работа меньше приращения энергии в первом процессе, можно получить любое приращение энергии при равном конечном объеме при условии $dQ_r = 0$ — требование интегрируемости нарушено.

«С физической точки зрения,— пишет Ван-дер-Ваальс,— легко видеть, каким способом здесь получена «достижимость», она существует лишь благодаря адиаба-

---

[1] Ван-дер-Ваальс и Констамм. Курс термостатики, т. 1. М., 1936, стр. 120.

тической перегородке, разделяющей обе части, что делает возможным наличие в обеих частях различных температур и наличие двух, а не одной, теплоемкостей. Если мы удалим адиабатическую перегородку, то после достижения равновесия во всей системе, согласно разделу I, будет господствовать лишь одна температура и лишь одна теплоемкость — сумма частичных теплоемкостей. Но в таком случае одновременно делается невозможным тот искусственный прием, благодаря которому мы только что достигли увеличения энергии при неизменяющемся объеме, сохранив условие $dQ_r = 0$; следовательно, в непосредственной близости около всякого заданного состояния существуют «недостижимые» состояния»[1].

Анализируя работу Каратеодори, Фальк и Юнг указывают на наличие альтернативы при формулировке начал формулировать теорию с постоянным применением линейных дифференциальных форм или ввести в термодинамику новое построение. Против первой формулировки ученые выдвигают то, что она ограничена термическими системами, и использует в качестве основного понятия непрерывное пространство состояний. Каратеодори, по их мнению, избрал в отношении первого начала первую альтернативу.

«Хотя в этой работе оба основных закона по необходимости получают иную формулировку, чем в более ранних сочинениях, все внимание обращено здесь только на второй закон. Причина заключается в том, что он высказан здесь в крайне непривычной форме... завораживающее действие этой „аксиомы недостижимости“, кажется слишком часто заслоняло тот факт, что для суждения об аксиоматическом построении теории нужно обозреть целую систему аксиом — ибо каждая отдельная аксиома имеет значение лишь как часть системы аксиом. Но если анализировать работу Каратеодори с этой точки зрения, то все перечисленные возражения будут иметь силу и против предлагаемого им пути»[2]. В этой части, как уже упомянуто, критика Каратеодори Фальком недостаточно

[1] Там же, стр. 121.

[2] G. Falk. Die Rolle der Axiomatik in der Physik, erläutert am Beispiel der Thermodynamik. Die Naturwissenschaften, 1959, N 16, S. 482.

убедительна. Фальк отмечает, кроме того, что Каратеодори не видел, что адиабатическая изоляция как вид взаимодействия может привести коротким путем к понятию энтропии, не прибегать к топологической непрерывности. «...Имеется в виду применение такого понятия, как «Окружение точки в n-мерном континууме, понятия, которое не только весьма сложно в формальном отношении, но и лежит за пределами физической проверяемости. Нам, наоборот, кажется существенным показать, что построение всех физических величин основано на конечных операциях, так что понятия„ непрерывности“ или — мерного континуума и т. п. становятся излишними» [1]. Фальк и Юнг, исходя из того, что термодинамика Каратеодори и классическая термодинамика представляют лишь различные изображения одной и той же теоремы, ставят вопрос об эквивалентности различных аксиом в разных системах термодинамики. В термодинамике Планка лишь основные начала представлены как аксиомы, а все остальные предположения рассматриваются как в той или иной мере само собой понятные положения. То же отмечается и в термодинамике Каратеодори; в качестве аксиом выдвинуто первое начало и аксиома недостижимости. Все остальные положения фигурируют как «определения» или попутно требуемые свойства коэффициентов пфаффовых форм. Может возникнуть вопрос о возможности заменить некоторые аксиомы одной теории аксиомами другой и посмотреть, в какой мере они нарушают систему в целом. Они отмечали также возможную эволюцию Каратеодори. Последний,— отмечают Фальк и Юнг,— писал свою работу 50 лет тому назад, в то время, когда аксиоматика не была еще достоянием математики. Он сам был тогда исключительно аналитиком, что видно в ряде работ. Применение аналитических и непрерывно топологических понятий для описания простейших систем образует основу и исходный пункт критики Каратеодори. Но только обращение к комбинаторным чертам теории позволяет найти новые конструктивные элементы, не ограничиваясь одной лишь негативной оценкой теории Каратеодори. Оценивая творческую эволюцию Каратеодори, авторы считают, что алге-

---

[1] Там же, примечание к стр. 485.

браизация понятия интеграла в позднейших работах Каратеодори показывает, что путь, который они избрали, есть продолжение незавершенных стремлений Каратеодори. Критика Фалька и Юнга направлена против аксиомы недостижимости и против роли «простых систем». Однако аксиома «недостижимости» содержит более весомые положения, чем понятие о простых системах. Они отмечают, что формулировка и применение аксиомы не соответствуют одна другой. Положение о существовании адиабатически недостижимых состояний в каждой окрестности состояния производит впечатление глубокого топологического свойства пространства состояний. Применение ее характерно лишь в отношении узкого класса гиперповерхностей.

В статье «Необратимость, односторонность и второе начало термодинамики» Афанасьева-Эренфест указала на причины, вследствие которых второе начало термодинамики, несмотря на свою общепризнанность и постоянное применение во многих областях естествознания и техники, оставляет у многих неудовлетворенность. С одной стороны, закон возрастания энтропии многие рассматривают как основу и сущность второго начала, однако кинетическая трактовка термодинамических явлений приводит к сомнению в неуклонной справедливости закона возрастания энтропии. С другой стороны, существуют неясности и в пределах самой феноменологической термодинамики [1].

Второе начало термодинамики выступает в двух различных видах: как утверждение о существовании интегрирующего множителя для dQ и как утверждение о неуклонном возрастании энтропии в реальных адиабатических процессах. Афанасьева-Эренфест полагает, что не существует логического тождества второго начала и принципа возрастания энтропии. Доказательства второго начала в ряде ее работ близки к аксиоматическому методу.

Даны параметры x_1, x_2, $\ldots x_n$, определяющие состояние равновесия системы. Структурой рассматриваемой системы определяется число параметров. Переход от состояния равновесия, определяемого параметрами x_1, x_2, $\ldots$, x_n,

---

[1] Т. А. Афанасьева-Эренфест. Журнал прикладной физики, т. V, 1928, кн. 3—4, стр. 3—29.

к состоянию равновесия, определяемого параметрами

$$x_1 + dx_1;\ x_2 = dx_2, \ldots,\ x_n + dx, \tag{1}$$

есть бесконечно малый квазистатический процесс.

Совокупность бесконечно малых квазистатических процессов есть конечный квазистатический процесс. В изложении Афанасьевой-Эренфест понятие квазистатичности, введенное Каратеодори, отделяется от понятия обратимости. Реальные процессы, которые являются последовательностью неравновесных состояний, названы «нестатическими» процессами. Необратимость такого рода процессов есть предмет обсуждения, поэтому определение «нестатических» процессов как «необратимых» привело бы к неясности изложения.

Афанасьева-Эренфест не строит аксиоматику теплового обмена, отмечая, что ценные шаги в направлении обоснования понятий «количества тепла» и «температуры» сделаны Каратеодори. Но Каратеодори подходит к ним со стороны нестатических процессов. Афанасьева-Эренфест утверждает о возможности обоснования всей термодинамики квазистатических процессов и всех понятий, входящих в нее, не прибегая к нестатическим процессам — вплоть до того момента, когда потребуется определение внутренней энергии u, как функции параметров x_1, x_2, ..., x_n.

В работе обобщено понятие адиабатического процесса на случаи, когда отдельные части системы вступают в тепловой обмен с внешними системами, но так, что

$$dQ = dQ_1 + dQ_2 + \ldots + dQ_k = 0. \tag{2}$$

Изложив вопрос о голономности и неголономности уравнения

$$Z_1\,dx_1 + Z_2\,dx_2 + \ldots + Z_n\,dx_n = 0 \tag{3}$$

и отметив, что при голономности уравнения для всякой данной системы значений параметров x_1', x_2', ..., x_n' существует бесконечное множество систем недостижимых из нее, Афанасьева-Эренфест пишет:

«Каратеодори показал, что и обратное заключение справедливо: если вблизи данной системы значений

$(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ существуют такие системы $(x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$, которые недостижимы при помощи уравнения (3), то это уравнение голономно... это предложение является существенной основой второго начала, так как при его помощи легко свести к одной единственной аксиоме тот замечательный факт, что уравнение $dQ = 0$ голономно для всякой физической системы»[1]. Афанасьева-Эренфест вводит четыре аксиомы:

Аксиома I (энтропия). Если на бесконечно малом пути, соединяющем два бесконечно близкие состояния термически однородной системы, $dQ \neq 0$, то между этими состояниями невозможен никакой обходный чисто адиабатический квазистатический путь.

В этой аксиоме словами «термически однородной системы» Афанасьева-Эренфест подчеркивает голономность уравнения

$$dQ = Y_1 dx_1 + Y_2 dx_2 + \ldots + Y_n dx_n.$$

Этими словами подчеркивается, что структура системы такова, что все части системы в каждый момент процесса имеют одну и ту же температуру.

Аксиома II (тепловой связи). Существует только одна форма равновесной тепловой связи — это связь при равных температурах.

Аксиома III (однозначности энтропии). Интеграл $\int \frac{dQ}{T}$, взятый по замкнутому пути, всегда равен нулю.

Аксиома IV (температуры). Интегрирующий делитель $f(\tau)$ выражения dQ при положительных значениях τ имеет один и тот же знак.

Из этих четырех аксиом вытекает постулат Клаузиуса, которому можно дать следующие четыре эквивалентных формулировки:

а) невозможно во всяком квазистатическом процессе превращение тепла в работу без того, чтобы некоторое количество тепла не перешло от тела более нагретого к телу менее нагретому;

---

[1] Там же, стр. 6.

б) невозможен перенос тепла от тела менее нагретого к телу более нагретому без того, чтобы соответствующее количество работы не было превращено в тепло.

в) невозможно превращение работы в тепло без того, чтобы соответствующее количество тепла не было перенесено от тела менее нагретого к телу более нагретому;

г) невозможен перенос тепла от тела более нагретого к телу менее нагретому, чтобы соответствующее количество тепла не было превращено в работу.

Четыре формулировки составляют содержание второго начала для квазистатических процессов. Совокупность всех четырех формулировок Афанасьева-Эренфест называет «вторым началом для квазистатических процессов».

Из определения второго начала, примененного к квазистатическим процессам, вытекает следующее:

1. Нельзя довести кпд до единицы, если абсолютную температуру одного резервуара не доводить до нуля.

2. С наибольшим кпд из всех машин, работающих при одних и тех же условиях, работает та, которая совершает цикл Карно.

3. При определенных крайних температурах этой системы нельзя повысить кпд, изменяя выбор системы. Для всех систем кпд будет иметь одно и то же значение.

Затем рассмотрены неголономные системы. Рассматриваются два идеальных газа, теплоемкости которых равны (соответственно) c_1 и c_2, взятые в количестве одной граммолекулы.

Газы отделены друг от друга не пропускающим тепла поршнем.

$$dQ = dQ_1 + dQ_2 = c_1 dT_1 + p dv_1 + c_2 dT_2 + p dv_2 =$$
$$= (c_1 + R)\, dT_1 + (c_2 + R)\, dT_2 - \frac{R}{p}(T_1 + T_2)\, dp.$$

Для голономности уравнения $Z_1 dx_1 + Z_2 dx_2 + \ldots + Z_n dx_n = 0$ необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$Z_\alpha \left(\frac{\partial Z_\beta}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial Z_\gamma}{\partial x_\beta} \right) + Z_\beta \left(\frac{\partial Z_\gamma}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_\gamma} \right) +$$
$$+ Z_\gamma \left(\frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial Z_\beta}{\partial x_\alpha} \right) = 0.$$

Следовательно,

$$(c_1 + R)\frac{R}{p} - (c_2 + R)\frac{R}{p} = \frac{R}{p}(c_1 - c_2)\ldots$$

при $c_1 \neq c_2 \quad \frac{R}{p}(c_1 - c_2) \neq 0.$

И, следовательно, dQ не имеет интегрирующего множителя. Системы такого рода неголономны и для них не существует адиабатической недостижимости. Охарактеризовав нестатический процесс и его отношение ко второму началу и выставив ряд положений, Афанасьева-Эренфест переходит к аналитическому описанию нестатических процессов.

С рядом критических замечаний в адрес аксиоматики в целом, и в адрес работ Афанасьевой-Эренфест в частности, выступил А. Путилов. Он рассматривает, что для некоторого тела, нормального в отношении термодинамических свойств на диаграмме (p_1V) через состояние C проведены адиабата, отрезок изохоры кверху и отрезок влево, линия уровня внутренней энергии. Любого состояния в области между адиабатой и изохорой можно достигнуть из C посредством неравновесного адиабатического сжатия.

Любого состояния в области между адиабатой и линией уровня внутренней энергии можно достигнуть из C посредством неравновесного расширения. Любого состояния между изохорой и линией уровня внутренней энергии можно достигнуть из C, сочетая неравновесное адиабатическое расширение с неравновесным адиабатическим сжатием. Любое состояние влево от адиабаты недостижимо посредством адиабатического процесса. Для перехода в адиабатически недостижимое состояние из C у тела надо отнять минимальное количество тепла. Этот минимум достигается при квазистатическом процессе.

«Если бы,— пишет Путилов,— можно было отнятое у тела тепло превратить в работу без компенсации, то, включив механизм этого превращения в рассматриваемую систему, мы пришли бы к выводу, что всякое состояние C_0 всегда адиабатически достижимо из любого другого состояния C. Отсюда ясно, что полная адиабатная недостижимость является следствием второго начала»[1]. В данном случае Путилов стремится выразить графически, опираясь на физические сооображения, то, что в аксиоматике выражено аналитически.

Далее он пишет: «Этому фундаментальному факту полной адиабатической недостижимости влево от адиабаты подчинен факт относительной (квазистатической) адиабатической недостижимости переходов и влево и вправо от адиабаты. Взяв одну лишь относительную квазистатическую адиабатическую недостижимость, Афанасьева-Эренфест возводит этот подчиненный факт в аксиому (аксиома I). По существу самой аксиомы тут нет возражений».

Возражения встречает аксиома тепловой связи, если положить, что она тавтологична в отношении теплового равновесия и температуры.

«Неожиданной и странной, — пишет Путилов, — является эта идея — изолировать второе начало от неравновесных процессов, т. е. сохранить риторическую видимость второго начала, выбросив из него его главное содержание. Конечно, нет ничего изумительного в том, что при таком «обескровливании» второго начала различные его классические формулировки утрачивают свою адекватность. Т. А. Афанасьева-Эренфест сопоставляет две суженные формулировки второго начала (невозможность перпетуум мобиле второго рода для одних квазистатических процессов и аналогично суженный принцип Клаузиуса); она находит, что аксиома о знаке абсолютной температуры нужна только для обоснования второй из этих формулировок и не нужна для обоснования первой...»[2]

Таким образом, критика в данном случае относится не к процессу расчленения и аксиоматизации, а сводится к общей негативной оценке аксиоматики в предположении, что она не может представлять нечто прогрессивное в термодинамике. В противовес этому автор строит свою неаксиоматическую систему обоснования термодинамики.

---

[1] К. А. Путилов. Лекции по термодинамике. Второе начало. М., Всесоюзное хим. об-во им. Д. И. Менделеева, 1939, стр. 39—40.

[2] Там же, стр. 40.

Иной подход к аксиоматике термодинамики, более близкий к методам математической аксиоматики, дан в работах Фалька и др. «Среди всех физических теорий, — пишет Фальк, — термодинамика пользуется славой теории, построенной наиболее строго с логической точки зрения. Это, несомненно, справедливо, если принимать некоторые основные понятия как «работа», «температура», «теплота», не вникая в них особенно глубоко. Однако положение в корне меняется, если мы будем упорно держаться требования о последовательном логическом представлении» [1].

Рассмотрим сначала первый основной закон

$$dU = dA + dQ, \tag{1}$$

где A — работа, Q — теплота.

«... В его формулировке (1) наряду с функцией состояния U энергии, фигурируют и два понятия «работы» и «теплоты», т. е. величины, которые соответствуют не состояниям (равным точкам), а процессам (равным кривым) в пространстве состояния. Такие величины мы, по предложению Г. Юнга, назовем *«процесс обложения»* (Prozeß-Belegungen), потому что их можно рассматривать как *«обложение»* (Belegung) кривых или частей кривых числами...» [2]

В работе Фалька отмечается, что речь идет о функциях на многообразии кривых, т. е. о функциях, аргументами которых служат кривые пространства состояния.

Функции такого рода должны быть линейными дифференциальными формами. Функции состояния — это «предельные случаи». Они соответствуют полным дифференциалам. Формулировка первого начала оказывается связанной с понятием непрерывного пространства состояния.

«Можно возразить, — отмечает Фальк, — что при классическом построении термодинамики эти сложные вспомогательные средства не нужны, но причина лежит в том, что вместо них допускается существование специальных систем, а именно *механических систем* и *носителей тепла*».

---

[1] G. Falk. Die Rolle der Axiomatik in der Physik, erläutert am Beispiel der Thermodynamik. Die Naturwissenschaften, 46, 1959, N 16, p. 481.

[2] Там же, стр. 482.

«Не говоря о том, что сразу возникает вопрос, действительно ли теория связана с существованием таких систем или они являются лишь *одним* из возможных способов ее построения среди других, — остается прежде всего возражение, что Гиббсовское расширение термодинамики (в особенности присоединение химических процессов) уже не может быть описано в общем виде путем сведения (Prozeß-Belegungen) «процессов обложения» к функциям состояния систем особого рода» [1].

Наконец, остается простое возражение против выражения (1). Понятие теплоты применимо, очевидно, только к *термическим* системам, т. е. нагреваемым системам, а потому выражение (1) является формулировкой закона сохранения энергии для ограниченного класса физических систем. Какова бы ни была практическая важность физических систем такого рода, все же сомнительно, не затушевывается ли подобным ограничением содержание столь общего фундаментального принципа, как закон сохранения энергии. Можно, конечно, считать, что общий принцип будет тем более понятным, чем к более широким областям применимы его формулировки. В этом смысле выражение (1), конечно, не является идеальным решением.

Эти соображения показывают, что классическое построение термодинамики не очень строгое, и не может соответствовать тем требованиям, какие предъявляет аксиоматический метод. Итак, либо нужно формулировать теорию с постоянным применением понятия линейного (Prozeß-Belegungen) «*процесса обложения*», или форм Пфаффа, либо сначала необходимо иначе вести ее построение. «За первую альтернативу говорит то, что ее в принципе можно осуществить математически, *против* нее — несколько простых, но именно поэтому более веских аргументов: ограничение рассмотрения термическими системами, применение *непрерывного* пространства состояния в качестве *основного* понятия, проблема формального и физического распознавания тех (Prozeß-Belegungen) *процессов обложения*, с которыми имеет дело термодинамика. Последний пункт требует описания характеристи-

[1] Там же, стр. 482.

ческих переменных или введения их в теорию, как не требующих пояснения основных понятий. Наши соображения указывают на то, что продуктивное исследование логической структуры термодинамики не в том, чтобы привести обычное построение теорий в более строгую форму, а в отыскании новых путей» [1].

Термодинамика занимается системами и их состояниями. Она прослеживает переходы между состояниями. Не только при аксиоматическом построении термодинамики, где роль «состояния» становится основным объектом теории, но и при всяком другом ее построении «состояние системы» остается основополагающим понятием. Каждая система Z обладает множеством состояний Z. Эти множества не должны быть непрерывными и в принципе могут состоять и из конечного числа состояний. Переходы $z - z'$ — упорядоченные пары состояний. Целесообразно множество состояний изобразить множеством точек, а переходы — направленными отрезками. Фальк и Юнг отмечают, что они множеству состояний вначале не приписывают никаких свойств континуума. В соответствии с этой комбинаторной исходной ситуацией целесообразно употреблять дискретные множества точек.

Для перевода системы из состояния z в состояние z' необходимо «воздействие», или, лучше, «взаимодействие» с другой системой. Не анализируя физический характер различных типов воздействия и не систематизируя их, можно сказать, что при любом из них можно получать лишь определенные переходы. Если образовать все упорядоченные пары состояний (z, z'), т. е. все переходы системы Z, то специальное взаимодействие системы определяется тем, что относительно каждого перехода указывается, возможен он или невозможен при этом взаимодействии. Вводится функция $F(z, z')$. Эта функция может принимать лишь два значения $+1$ и -1, причем $F(z, z') = +1$, когда переход $z \rightarrow z'$ возможен, и $F(z, z') = -1$, когда этот переход невозможен. Все рассматриваемые в термодинамике взаимодействия таковы, что если $z \rightarrow z'$ и $z' = z''$, то возможен и переход $z \rightarrow z''$, иначе говоря, если $F(z, z') = +1$ и $F(z', z'') = +1$, то и $F(z, z'') = +1$.

[1] Там же, стр. 482.

Вводится понятие «энергетической изоляции». Если система подвергается воздействиям, или взаимодействиям, то это и есть «энергетическая изоляция». «Изоляция» также рассматривается как взаимодействие. Авторы отмечают, что энергетические соображения в физике дают плодотворные результаты почти исключительно в тех случаях, когда прибегают к круговым процессам. Это показатель того, что на практике находят применение лишь взаимодействия, определяемые как энергетическая изоляция.

«Рассмотрим сначала, — пишет Фальк, — чтобы не затруднять ориентировку, структуру переходного отношения «энергетическая изоляция» для простейших случаев физических систем. Оно имеет тогда форму $F(z,z') = F(z',z)$ (т. е. если переход $z \to z'$ возможен (невозможен), то всегда возможен (невозможен) также и обратный переход $z' \to z$. Следствием этой структуры отношения перехода является то, что все множество состояний z разделяется на классы, всегда слагающиеся из таких состояний, которые при энергетической изоляции могут быть связаны друг с другом. Эти классы мы называем классами энергии, а состояния внутри некоторого класса — *состояниями равной энергии*. Этим, правда, выясняется, имеют ли два состояния z и z' одинаковую энергию или нет, но бессмысленно спрашивать, которое из них обладает большей энергией, если они не принадлежат к одному и тому же классу энергий. Если ожидать ответа на этот вопрос, выходящий за пределы произвольных предположений, то энергетическая изоляция должна иметь еще и другие свойства, которые позволяют упорядочить классы энергии посредством некоторой физической операции. Свойства, о которых идет речь, относятся к характеристической связи между классами энергии в двух системах Z_1 и Z_2, с одной стороны, и классами энергии сложной системы $[Z_1, Z_2]$, с другой» [1].

Сложная система состоит из пар состояний.

Анализируя принцип связи и рассматривая отдельные ступени операций, авторы ввели понятия метрической пере-

---

[1] Там же, стр. 483.

менной энергии, и на ее основе сформулировали первый основной закон. Фальк писал:

«*Каждая физическая система обладает взаимодействием энергетической изоляции, структура которой разрешает построение метрической переменной* $U(z)$ — *энергии системы*» [1].

Хотя описание метрической переменной неполно, оно все же выявляет принципиальные черты метода и формальную структуру физических взаимодействий, на которых основано образование каждой метрической переменной.

О втором законе термодинамики Фальк писал, что его формулировка дает непосредственно повод к критике, поскольку речь идет о температуре, а специальная система носителя тепла выступает явно в формулировке. Но независимо от этого его роль в том, что он вводит физическую величину — энтропию.

«Но построение каждой физической величины основывается на взаимодействии, и потому второй основной закон (в более или менее замаскированной форме) должен содержать признаки того взаимодействия, какое разрешается конструкцией энтропии. Фактически, как показывает более подробный анализ, назначение обоих понятий (носителя тепла и температуры) состоит в том, чтобы описать, или, нам хотелось бы сказать, перефразировать это взаимодействие. Назовем его *адиабатической изоляцией*. Каратеодори первый выявил основную роль адиабатической изоляции и воспользовался ею в своей аксиоме недостижимости, где идет речь о «состояниях, адиабатически недостижимых». Он, однако, не видел, что это взаимодействие весьма коротким путем дает энтропию, если формулировать его свойства не на языке бесконечно малых и топологической непрерывности, а конечным образом» [2].

Определив структуру «адиабатической изоляции», Фальк строит классы энтропии и метрическую переменную, называемую метрической энтропией $S(z)$ (для адиабатически обратимых переходов). Наряду с этим вводится понятие эмпирической энтропии.

Второй основной закон теперь можно сформулировать

[1] Там же, стр. 484.
[2] Там же.

таким образом: «Каждая физическая система обладает взаимодействием — адиабатической изоляцией, свойства которой эквивалентны следующим положениям:

1. Она позволяет построение метрической энтропии $S(z)$.

2. Она дает эмпирическую энтропию $\sigma(z)$, которая при переходах под адиабатической изоляцией никогда не убывает.

3. Она указывает на то, что S — монотонная функция от σ»[1].

Очерк охватывает лишь некоторые основные направления аксиоматики термодинамики, которая в последние годы пытается дать строгую логическую и математическую интерпретацию основных законов термодинамики.

---

[1] Там же, стр. 485.

МЕХАНИКА XIX в. И ПРОБЛЕМЫ ЕЕ АКСИОМАТИКИ

И. Б. ПОГРЕБЫССКИЙ

Москва

Введение

К концу XVIII в. теоретическая механика была достаточно разработана и имела большую и содержательную историю. Как всякая сформировавшаяся наука, она развивалась не только под воздействием запросов практики и общественных условий. Влияние этих запросов и условий достаточно сложным образом переплеталось и взаимодействовало с закономерностями исследования, определяемыми его предметом, и накопленными ранее средствами и результатами. Такое переплетение и взаимодействие внешних условий и внутренней логики развития крайне затрудняет расстановку вех в истории науки. Большое «эпохальное» научное достижение может появиться в период замедленного общественного развития, оказаться неугодным для господствующей идеологии, тогда оно только с большим замедлением берется на вооружение. Считать ли новую эпоху в астрономии начинающейся с появления книги Коперника или с того периода, когда система Коперника становится основой астрономических работ — во времена Кеплера и Галилея? Любой безоговорочный ответ на такой вопрос будет неполным, односторонним. С такими затруднениями мы сталкиваемся при периодизации и других наук, в том числе механики. Однако, конец XVIII в. в истории механики является если не разграничительной линией, то разграничительной полосой, сохраняющей свои очертания и при возможно более полном учете действующих в истории науки и порою противоборствующих факторов. Редко, когда так близко во времени сходились переломные события в экономике, технике, политике и исследуемой нами науке. В конце XVIII в. завершается промышленная революция в Англии. В 1789 г. начинается французская буржуазная революция. За год до этого, через 101 год после «Математических начал натуральной философии» Ньютона, появилась «Аналитическая механика» Лагранжа, которая, как казалось автору и многим его современникам, в законченной форме содержала все, что было достигнуто в теоретической механике. В 1794 г. во Франции, после полной ликвидации ее средневековых университетов создается Политехническая школа, где готовят гражданских и военных инженеров. Они получают основательную физико-математическую подготовку, в частности по теоретической механике. Механикой отныне будут заниматься уже не избранные одиночки в академиях и немногочисленных технических учебных заведениях XVIII в.: убедительные доказательства, полученные на полях сражений, заставили европейские государства взяться за организацию и расширение высшего технического образования. Механикой начинают заниматься целые группы теоретиков и практиков. Инженерный опыт и физический эксперимент объединяются в ранее неизвестных и недоступных масштабах. Так начало новой общественной эпохи становится началом новой эпохи в механике.

Конечно, новая эпоха в истории механики во многом продолжает предыдущую. В первые десятилетия XIX в. в механике сильны традиции «астрономического» XVIII в. В течение всего столетия существенным фактором остается господствующее в естествознании убеждение в универсальном значении методов и представлений механики. Новым рубежом в истории механики является начало XX в., когда подверглись пересмотру и видоизменению почти все основные понятия механики и произошла фундаментальная переоценка механических ценностей. Наша цель, учитывая характерные черты этой эпохи в истории механики и отдельные ее этапы, выяснить, какое значение имели в механике аксиоматические методы и каков ее вклад в их развитие.

Лагранж

«Аналитическая механика» была завершением работ, которые Лагранж вел и к которым возвращался в течение четверти века. Она в высшей степени исторична; и не только потому, что содержит поучительные и сейчас, а для своего времени совершенно исключительные исторические введения к статике и динамике. Она исторична и там, где нет исторических справок и сопоставлений, потому что вся она задумана не только как изложение методов и результатов автора, но и как подведение итогов и оценка результатов, накопленных его предшественниками. В предисловии к первому изданию, которое столько раз цитировалось, Лагранж писал: «Существует уже много трактатов о механике, но план настоящего трактата является совершенно новым. Я поставил себе целью свести теорию механики и методы решения связанных с нею задач к общим формулам, простое развитие которых дает все уравнения, необходимые для решения каждой задачи. Я надеюсь, что способ, каким я постарался этого достичь, не оставит желать чего-либо лучшего» [1]. Вот эта уверенность в том, что им получены общие формулы, к тому же способом, который не оставит «желать чего-либо лучшего», делала Лагранжа судьей своих предшественников. Он добавляет, что его «работа принесет пользу и в другом отношении: она объединит и представит с одной и той же точки зрения различные принципы, открытые до сих пор с целью облегчения решения механических задач, укажет их связь и взаимную зависимость и даст возможность судить об их правильности и сфере их применения» [2].

Было бы ошибкой принять трактат Лагранжа за исчерпывающе полный свод того, что стало основным достоянием механики в то время. Лагранж стремился все представить «с одной и той же точки зрения» и кое-что существенное, как мы увидим, осталось при этом вне его поля зрения. Как не раз в истории науки, синтез и обобщение,

---

[1] Ж. Лагранж. Аналитическая механика, пер. с фр. В. С. Гохмана, т. I под ред. и с прим. Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье, стр. 9; т. II, под ред. и с прим. Г. Н. Дубошина. М.—Л., 1950.

[2] Там же, т. I, стр. 10.

казавшиеся автору и его современникам окончательными, были лишь ступенью лестницы, ведущей дальше.

Лагранж делит свою работу на статику, или теорию равновесия, и динамику, или теорию движения. В обеих частях он отдельно рассматривает твердые и жидкие тела. Его методы не требуют ни построений, ни геометрических или механических рассуждений; они требуют только алгебраических операций, подчиненных планомерному и однообразному ходу. «Все любящие анализ с удовольствием убедятся в том, что механика становится новой отраслью анализа, и будут мне благодарны за то, что этим путем я расширил область его применения»[1].

Итак, аналитическая механика Лагранжа — это механика, ставшая ветвью анализа, механика, «лишенная механических рассуждений». Это не «Механика в аналитическом изложении» Эйлера (1736 г.), в которой задачи механики решаются средствами анализа бесконечно малых, но сводятся к решению уравнений каждая по-своему. Но несмотря на большую общность методов Лагранжа, его приведенное заявление не было верным и в его время; к тому же при всей «историчности» Лагранжа, оно определенным образом искажает историческую перспективу.

Трактат Лагранжа только завершает построение аналитической механики, которое было делом всего XVIII в. Наибольший вклад внес Эйлер, существенно помогли работы Клеро, Даламбера, Д. Бернулли и труды менее известных ученых. То, что мы называем дифференциальными уравнениями движения Ньютона появляется впервые (даже для точки!) лишь в середине XVIII в. у Эйлера. Эйлер впервые выводит общие уравнения движения твердого тела, вращающегося вокруг точки. Уравнения гидромеханики идеальной жидкости получены в работах Клеро, Даламбера, Эйлера. Уравнениями для тех одномерных упругих систем, которые оказались под силу механике XVIII в., занимались многие до Лагранжа, и больше всего опять-таки Эйлер. Лагранж не подчинил аналитическим методам новую область механики. Его заслуга в том, что он на основе общего принципа построил уже созданную аналитическую механику. Можно сказать,

[1] Ж. Лагранж. Аналитическая механика, т. I, стр. 9—10.

что он разобрал здание, построенное из разнородных блоков, и заменил его новым, однородным зданием почти той же вместимости, что и старое.

Второе, в чем Лагранж ошибался и не мог не ошибаться, — это в подразумевавшемся положении, что его аналитическая механика — это вся механика. Это было не так не только с нашей точки зрения, но и с точки зрения его современников. Например, гидромеханика идеальной жидкости, которая только и была в распоряжении Лагранжа, не удовлетворяла ни практику, ни теорию. Вспомним, например, парадоксальное следствие из уравнений гидромеханики, полученное Даламбером и Эйлером, об отсутствии сопротивления при движении сферы в такой жидкости. Что могло гарантировать их достаточность. Общие принципы «Аналитической механики» были недостаточны, чтобы объяснить новые физические схемы, которые должны были обогатить в будущем механику жидкости и упругих тел. А поиски таких схем шли и до Лагранжа, и в его время. Тут сказывались непосредственные запросы инженерной практики. Наконец, идеал Лагранжа — включить механику в математику, исключив из нее собственно механические соображения, был неосуществим, так как был недостаточен не только уровень развития физики, но и уровень развития математики.

Что наличных средств математики не хватает для решения, скажем, задачи трех тел, Лагранжу, которому в этой задаче принадлежат выдающиеся исследования, было хорошо известно. Следовательно, в общем случае, при вполне строгой математической постановке задач потребуются приближенные методы их решения. Оценка качества этих приближений и целесообразности соответствующих методов может быть дана лишь с учетом механического или, если угодно, физического содержания задачи, скорее всего, с привлечением данных опыта и наблюдений.

Итак, безоговорочно считать осуществленной свою задачу — создать в законченном виде чисто аналитическую механику — Лагранж не мог. Он и применил сравнительно осторожную формулировку: «механика становится (не стала!) новой областью анализа». Но его программа имела большое значение для дальнейшего развития механики.

Первое основное понятие, которое мы встречаем в «Аналитической механике», — понятие силы.

Сначала, в статике мы узнаем, что «под силой мы понимаем, вообще говоря, любую причину, которая сообщает или стремится сообщить движение телам, к которым мы представляем себе ее приложенной; поэтому силу следует оценивать по количеству движения, которое она вызывает или стремится вызвать» [1].

Неопределенное выражение «количество движения» здесь не расшифровывается. На той же странице Лагранж указывает, что, если в качестве единицы принять какую-либо силу или же ее действие, то выражение для любой другой силы представит собой «не что иное, как отношение, т. е. математическую величину... С этой именно точки зрения и следует в механике рассматривать силы». Этим Лагранж обходится поначалу в пределах статики, причем он подразумевает, что сила имеет определенное направление. Но «динамика — это наука об ускоряющих и замедляющих силах и о переменных движениях, которые они должны вызвать» [2]. Несколько ранее Лагранж формулирует то, что он называет принципом ускоряющих сил [3] — утверждение о том, что действие силы на тело, стало быть и сама сила, определяются ускорением. Лагранж не вводит непосредственно ни скорость, ни ускорение, как направленные величины. Он оперирует с их проекциями на некоторые оси, что позволяет ему свести общий случай движения к прямолинейному. Понятие о массе Лагранж вовсе не дает, термина «ускорение» у него нет (вместо него приведен термин «ускоряющая сила», как правило, обозначающий силу, отнесенную к единице массы). Термин «сила» применяется у Лагранжа в значении современного импульса силы, когда он переходит к рассмотрению явлений удара. Появляется и количество движения, определяемое, как произведение массы на скорость: «силы измеряются количествами движения, которые они способны вызвать, и, наоборот, количество движения тела представляет собою меру силы, какую тело способно проявить по отношению к какому-либо препят-

---

[1] Ж. Лагранж. Аналитическая механика, т I, стр. 17.

[2] Там же, стр. 291.

[3] Там же, стр. 296 и 297.

ствию и которую называют ударом (percussion [1])». Терминология Лагранжа, как видим, неоднозначна, определение основного для него понятия силы не выделено четко. В этом отношении Лагранж неточен и следует традиции, которой в год выхода «Аналитической механики» уже можно было не следовать. Двоякое применение термина «сила», термин «ускорительная сила» вместо термина «ускорение», термин «движущая сила» вместо современного «сила» — все это можно найти, вероятно, не без влияния «Аналитической механики», и в литературе 20—30-х годов XIX в. Только в середине века можно считать окончательно установленной современную терминологию.

Кинематические понятия у Лагранжа особо не вводятся. Он нигде не выделяет понятия скорости и только попутно замечает, что «скорость при неравномерных движениях измеряется дифференциалом пути, разделенным на дифференциал времени» [1]. Лагранж пользуется без явного определения и понятием материальной точки, причем чаще всего в таких случаях он говорит «тело», реже — «точка». Он ничего не говорит о выборе системы отсчета и о том, по отношению к каким координатам «каждое движение, сообщенное телу, является по своей природе равномерным и прямолинейным» [2] (закон инерции). На многие из этих недочетов в «Аналитической механике», недочетов в основных понятиях и определениях, уже указывали [3]. Отчасти они присущи всей механике того времени, отчасти свойственны именно «Аналитической механике» Лагранжа.

Подход Лагранжа к основным понятиям и принципам механики обусловлен в значительной мере его общими установками, его мировоззрением. Сам он по философским вопросам не высказывался, но его близость к кружку Гольбаха, его отрицательное отношение к телеологическому толкованию принципа наименьшего действия, к окрашенным религиозностью «Письмам к одной немецкой принцессе» Эйлера и другие «косвенные улики» достаточны,

---

[1] Там же, стр. 296.

[2] Там же, стр. 293.

[3] См. статью академика А. Н. Крылова «Жозеф Луи Лагранж» в сборнике «Жозеф Лагранж» (1736—1936). М.— Л., 1937, также в Собрании трудов академика А. Н. Крылова, т. VII.

чтобы считать его представителем механистического, недиалектического материализма XVIII в. Метафизика была ему чужда и враждебна. Надо думать, что поэтому он обходит вопросы, связанные с тем или другим толкованием таких общих понятий, как пространство и время, ничего не говорит об относительности движения. Он обрывает традицию обсуждения этих вопросов у классиков механики, представленную Галилеем, Ньютоном, Эйлером. Это было последовательным проведением принципа Ньютона «не сочинять гипотез», которому сам Ньютон не следовал. Оставаясь на твердой почве своих уравнений и не входя в анализ физических основ механики, Лагранж внес вклад тем, что он как бы провел линию уровня. Все, лежащее выше нее, можно было считать прочно установленным и рекомендовать это к применению. То, что находилось ниже ее, можно было пока игнорировать. Это была новая позиция, позиция разумного самоограничения, но заодно это снимало с повестки дня несколько основных вопросов механики и естествознания в целом. Снять их на том основании, что пока нет удовлетворительного ответа на них и что они слишком близки к «метафизике»,— было полезно, потому что развязывало руки для решения задач, поддающихся решению, но это было вредно потому, что отвлекало от более глубокого исследования основных понятий механики и физики и создавало иллюзию благополучия, которого на самом деле не было. Со временем это сказалось.

Некоторые недочеты при введении основных понятий механики у Лагранжа чисто терминологические и общие со многими другими авторами, как мы об этом говорили. Это не значит, что эти недостатки малозначительны. Выработка четкого языка существенна для науки. Путаница в терминологии (например, термин «сила»), которая проходит через весь XVIII в., из-за влияния Лагранжа сохраняется в первые десятилетия XIX в. Это свидетельствует о том, с каким трудом выкристаллизовались основные понятия науки (чем проще и шире, тем труднее), о том, насколько узок был круг ее «служителей» и «потребителей». Лагранж писал не учебный курс, а научный трактат. Научными трактатами были и основные труды его великих предшественников. Их читали только специалисты, и число их было весьма ограничено. Они мирились с недостатками традиционной терминологии, им привычной. Механика как учебная дисциплина излагалась в немногочисленных технических учебных заведениях (в XVIII в. это были школы военных техников и инженеров, появившиеся сначала во Франции) и далеко не во всех университетах. Это была, как правило, только статика с применениями к простым машинам и к определению центра тяжести. Там, где излагались последние достижения науки, слушателей были единицы. Они тоже мирились с недочетами языка. Когда же механика стала учебным предметом достаточно обширной сети технических учебных заведений, когда ее начали развивать не одиночки, а целые группы ученых, отшлифовка и понятий и терминов стала необходимостью. Пример этого дает сам Лагранж, став профессором Политехнической школы. В «Лекциях об аналитических функциях», написанных между первым (1788 г.) и вторым (1813 г.) изданиями «Аналитической механики», Лагранж много места уделяет механике. Здесь он более методичен в разъяснении вводимых им основных понятий: скорость, ускорительная сила (только динамическое понятие) и пр. Это были лекции, прочитанные для довольно широкой аудитории. Второе издание «Аналитической механики» по сравнению с первым улучшено методически, но тем не менее такой отчетливости изложения, в частности последовательности терминологии, какую имеем в «Лекциях об аналитических функциях», нет и здесь.

Перейдем к некоторым выводам. Основные понятия, которыми оперирует «Аналитическая механика», вводятся, как правило, мимоходом и формально. Физические вопросы, с ними связанные, скажем, методы измерения механических величин, вопрос о выборе системы отсчета, не рассматриваются. Достаточно того, что можно выбрать известную систему единиц и тогда «силы, пути, времена и скорости явятся лишь простыми отношениями, обыкновенными математическими количествами» [1].

Теоретическая механика здесь полностью отделена от физики.

Центральное понятие «Аналитической механики» —

---

[1] Ж. Лагранж. Аналитическая механика, т. I, стр. 322.

сила. В статике сила, в сущности, неопределяемая величина, в динамике она связывается привычным для нас теперь образом с массой и вторыми производными от координат по времени, что ведет через общее уравнение динамики к уравнениям движения. Этим в определенном смысле завершалось развитие механики по линии, ведущей к Лагранжу от Ньютона через Эйлера. Благодаря общности и силе приемов «Аналитической механики» метод, основанный на «принципе ускоряющих сил», окончательно станет господствующим. В свое время Даламбер выступал против него. Зачем обращаться к принципу, — восклицал он, — что ускоряющая или замедляющая сила пропорциональна дифференциалу скорости?! Ведь он основан только на неясной аксиоме о пропорциональности следствия причине. И Даламбер заявлял, что этот принцип, верен ли он или сомнителен, ясен или неясен, для механики бесполезен и должен быть из нее изгнан. Такие тенденции были сильны, особенно у ученых картезианской школы. Вместо этого основы для решения задач механики искали в принципах, соответствующих более или менее общим формулировкам закона живых сил и других «вторичных» законов механики. Поэтому долгое время в литературе такие законы именовались принципами. «Аналитическая механика» положила этому конец. Лагранж еще говорит о принципах сохранения живых сил, сохранения движения центра тяжести, сохранения моментов вращения и наименьшего действия, но он лишил их значения первоначальных, так как «все эти принципы следует рассматривать скорее как общие выводы из законов динамики». Доказательством был вывод всех этих принципов из общей формулы динамики. Принцип наименьшего действия и у Лагранжа занимает особое положение, хотя это не подчеркивается: в отличие от первых трех, он не только следствие общей формулы, — сама эта формула может быть из него получена, хотя не в самых широких условиях, следовательно, в известных и достаточно широких пределах этот принцип равносилен общей формуле (что Лагранж не выделяет в своем изложении).

В изложении Лагранжа видно, что основные принципы механики взяты из опыта, но экспериментальные подтверждения и проверки не приводятся. Отделение от физики и здесь полное. В известной мере это было следствием того, что наиболее заметные и общеизвестные успехи механики XVIII в. были достигнуты в астрономических задачах. Блестящее совпадение данных наблюдения и результатов теоретического решения задач небесной механики на основе закона всемирного тяготения Ньютона было самым впечатляющим достижением всей науки этого столетия. Мимо этого не могла пройти ни одна философская система. Это входило существенной составной частью в мировоззрение ученых той эпохи. И это многое объясняет в механике того времени вообще, в «Аналитической механике» в частности. Можно ли было сомневаться в справедливости такого простейшего выражения для силы, которое дает «принцип ускоряющих сил», стоит ли подвергать сомнению основы механики из-за неясности понятия силы, когда рассматривается действие на расстоянии, если настолько точно удается рассчитать движение небесных тел по законам этой механики ускоряющих и дальнодействующих сил? Расчеты настолько точны, что на их основе можно решить, наконец, вековую проблему определения долготы с плывущего вдали от берегов судна, можно с точностью до секунды предсказать сроки солнечных и лунных затмений. Итак, основы механики, которую называют ньютоновой, но которую создавали и в течение целого столетия после Ньютона (в наибольшей мере Эйлер), заложены прочно и не нуждаются в дополнительной проверке. Так происходило отделение теоретической механики от физики еще по одной линии. Поиски «физической» теории тяготения не прекращаются после краха декартовой теории вихрей, они проходят через весь XIX в., но это происходит вне рамок, так сказать, официальной теоретической механики. Вне этих рамок в значительной мере остаются и попытки уточнить и осмыслить пространственно-временную схему, лежащую в основе механики.

«Аналитическая механика» — механика системы материальных точек и (абсолютно) твердого тела, учитывающая только идеальные, двусторонние связи. Силы трения не нашли в ней места. Это также механика идеальной жидкости, сжимаемой и несжимаемой, наконец, механика упругих тел, ограничивающаяся пока частными задачами и не располагающая еще общими соотношениями между усилиями и деформациями.

Вопрос о том, насколько все эти схемы отвечают действительности, не ставился. В изложении Лагранжа они не столько приближения к действительности, сколько некие сущности действительных процессов.

В «Аналитической механике» содержалось еще одно открытие, имеющее первостепенное значение для дальнейшего развития механики. Это лагранжевы уравнения второго рода. До этого уравнения движения были просто системой дифференциальных уравнений второго порядка, индивидуальность они получали лишь при рассмотрении отдельных задач.

Теперь выявилась особенность их математической структуры. Тем самым открылось новое, неизбежно более абстрактное, но общее и плодотворное направление исследований в механике: чисто аналитическое. Аналитическая механика стала вдвойне аналитической: не только в смысле самого Лагранжа, т. е. как общий метод аналитического оформления задач механики, но и как наука об общих аналитических методах решения задач механики. Произошло, это, правда, благодаря трудам позднейших ученых, но это было настолько в духе Лагранжа, что само изменение понятия «аналитическая механика» осталось, кажется, неотмеченным.

Значение лагранжевых уравнений второго рода этим не исчерпывается. Во времена Лагранжа их можно было считать наиболее формальным результатом, но именно они впоследствии вновь связали механику с другими отраслями физики. Уравнения Лагранжа второго рода составляются с помощью лагранжевой функции. Для этого надо знать живую силу механической системы и потенциал действующих на нее сил. Когда в физике XIX в. выработались общие понятия кинетической и потенциальной энергии, уравнения Лагранжа второго рода и канонические уравнения начали применяться в самых различных областях, придавая новую силу механическим интерпретациям. Там, где для современников Лагранжа механика достигала высшей ступени обобщения и отделения от физики, она через несколько десятилетий оказалась наиболее тесно связанной с физикой.

Механика Пуансо и М. Кристиана

Анализ работ Лагранжа показывает, что для развития аксиоматики они дали мало, а изложение основных понятий и законов механики у Лагранжа по отчетливости и строгости уступало тому, что мы имеем в трудах Гюйгенса, Ньютона, Эйлера. Эвклидова или Архимедова строгость перестала быть идеалом, ощущение твердой почвы под ногами появляется только с того момента, когда мы получаем в руки аппарат для решения задач — уравнения движения и равновесия.

Конечно, аналитическое направление Лагранжа не было ни единственным, ни господствующим даже в первой половине XIX в. Однако в вопросах обоснования механики и при аксиоматизации ее изложения другие школы и направления в механике этих десятилетий не отличались существенно от Лагранжа. Показать это — наша ближайшая задача.

Одновременно с механикой Лагранжа в статике продолжается развитие геометрических методов (Монж, Пуансо и др.).

В этой геометрической статике традиционным является изложение «по геометрическому образцу», данному Эвклидом. Уровень разработанности и строгости аксиоматики здесь ничем не отличается от того, что было в геометрии до появления работ Лобачевского и Бояи. Характерен анализ закона сложения сил (постепенно выясняются физические и геометрические предпосылки, к которым можно его свести) и разработка методов приведения системы сил, приложенных к неизменяемой системе, к более или менее простым эквивалентным системам. А в анализе основ динамики представители наглядного направления дали немного. Фактически надо принять во внимание только работы Пуансо.

В работе 1808 г. «Общая теория равновесия и движения систем» [1] Пуансо писал о Лагранже: «Это была

[1] Poinsot. Théorie générale de l'équilibre et du mouvement des Systéms; позже работа перепечатывалась в Eléments de statique. Дальнейшие цитаты см. по изд. 9 Eléments..., Paris, 1848, p. 421—484.

счастливая мысль — исходя из принципа виртуальных скоростей как из аксиомы и не останавливаясь на его рассмотрении, помышлять лишь о том, чтобы извлечь из него единообразный метод получения уравнения равновесия и движения всех возможных систем. Тем самым все трудности механики остались позади: уклоняясь, так сказать, от того, чтобы делать эту науку, ее превратили в вопрос анализа; и это преобразование, предмет и результат аналитической механики, представлялось поразительным примером мощи анализа... Поэтому, естественно, решили, что наука уже сделана, и остается только отыскать доказательство принципа виртуальных скоростей. Но в этих поисках встретились со всеми трудностями, через которые перешагнули, вводя принцип виртуальных скоростей, а так как в книге Лагранжа оставался ясным лишь ход вычислений, то увидели, что туман вокруг курса механики рассеялся лишь потому, что он сгустился, так сказать, в самом начале этой науки»[1]. Перед этим Пуансо упоминает о «неясных и чуждых» понятиях бесконечно малых движений и возмущений равновесия. Он справедливо указывает, что в «Аналитической механике» Лагранжа не должно быть собственно доказательства принципа виртуальных скоростей, «так как доказательство закона, охватывающего всю науку, может быть лишь сведением этой науки к другому закону, столь же общему, но очевидному или, по крайней мере, более простому чем первый, и тем самым делающему этот первый закон ненужным». И далее: «Лагранж действительно открыл общее правило для решения или, по крайней мере, для составления уравнений всех задач механики, эта цель полностью достигнута. Но, чтобы создавать саму науку, надо выдвинуть теорию, которая охватывает в равной мере все точки зрения, с каких науку можно рассматривать. Надо прямым путем идти не к принципу виртуальных скоростей, а к тому ясному правилу, которое сумели из него извлечь для решения задач; и прямое, естественное отыскание такого правила, единственное способное удовлетворить наш ум, составляет главный предмет этого мемуара». [1] Но правило, о котором пишет Пуансо, сводится к принципу освобождения — за-

---

[1] Там же, стр. 422—423.

мене связей введением их реакций, причем не в очень общем случае. Пуансо сначала устанавливает, что, если система сил (приложенных к неизменяемой системе тел и материальных точек) находится в равновесии, ее можно свести к нескольким «двойкам» (парам) сил — группам из двух равных и действующих по одной прямой в противоположных направлениях сил. Пусть на систему накладывается связь, задаваемая уравнением между координатами ее точек $L = \mathrm{const}$. Фиксируем все аргументы в L, кроме координат m, n, p одной и той же точки. Тогда заданная связь означает, что эта точка должна находиться на поверхности $L = \mathrm{const}$, откуда (не оговаривая отсутствия трения) Пуансо заключает, что на точку действует сила, составляющие которой пропорциональны «первым функциям» от L, т. е. частным производным $\frac{\partial L}{\partial m}$, $\frac{\partial L}{\partial n}$, $\frac{\partial L}{\partial p}$. Так у Пуансо появляются соответствующие реакции идеальной связи $\lambda \frac{\partial L}{\partial m}$, $\lambda \frac{\partial L}{\partial n}$, $\lambda \frac{\partial L}{\partial p}$. Это формулируется в виде особой теоремы: «Каковы бы ни были уравнения $L = 0$, $M = 0, \ldots$ между координатами различных точек системы, каждое из них для равновесия требует, чтобы к этим точкам вдоль их координат были приложены некоторые силы, пропорциональные первым производным функциям по соответствующим координатам» [1]. Отсюда следуют уравнения равновесия вида $X + \lambda \frac{\partial L}{\partial x} + \mu \frac{\partial M}{\partial x} + \ldots = 0$ и вывод, что «вся механика сводится к умению оценить те взаимные сопротивления, которые могут оказывать друг другу, в силу связывающих их условий, различные точки системы» [2]. Уравнения же движения получаются из того положения, что неуравновешивающиеся «приложенная сила» ($X_1, \ldots$) и сопротивления связей $\left(\lambda \frac{\partial L}{\partial x}, \ldots\right)$ дают теперь «ускорительную силу» $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \ldots\right)$, т. е.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda \frac{\partial L}{\partial x} + \mu \frac{\partial M}{\partial X} + \ldots$$

[1] Там же, стр. 453.
[2] Там же, стр. 456.

(в расчете, очевидно, на единицу массы). Итак, «мы видим, что не нужно обращаться к знаменитому принципу Даламбера, который сводит динамику к статике. В силу этого принципа, если каждое вынужденное движение разложить на два, одно из которых тело действительно будет совершать, то все вторые движения должны уравновешиваться друг с другом; то-есть, если разложить каждое вынужденное движение на два, одно из которых теряется, то второе будет действительным. Но это сводится к тому, что только что сказано, а именно, что реальное движение каждой точки есть результат ее вынужденного движения и сопротивления, которое она испытывает вследствие связи с другими точками, что само по себе очевидно. Таким образом, по сути принцип Даламбера всего лишь эта простая мысль, которая едва заметна в ходе наших рассуждений и которая облекается в форму принципа только благодаря особому способу ее выражения»[1].

Все это характеризует основные принципы механики Пуансо. В оценке принципа Даламбера, в понимании и применении «принципа ускоряющих сил» он не отличается от Лагранжа. Но принцип виртуальных скоростей как основа статики для него неприемлем из-за своей отвлеченности и из-за чуждых статике кинематических представлений. Для системы без связей условия равновесия выводятся геометрически из простейших аксиом статики, для систем со связями имеем принцип замены геометрических связей силами реакций. Последнее положение возведено у Пуансо в ранг принципа. В современных курсах механики «принцип Пуансо» в том же положении, в каком у Пуансо принцип Даламбера: «всего лишь простая мысль, которая едва заметна в ходе рассуждений».

Еще меньше для аксиоматики механики могло дать «индустриальное направление». Обратимся, например к «Трактату по промышленной механике» М. Кристиана[2].

Автор отстаивает положение, что есть две механики: механика, предмет которой изучение и отыскание средств дополняющих физическую силу человека и снижающих затраты времени при выполнении необходимых работ, —

[1] Там же, стр. 459.

[2] M. Christian. Traité de Mécanique industrielle, t. I—II. Paris, 1822—1825.

механика индустриальная и механика рациональная, которая состоит в логически развиваемых выводах из одного общего положения, при различных частных допущениях. Таким, по мнению Кристиана, является закон равенства действия и противодействия. В этой рациональной (теоретической) механике сила, как и ее воздействие,— величины абстрактные, которым приписываются какие угодно качества и значения. В индустриальной механике движущая сила — реальность, нечто вроде первичного вещества, которое можно приходовать, экономить, которое всегда покупают и за которое часто платят немалую цену. Кристиан заходит настолько далеко, что отвергает даже возможность рассмотрения индустриальной механики как применения принципов и результатов теоретической механики. Он оговаривает, что индустриальную механику нельзя смешивать с искусством конструировать машины. Так, эта наука выявляет, на чем основана правильность и точность работы зацеплений, гидравлического колеса, поршня в пагнетающем насосе, вообще механизма или любой механической операции, а предметом прикладных дисциплин и инженерного искусства являются выбор подходящих материалов, изготовление чертежей на все детали с требуемой точностью и сочетание этих частей в соответствии с условиями, установленными наукой. Итак, индустриальная механика только соприкасается с теоретической, но не «порождается» ею, так как ее единственными основами являются опыт и наблюдение. Только исходя из данных опыта и наблюдения, индустриальная механика указывает инженерному искусству (от которого она независима) принципы и правила, которыми оно должно руководствоваться. Задача индустриальной механики уточняется на основе классификации средств и операций, применяемых для выполнения механических работ.

При выполнении своей программы Кристиан не может, конечно, обойтись без отвергаемой им теоретической механики. Но он действительно сводит к минимуму заимствуемые оттуда понятия и сведения. У него нет уравнений движения, математический аппарат — в пределах элементарного курса, систематически приводятся ссылки на результаты опыта и таблицы замеренных в опыте необходимых расчетных величин — от величины производимой за день работы человеком, лошадью до данных об упругости водяного пара при различных температурах. Не будем входить в подробности, чтобы проиллюстрировать идейную направленность трактата, рассмотрим, как вводится понятие силы (дальнейшее содержится в первой главе первой части трактата). Сначала узнаем, что можно описать и оценить эффект «движущей силы», но определить ее нельзя. Когда имеем источник силы — двигатель, анализируя его действие, убеждаемся, что оно определяется действующей массой и скоростью, с которой действие производится. Если, применяя движущую силу в промышленности, для нас главное произвести «большое действие», непосильное для человека, необходимо определить мощность двигателя. Для такого определения бесполезно знание «силы двигателя» — это приведет лишь к неопределенным данным о количестве движения, которое двигатель сообщает. Необходимо знать количество произведенной работы. После этого дается определение работы как произведение силы на путь, проходимый в направлении ее приложения перемещаемым телом (через работу силы тяжести, собственно — против силы тяжести) и вводится понятие мощности. Все это излагается не только на языке механики, но и на языке экономики — работа то, что оплачивают.

«Молекулярная механика» Лапласа

В первой половине XIX в. видное место занимает школа молекулярной механики. Она восходит к Лапласу. Следует отнестись с полным вниманием к «Первой книге» первой части его знаменитого трактата по небесной механике[1]. Там выведены общие уравнения равновесия и движения системы материальных точек, твердого тела, идеальной жидкости, закон движения центра масс, законы живых сил и площадей. Во всем этом нового нет, но существенно то, какова система основных понятий и общих законов, из которой исходит Лаплас.

[1] Traite de Mecanique Célestc, t. I. Paris, 1799.

На первый взгляд Лаплас строго следует за Лагранжем: принцип виртуальных перемещений в статике и общее уравнение Лагранжа в динамике и у него занимают центральное положение. Но Лаплас гораздо «физичнее» — он дает разъяснения по поводу вводимых основных понятий и формализм «Аналитической механики» оказывается вложенным в определенную систему физических представлений.

Движение — перемещение тела по отношению к системе тел, которые мы считаем неподвижными (но все тела могут двигаться) и в этом смысле — всякое движение относительно. Но мы представляем себе безграничное, неподвижное и проницаемое для материи пространство и относим положение тел к его частям. Таким образом, тело движется (абсолютно!), когда его положение последовательно соответствует различным местам «пространства». Это — ньютоновская концепция абсолютного пространства, но вопрос о времени обходится молчанием. Причина того «особого видоизменения», в силу которого тело перемещается из одного места в другое, «неизвестна и всегда будет неизвестной; ее называют силой; определить можно только ее проявление и законы ее действия»[1]. Сила проявляется в том, что приводит в движение материальную точку (если нет препятствий), и направление силы — направление прямой, по которой сила стремится двигать точку своего приложения. Приписав силе некоторые очевидные свойства и допустив, что можно измерять силы в каких-то единицах, Лаплас выводит правило параллелограмма сил, показывает, как разлагать силу на составляющие, на примерах поясняет и в общем виде формулирует принцип виртуальных перемещений как необходимое и достаточное условие равновесия (для материальной точки).

В динамике материальной точки формулируется с ссылкой на данные опыта и наблюдения закон инерции: точка, на которую подействовала и прекратила свое действие какая-то сила, сохраняет направление и скорость своего движения при отсутствии препятствий и сопротивлений. Сила (мы подходим к вопросу об ее измерении) определяется нами по пути, который она

---

[1] Там же, стр. 4.

заставляет проходить точку приложения за определенное время, т. е. по скорости. Но так как мы не знаем природы силы, то характер зависимости между силой и сообщаемой ею скоростью должен быть определен из опыта. Анализируя явления, связанные с движением Земли, Лаплас приходит к выводу, что сила пропорциональна сообщаемой скорости.

«Итак, вот два закона движения: закон инерции и закон, что сила пропорциональна скорости, взятые из наблюдений. Эти законы — самые естественные и самые простые, какие можно себе представить, и несомненно, что они вытекают из самой природы материи. Но, так как природа материи неизвестна, то они для нас — факты, взятые из наблюдений, впрочем, единственные факты, которые механика заимствует у опыта» [1].

Как видим, у Лапласа второй закон динамики обосновывается чисто физически, без формально-логических умозаключений. У Лапласа, как у Лагранжа, так и у всех авторов той эпохи, речь идет о пропорциональности силы скорости, потому что имеется в виду импульсивная сила — мгновенно подействовавшая и сразу прекратившая свое действие. Отсюда переходим к случаю, когда сила действует на тело непрерывно, как, например, тяготение. Лаплас оговаривает, что причины тяготения и других подобных сил неизвестны, поэтому мы не знаем, действуют ли они в действительности непрерывно или их последовательные воздействия отделены неуловимыми для нас промежутками времени. Практически (тут следует ссылка на представления анализа бесконечно малых) обе гипотезы равносильны. Лаплас остается при первой — «вместе с геометрами», и для него очевидно, что мгновенное действие силы надо считать пропорциональным ее величине (intensité) и элементу времени dt, в течение которого она действовала.

Обратим внимание на то, что ускорения, как такового, и Лаплас не вводит — это понятие и у него еще не используется. Нет у него ничего и относительно массы, все выглядит так, как если бы имелось в виду пробное тело единичной массы, но это явно не оговорено.

---

[1] Traite de Mecanique Céleste, t, I. Paris, 1799, p. 18.

Изложение основ механики у Лапласа (который представляет здесь и картезианскую традицию) по строгости не отличается от того, что имеется у Лагранжа. Главной задачей науки Лаплас считал не дальнейшее углубление основ, а создание новой ее области — молекулярной механики, которая должна была включить всю область физических явлений, не охватываемую теорией всемирного тяготения. Тяготение тел незначительной величины становится незаметным, но между частицами тел оно вновь проявляется бесконечно многообразно — таков тезис Лапласа. Твердость тел, кристаллизация, преломление света, капиллярные явления, химические реакции — результат действия сил притяжения, познать которые одна из главных задач естествознания. Вся материя во власти различных сил притяжения: одни из них управляют движением Земли и небесных тел, другие, чье действие заметно лишь на расстояниях неуловимой малости, определяют внутреннее строение различных веществ. Почти невозможно определить, как эти последние силы зависят от расстояния, но, исходя только из того, что они действуют лишь «в крайней близости к соприкосновению», можно построить теорию многих явлений. Этот грандиозный для своего времени синтез, вернее его замысел, возник на основе молекулярной теории строении вещества, уже получившей множество дополнительных подтверждений и утверждавшейся в физике, в химии и под влиянием успехов небесной механики. Теория капиллярности (и других явлений в поверхностном слое жидкостей) Лапласа целиком основана на описанных общих представлениях молекулярной механики. Экспериментальное подтверждение ее выводов (в опытах Гей-Люссака), казалось, делало эти представления незыблемой основой. Успехи теории капиллярности расценивались весьма высоко. Лаплас писал об этом в таких выражениях: «Одно из наибольших преимуществ математической теории, притом самое существенное при установлении ее достоверности, состоит в том, что она связывает воедино явления, кажущиеся разрозненными, и не с помощью расплывчатых соображений и догадок, а с помощью строгих расчетов. Так, закон всемирного тяготения связывает приливы и отливы морей с законами эллиптического движения планет. Итак, изложенная выше теория устанавливает зависимость между прилипанием пластинок к поверхности жидкостей, а также между притяжением и отталкиванием небольших тел, плавающих на ее поверхности, с одной стороны, и подъемом той же жидкости в капиллярах,— с другой»[1].

Притягательная сила идей Лапласа была очень велика. Они формировали научное кредо многих механиков последующих двух поколений. Эти идеи прошли через творчество Пуассона, вдохновили многие работы Коши, повлияли на молодого Остроградского. В своей «Заметке о различных вопросах анализа»[2] от 1830 г. Остроградский писал, что история математической физики, несомненно, будет считать, что фундамент ее заложен Лапласом и Пуассоном. Он имел в виду их «физическую механику» (термин Дюэма). В 1834 г. Ампер, кроме кинематики, статики и динамики, ввел четвертую науку, входящую в состав механики. Он не мог указать трактата, где бы она была изложена в целом. Ее различные части,— писал Ампер,— разбросаны в разных мемуарах и некоторых специальных трудах, принадлежащих самым знаменитым математикам. «Эти ученые, перенеся на частицы, из которых состоят тела, законы, полученные в динамике для отдельных точек или тел конечного объема, обнаружили в равновесии и движении этих частиц причины явлений, происходящих в телах. Такую теорию равновесия и движения частиц я называю молекулярной механикой»[3].

Аналитическое направление в механике

Помимо охарактеризованных направлений и тенденций, видное место в механике второй четверти и середины века занимают прямые последователи Лагранжа — представи-

---

[1] Traite de Mecanique Céleste, t. I. Paris, 1789, p. 342.

[2] М. В. Остроградский. Полн. собр. тр., т. I. Киев, 1959, стр. 118.

[3] A. M. Ampere. Essai sur la philosophie des sciences. Paris, 1834, p. 53—54.

тели аналитического направления. Это прежде всего Гамильтон (испытавший, впрочем, влияние идей молекулярной механики), Якоби, Остроградский. Новые вариационные принципы, канонические уравнения, применение уравнений в частных производных для интегрирования уравнений движения — таковы основные достижения этих первоклассных исследователей. Физические основы и их аксиоматическое оформление не в поле их интересов, усилия направлены на разработку нового математического аппарата.

Такой переход «от механики к математике» обычно характеризуют как формальное направление исследований. Например, Якоби, который положил много труда на развитие математических методов, ставших актуальными в связи с открытиями Гамильтона, не избежал таких упреков. В литературе встречаются упоминания о «формальной школе» в механике, основанной Якоби в Германии. Подобного рода характеристики дают и Лагранжу. Например, в некоторых работах по истории механики XVIII в. К. Трусделл противопоставляет работы Эйлера «формальным исследованиям» Лагранжа и, видимо, склонен рассматривать влияние Лагранжа в области механики как отрицательное. Подобные оценки, с нашей точки зрения, не оправданы; они не учитывают внутренней логики развития механики, да и внешние факты не приняты здесь во внимание в должной мере. Ведь совершенно неизбежно, что при достаточном развитии теории, когда некоторые определенные задачи удается сформулировать математически, математический аппарат, необходимый для их решения, становится предметом исследования и разработки, если его нет в готовом виде. И такое математическое исследование часто происходит в значительной мере в пределах той науки, для которой оно понадобилось. Но если для математики такое направление обычно является прикладным, то в механике оно выглядит формальным. Тем не менее такой этап при изучении проблемы неизбежен и необходим. Со временем, когда движение в этом направлении будет приостановлено «сопротивлением материала», наступит пора поисков новых интерпретаций результатов, полученных математически, и принципиально новых постановок проблемы. И то, и другое может дать средства для преодоления новых трудностей. С появлением таких средств обозначится новый «формальный» период, который снова может вызвать упреки в чрезмерной абстрактности и отрыве от практики. В описанной (конечно, весьма упрощенной) схеме не учтены мощные внешние факторы, которые могут решающим образом входить в игру. Эти факторы внешние по отношению к изолированно рассматриваемой отдельной науке, но их можно охарактеризовать как выражающие одни — внутреннюю логику развития науки в целом, другие — общие закономерности развития общества. Так, в теоретической механике XIX в. многое тесно связано с развитием физики. Например, определенная механическая модель оказывается лишенной смысла или только недостаточным приближением вследствие изменения физических представлений. Дает ли это основание упрекать в «формализме» тех, кто работал над этой моделью, что было в свое время неизбежным и необходимым этапом?

Поучительными примерами являются система «молекулярной механики» в духе Лапласа и модель идеальной жидкости. Социальные условия во многих случаях приводят к тому, что затягивается этап чисто теоретической разработки и полученные результаты медленно осваиваются и корректируются практикой. Это может надолго задержать развитие теории, приводит к тому, что она выглядит формальной, оторванной от практики. Но это не дает оснований оценивать тех, кто ее разрабатывал, как представителей формального направления. Например, блестящие работы Гамильтона по геометрической оптике в течение нескольких десятилетий оставались без применений. Однако такой факт не говорит о «формальности» направления, представленного его работами. Это можно объяснить на основе привлечения большого материала из истории техники и с учетом условий общественного развития в XIX в. Можно не сомневаться, что такой анализ выявит обусловленность подобного «запаздывания», тогда как анализ самих работ Гамильтона показывает (в рамках истории науки) полную закономерность их появления.

Вернемся к теории Гамильтона — Якоби — Остроградского. Ее надо рассматривать как целиком идущую (по идеям и методам) в русле аналитической механики

Лагранжа. Новые успехи аналитического метода, связанные с дальнейшим увеличением доли абстракции и разработкой математического аппарата, позволили в близком будущем заново и в более широком плане осмыслить физическую суть этих обобщений и расширить область их применения. Те, кто выполнял эту работу, оглядываясь на прошлое, выделяли в нем абстрактный аспект. Пользуясь трудами исследователей того периода, они не недооценивали их значения. Это отчетливо видно в высказываниях Максвелла о методах Лагранжа и его последователей.

В начале главы V четвертой части «Трактата об электричестве и магнетизме» (том второй) [1] читаем:

«В четвертом разделе второй части своей «Аналитической механики» Лагранж дал метод сведения обычных динамических уравнений для движения частей составной (composed) системы к такому их числу, которое равно числу степеней свободы системы. Уравнения движения составной системы были даны Гамильтоном в другой форме, что привело к значительному обогащению этой высшей части чистой динамики. Так как мы стремимся ввести электрические явления в рамки динамики и для этого нам необходимо иметь динамическое представление в виде, пригодном для непосредственного применения к физическим вопросам, мы посвятим эту главу изложению динамических идей с физической точки зрения.

Целью Лагранжа было сделать динамику применением математического анализа. Он начал с того, что выразил элементарные динамические зависимости в виде соответствующих зависимостей между чисто алгебраическими величинами и вывел из полученных таким образом уравнений свои окончательные уравнения чисто алгебраическим путем. В уравнениях движения для составляющих систему частей появляются некоторые величины (выражающие реакции частей системы, вызываемые их физическими связями), и с математической точки зрения исследование Лагранжа представляет метод исключения этих величин из окончательных уравнений. На различных этапах этого исключения наш ум занят вычислениями и

---

[1] I. C. Maxwell. Treatise on the Elecfricity and magnetism, V. II. London, 1873 (перевод автора).

его не надо обременять динамическими представлениями. Напротив, наша цель — развитие наших динамических представлений. Поэтому мы воспользуемся трудами математиков и сделаем обратный перевод их результатов с языка математического анализа на язык динамики, так чтобы наши слова вызывали в уме образ не некоторого алгебраического процесса, а некоторого свойства движущихся тел» [1].

В конце этой главы своего трактата Максвелл пишет:

«Такое описание методов чистой динамики не бесполезно, потому что Лагранж и большинство его последователей, которым мы обязаны этими методами, вообще ограничивались их доказательством и, чтобы сосредоточить свое внимание на символах, с которыми они имели дело, стремились изгнать все представления, кроме чисто количественных... Чтобы иметь возможность ссылаться на результаты такого анализа, пользуясь обычным динамическим языком, мы старались дать перевод метода на язык, понятный без использования символов» [2].

«Так как развитие идей и методов чистой математики сделало возможным, благодаря созданию математической теории динамики, выявить многие истины, которые нельзя было бы открыть, не обучившись математике, то если мы хотим создать динамическую теорию других наук, мы должны воспринять и эти динамические истины, и математические методы.

Формулируя идеи и термины любой науки, имеющей дело, как наука об электричестве, с силами и с их действиями, мы должны постоянно иметь в виду идеи, являющиеся достоянием основной науки — динамики, чтобы мы могли с самого начала развития науки избежать противоречий с тем, что уже установлено, а также для того, чтобы с уточнением наших взглядов принятый нами язык нам помогал, а не мешал» [3].

---

[1] I. C. Maxwell. Указ. соч., стр. 184—185.

[2] В этой характеристике упущено лишь то, что, отвлекаясь от обычного языка механики в силу стремления к общности, мастера аналитического направления в случае необходимости делали обратный перевод, о котором говорит Максвелл.

[3] Там же, стр. 194.

Развитие механики в конце XIX в.

В 60—70-е годы теоретическая механика существенно отличается от механики первой половины века. Крайности индустриальной механики преодолены: работающие в области приложений не пытаются отвергать систему понятий и представлений, выработанных теоретиками, а стремятся найти разумное упрощение как постановки технических задач, требующих решения, так и методов, предлагаемых теорией техникам. Молекулярная механика сходит на нет, хотя именно на основе ее представлений в свое время были выведены общие уравнения теории упругости и динамики вязкой жидкости: закон взаимодействия молекул вскрыть не удалось, а все результаты, добытые приверженцами молекулярной механики, оказалось возможным получить в рамках феноменологической теории, не прибегая к гипотетическим представлениям о строении вещества. Расхождения между сторонниками наглядных (геометрических) методов и последователями аналитического направления при наличии общей для тех и других системы основных понятий сгладились до уровня методики изложения. И если не говорить об эпигонах и о течениях второстепенного значения, можно выделить две главные линии развития, одну из которых условно назовем геометрической, вторую — физической.

Геометрическая линия продолжает аналитическое направление предыдущего периода, обогатив его новыми представлениями, привнесенными из геометрии. Разработанный к тому времени язык многомерной геометрии, идеи неэвклидововой геометрии Лобачевского и Римана, аппарат теории дифференциальных форм, созданный геометрами, позволили (в работах Бельтрами, Липшица и др.) превратить в законченную теорию то, что у Гамильтона, Якоби, Остроградского было преимущественно попутной иллюстрацией. В 1889 г. Г. Дарбу во втором томе своих «Лекций по теории поверхностей» систематизировал эти результаты. В главе VI пятой книги изложена аналогия между динамикой плоских движений и теорией геодезических линий, в заключительной, восьмой главе, под тем же углом зрения рассмотрена «Общая проблема динамики». В этих исследованиях физические основы механики и система исходных понятий принимались без критического разбора как нечто данное. Таким образом, вопросы аксиоматики механики оставались незатронутыми. Однако выделение геометрического субстрата в проблемах механики было существенно для анализа ее основ. Вторая главная линия развития — физическая — представлена работами таких естествоиспытателей, как Гельмгольц, Максвелл, В. Томсон (Кельвин), Дж. Томсон, Жуковский и др. С ней связана разработка теории моноциклических систем, теории вихрей, обращение к проблемам устойчивости и многое другое. Использование, на основе общих представлений о силах, энергии и работе, аналитического аппарата механики вдохновлялось идеями о единстве сил природы и без анализа исходных положений здесь нельзя было обойтись. Но были и другие факторы, действовавшие в том же направлении.

Мы не имеем оснований говорить о застое в развитии и осмысливании аналитических методов механики в середине XIX в. Однако их эффективность при решении некоторых задач оставалась примерно на прежнем уровне, а «внутреннее накопление сил» было скрыто от современников. Применение эллиптических функций (тогда еще нового средства) позволило лучше оформить и углубить анализ уже известных решений задачи о вращении твердого тела вокруг точки, но новые случаи интегрируемости не были открыты. В задаче трех и большего числа тел нельзя было отметить сколько-нибудь существенное продвижение. Какие-либо новые общие интегралы уравнений динамики в первой половине XIX в. так и не появились. Таким образом продолжавшееся оттачивание математического аппарата не дало существенных успехов в аналитической механике точек и твердых тел. В механике континуума трудности математического характера были еще больше. Это было одним из стимулов для обращения к основам механики с целью их углубления и критического разбора.

Такое обращение стимулировалось и другими обстоятельствами. После революции 1848 г., когда рабочий класс в Западной Европе выступает как самостоятельная политическая и идеологическая сила, буржуазный радикализм сходит на нет. Заодно теряет свою привлекательность механистический материализм — преобладающее мировоззрение естествоиспытателей предыдущих поколений, и напор идеализма на естествознание усиливается. Стихийный материализм подавляющего большинства ученых остается в силе. Однако из-за политических и социальных условий того времени им неизвестен диалектический материализм Маркса и Энгельса.

Наступает переломная эпоха, эпоха пересмотра унаследованных взглядов, поисков нового мировоззрения. Повышается интерес к основам науки и к вопросам эпистемологии и у тех, кто хочет сохранить прежние позиции, и у тех, кто хочет их подорвать либо обновить.

В развитии механики наступает полоса критического пересмотра принципов и фундаментальных понятий. Этому уделяют все больше внимания авторы трактатов и учебных курсов, появляются и специальные работы. Знамением времени было, например, то, что в 1869 г. философский факультет одного из ведущих немецких университетов (Геттингенского) предложил на соискание премии в качестве темы «Критическую историю общих принципов механики». Факультет рекомендовал начать изложение с эпохи Галилея и осветить достижения античной математики и механики (но не теории спекулятивной философии древности) в порядке введения и лишь в объеме, необходимом для понимания.

Были сформулированы требования к исторической части работы, претендующей на премию, и к критической части. В последней нужно было показать по отношению к каждому «существенному принципу механики, в какой мере он является лишь очевидным логическим положением, в какой мере — необходимой для использования математической формулировкой такого положения, в какой мере он представляет выражение опытного факта, установленного с полной общностью, и в какой мере он лишь правдоподобное при современном уровне сведений утверждение». На этот конкурс поступило пять работ. Первая премия была присуждена указанному произведению Е. Дюринга — относительно лучшему из многочисленных произведений этого автора, известного сейчас, пожалуй, только благодаря замечательной книге Энгельса. «Критическая история общих принципов механики» Дюринга, несмотря на все слабые стороны ее автора, все же остается первым по времени появления произведением на эту тему и содержит отдельные интересные замечания и наблюдения. Серьезного влияния на ход критического пересмотра основ механики эта книга не оказала. Иначе и не могло быть: если при анализе механики XVII—XVIII вв. Дюринг бывает содержателен, то в XIX столетии для Дюринга все наиболее ценное в механике связано только с Пуансо и Р. Мейером, неэвклидова геометрия объявляется попутно мистицизмом и т. д. Априоризм Дюринга, разоблаченный и разгромленный Энгельсом, проявляется здесь самым отрицательным образом. Примерно в одно время с Дюрингом начал работу по критическому пересмотру основ механики Э. Мах. Наиболее полное и систематизированное изложение своих работ в этой области Мах дал в книге «Механика в ее развитии. Историко-критическое изложение», вышедшей первым изданием в 1883 г. В том же году появилась содержательная работа Штрайнтца «Физические основы механики». Об основных понятиях и принципах механики больше обычного говорят в своем «Трактате по натуральной философии» В. Томсон (Кельвин) и Тэт, об этом пишут Максвелл (особенно в популярной работе «Материя и движение») и Гельмгольц. В 90-е годы Г. Герц дает новое построение механики. Статьи о понятиях и принципах механики начинают систематически появляться в физических и философских журналах. Все это характерно для описываемого периода, когда развитие механики становится все теснее связанным с развитием физики. На обсуждение ставятся вопросы, которые в теоретической механике первой половины века обходились молчанием или разъяснялись мимоходом, притом не всегда удовлетворительно с точки зрения новой эпохи.

Описание этапов того анализа основных понятий и положений механики, который был произведен в последние десятилетия века — это самостоятельная и достаточно обширная тема. Ограничимся общей оценкой: этот анализ не завершился созданием общепринятого аксиоматического построения механики. Он и не мог завершиться по двум обстоятельствам. Строгое понятие аксиоматической теории не было еще выработано («Основания геометрии» Д. Гильберта вышли первым изданием в 1900 г.) даже в математике. Аксиоматизация означала только дедуктивное развитие определенной содержательной теории. Основы содержательной теории механики по сути дела и при теснейшем переплетении ее проблем с общефизическими, что так характерно для эпохи, были основами всей физики. Поэтому преодоление возникших трудностей было общефизической задачей и стало делом новой эпохи, началом которой принято считать создание специальной теории относительности.

Таким образом, несмотря на большую подготовительную работу последних десятилетий XIX в. проблема аксиоматизации в классической механике к началу нового столетия осталась открытой.

ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ ПРОБЛЕМАМ ФИЗИКИ [1]

Л. БРИЛЛЮЭН

Нью-Йорк

Научная теория информации, разработанная в течение последних лет, нашла важное применение в области телеосвязи. Она привела также к интересным дискуссиям по вопросам, связанным с фундаментальными понятиями научного эксперимента. В частности, она заставила физиков вновь изучить вопрос о роли экспериментальных ошибок и потребовала полной переоценки их действительного значения. Раньше ошибки рассматривались как вредный вторичный эффект, которым во многих случаях можно пренебрегать и который не должен приниматься во внимание теорией. Предполагалось, что с помощью точных приборов можно сделать ошибки сколь угодно малыми и что они не играют никакой принципиальной роли. Такова была точка зрения математиков, изучавших аксиомы геометрии. Большинство физиков явно или неявно принимало такую идеализацию. Современной физике пришлось освободиться от подобных нереалистических построений. Пришлось согласиться с тем неприятным фактом, что ошибки не могут быть сделаны сколь угодно малыми и что их следует принимать во внимание как неотъемлемую часть теории.

---

[1] Основой для статьи послужил материал пяти лекций, прочитанных автором в Лондонском королевском колледже 21—29 октября 1958 г.

Ошибки, неопределенности и наблюдения

До конца XIX столетия большинство ученых считали, что экспериментальные наблюдения позволяют обнаружить «законы Природы». Правда, наблюдения претерпевают возмущения из-за разного рода ошибок, но было принято обобщать имеющиеся несовершенные данные и формулировать простые математические законы. Предполагалось, что эти точные законы управляют внешним миром, независимо от того, можно ли его в принципе наблюдать или нет. Например, законы механики и всемирного тяготения Ньютона считались строгими, хотя они подтверждались только с точностью до экспериментальных ошибок.

Первые встретившиеся трудности были связаны со статистической термодинамикой. Возник вопрос, каким образом можно вывести необратимые законы термодинамики из строго обратимых законов механики. Появилась также проблема детерминизма, который считался доказанным научными исследованиями, хотя на практике было невозможно проверить подобное утверждение с помощью какого-либо экспериментального устройства.

С появлением «принципа неопределенности» Гейзенберга значение ошибок при наблюдениях выступило на передний план. Физики убедились в том, что невозможно одновременно точно измерить координату x и импульс p_x и что соответствующие ошибки связаны соотношением

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant h. \qquad (1)$$

В любом эксперименте, который дает измерение x с ошибкой Δx, происходит возмущение системы, в результате которого p_x изменяется на неизвестную величину Δp_x, так что точное измерение p_x оказывается невозможным. При наблюдении всегда возникает возмущение— это принципиальное и неизбежное обстоятельство. Если имеется совершенно изолированная и невозмущаемая система, то ее нельзя наблюдать. Наблюдение обязательно предполагает известную временную связь между системой и измерительным прибором, которая приводит к возмущению наблюдаемой системы. Этому общему замечанию была дана точная формулировка в открытом мною законе, названном «принципом негэнтропии информации». Согласно этому закону, наблюдение дает известное количество информации ΔI и эту информацию можно количественно измерить и сопоставить с неизбежным увеличением энтропии ΔS в измерительном устройстве при измерении. Получается следующий результат (в единицах энтропии):

$$\Delta S \geqslant \Delta I \quad \text{или} \quad \Delta I + \Delta N \leqslant 0, \tag{2}$$

где $\Delta N = -\Delta S$ — негэнтропия [1].

Эти условия означают, что должно быть израсходовано некоторое конечное количество энергии ΔE, которое должно превратиться в тепло, т. е.

$$\Delta E = T \cdot \Delta S \geqslant T \cdot \Delta T, \tag{3}$$

где T — абсолютная температура

Определение величины ΔI можно кратко сформулировать следующим простым образом. Пусть P_0 — число равновозможных случаев до измерения, P_1 — число таких случаев после наблюдения. Тогда по определению

$$\Delta I = k \ln \frac{P_0}{P_1}, \tag{4}$$

где k — постоянная Больцмана. При очень высокой точности P_1 становится очень малым, и количество информации оказывается очень большим. Бесконечно большая точность, т. е. бесконечно малая ошибка означала бы бесконечно бо́льшое увеличение информации и, следовательно, затрату бесконечно большого количества энергии ΔE, что совершенно невозможно.

Аналогичное мнение было выражено Борном. Борн исходил из того факта, что каждый метод наблюдения имеет свои недостатки, вследствие чего экспериментальные ошибки оказываются неизбежными. Вообще говоря, именно это обстоятельство сформулировано более точно в нашем условии (2).

---

[1] В тексте neg(ative) entropy — негативная (отрицательная) энтропия.— *Прим. пер.*

Когда требуется особенно высокая точность, возникает новое ограничение, которое еще больше осложняет измерение очень малых расстояний. Можно показать, что для наблюдения расстояния x с очень небольшой ошибкой Δx требуется очень большое количество энергии ΔE:

$$\Delta E \cdot \Delta x \geqslant \frac{1}{2} hc. \tag{5}$$

Эта энергия (ΔE) частично рассеивается в соответствии с приведенными условиями (2) и (3), а когда Δx становится чрезвычайно малым (например, меньше 10^{-13} *см*), вступает в силу условие (5), которое требует затраты значительно большей энергии, чем это следует из уравнения (3).

Приведенные условия (3) и (5) можно объяснить просто. В работе Изинга установлено, что броуновское движение (тепловые шумы) кладет предел точности наблюдений. Тепловое движение характеризуется энергией порядка kT на одну степень свободы. Чтобы на фоне нерегулярного движения с энергией kT произвести надежное наблюдение для одной степени свободы, необходимо затратить энергию, бóльшую kT. Если наблюдение производится для многих степеней свободы, то требуется энергия, пропорциональная T; эта энергия расходуется, что приводит к возрастанию энтропии ΔS, не зависимому от T. По существу, именно этот механизм лежит в основе уравнений (2) и (3).

Что касается условия (5), то, как показывает простой подсчет, энергия ΔE, необходимая для измерения сечений частиц очень малого диаметра Δx, составляет много миллионов электрон-вольт. Соотношение (5), действительно, справедливо для синхротронов или других мощных ускорителей, используемых для измерения весьма малых сечений столкновения атомных частиц.

Подводя итоги, можно сказать, что наблюдение является необратимым процессом, неизбежно связанным с возрастанием энтропии в измерительной аппаратуре: за полученную информацию приходится расплачиваться негэнтропией. Как заметил Габор, «никогда нельзя получить что-либо даром, даже информацию». Это замечание имеет далеко идущие выводы, к рассмотрению которых мы переходим.

Объективный мир и проблема детерминизма[1]

В ярких выражениях Шредингер говорил о том, как многим мы обязаны греческим философам, от которых мы унаследовали немало фундаментальных идей. Эти идеи оказались чрезвычайно полезными, однако теперь мы достигли такого момента, когда мы должны коренным образом пересмотреть их. Ученый обычно ограничивался ролью стороннего наблюдателя и принимал существование «вокруг нас реального объективного мира», управляемого точными математическими законами (законами природы), в котором явления протекают без возмущений, независимо от того, наблюдаем мы их или нет.

Современная точка зрения отличается от этой. Если мы не производим никаких наблюдений, то следует признать, что мы не знаем, что происходит вокруг нас. Если мы производим какое-либо наблюдение, то мы непременно вносим возмущение во «внешний мир» благодаря связи между наблюдателем и наблюдаемым. Таким образом, предположение о точных законах природы ниоткуда не следует: это философская идея, не подкрепленная экспериментальными фактами. Все, что мы можем доказать, это существование известных корреляций: если мы располагаем результатами некоторого эксперимента, то можно предсказать (с известной точностью) возможный результат последующего эксперимента. Это, однако, не требует существования какого-либо объективного внешнего мира: оно является неким дополнительным предположением, которое может оказаться удобной моделью для большинства экспериментов в масштабах макромира, однако эта модель определенно неверна для атомных или субатомных масштабов.

Бриджмен неоднократно подчеркивал опасность введения в наши теории слишком большого числа неизмеримых величин. Раньше или позже эти понятия, которые не могут быть объектами наблюдений, придется отбросить, а это

[1] Вопросы этого раздела автор трактует с позиций субъективного идеализма.— *Прим. пер.*

часто означает мучительную переоценку действительных фактов и данных.

Во многих случаях строгая причинность должна быть заменена представлением о статистических вероятностях. Ученый может верить или не верить в детерминизм. Это вопрос убеждения, который относится к метафизике: физические эксперименты не позволяют доказать или опровергнуть представление о детерминизме.

Эта общая точка зрения может быть названа «точкой зрения фактов».

Приведенные соотношения (1) — (5) показывают, что полностью устранить экспериментальные ошибки невозможно. Они не только ограничивают практически достижимую точность, но отражают абсолютно неустранимую особенность экспериментального метода. Более 100 лет тому назад Лаплас вообразил некое существо («демона»), которое, как он предполагал, точно знает положение и скорость всех атомов во вселенной и в состоянии точно рассчитать будущее развитие мира. Проведенное рассмотрение означает изгнание демона Лапласа. Как принцип неопределенности, так и принцип негэнтропии информации делают лапласову схему точного детерминизма нереалистичной.

Чтобы с большой точностью измерить начальные положения и скорости всех атомов во вселенной, демону, согласно уравнениям (3) и (5), потребовалось бы бесконечно большое количество энергии. Таким образом, точное определение начальных условий невозможно.

Принцип негэнтропии информации уже позволил дать ответ на парадокс с демоном Максвелла и устраняет демона Лапласа. Экспериментальные ошибки нельзя сделать сколь угодно малыми, так как они принадлежат к действительным фактам эксперимента и должны учитываться в теории.

СОДЕРЖАНИЕ

Развитие современной физики

Утверждено к печати
Институтом истории естествознания и техники
Академии наук СССР

Редактор издательства *Е. М. Петров*
Художник *В. П. Рафальский*
Технический редактор *А. П. Гусева*

Сдано в набор 7/V 1964 г. Подписано к печати 28/VII 1964 г.
Формат 84×108¹/₃₂. Печ. л. 20,75=17,01 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 15,5
Тираж 10000. Т-10866. Изд. № 2563. Тип. зак. № 652
Темплан 1964 г. № 481
Цена 1 р. 24 к.

Издательство «Наука».
Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука».
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10