В. П. Визгин

РАЗВИТИЕ ВЗАИМОСВЯЗИ ПРИНЦИПОВ ИНВАРИАНТНОСТИ С ЗАКОНАМИ СОХРАНЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИНСТИТУТ ИСТОРИИ
ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ
И ТЕХНИКИ

В. П. Визгин

РАЗВИТИЕ ВЗАИМОСВЯЗИ ПРИНЦИПОВ ИНВАРИАНТНОСТИ С ЗАКОНАМИ СОХРАНЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА
1972

УДК 530.1

Развитие взаимосвязи принципов инвариантности с законами сохранения в классической физике. Визгин В. П. «Наука», 1972 г.

Монография является первым общим исследованием истории проблемы взаимосвязи между принципами симметрии и законами сохранения — одной из фундаментальных закономерностей современной физики.

В монографии использован большой фактический материал, рассмотрен ряд малоизвестных или забытых работ (С. Ли, И. Шютца, Ф. Энгеля, Ф. Клейна и др), которые позволяют лучше понять развитие обсуждаемой концепции.

Издание представляет интерес для широкого круга физиков, механиков и математиков.

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

доктор физико-математических наук
Л. С. ПОЛАК

2-3-1
405-72

ВВЕДЕНИЕ

> «Среди наиболее мудрейших и удивительнейших вещей в физике *эти связи* (принципов инвариантности с законами сохранения.— *В. В.*) одни из самых интересных и красивых».
>
> Р. Фейнман [1]

Предметом настоящего исследования является история развития взаимосвязи принципов пространственно-временной симметрии с законами сохранения в классической (точнее, неквантовой) физике. В современной физике эта фундаментальная закономерность известна под названием теорем Нетер, установленных в 1918 г. выдающимся немецким математиком Эмми Нетер [2]. Установлению этих теорем предшествовало длительное развитие концепции взаимосвязи симметрия — сохранение [3] не только в физике и механике, в рамках которой эта взаимосвязь впервые получила строгое математическое выражение (Лагранж), но и в античной науке и натурфилософии. Анализу основных оригинальных работ, в которых удалось найти те или иные формы рассматриваемой взаимосвязи, выяснению особенностей развития этой взаимосвязи и установлению основных этапов этого развития посвящена наша книга. Она, таким образом, относится к разряду историко-научных исследований, необходимость которых в настоящее время едва ли нуждается в обосновании [4].

Вероятно, не лишено смысла считать, что задача-максимум истории науки заключается в поиске общих закономерностей ее развития и понимании этого развития в связи с общекультурными и социально-экономическими процессами. Но без решения более скромной, но необходимой задачи — *детального изучения формирования основных концепций, принципов, теорий и т. д. современной науки* — приступать к задаче-максимум было бы, по крайней мере, рискованно. Одной из таких основных концепций современной физики является *взаимосвязь принципов симметрии или принципов инвариантности с законами сохранения*, весьма общим выражением которой являются *теоремы Нетер об инвариантных вариационных задачах.*

Взаимосвязь эта охватывает три класса наиболее фундаментальных принципов физики: *принципы симметрии*, *вариационные принципы и законы сохранения*.

Прежде чем строго сформулировать теоремы Нетер, дающие общее выражение взаимосвязи симметрия — сохранение, кратко обсудим современное понимание названных принципов и договоримся о смысле используемых нами терминов («симметрия», «инвариантность», «сохранение» и т. д.).

Принципы симметрии

Выражения *«принципы симметрии»*, *«принципы инвариантности»* и *«принципы относительности»* мы предполагаем тождественными. В книге речь повсюду идет лишь о принципах пространственно-временной симметрии, связанных с группами $\mathcal{M}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{E}$, где $\mathcal{M}$ — евклидова группа 3-мерного пространства, $\mathcal{G}$ — галилей-ньютоновская группа, $\mathcal{P}$ — группа Пуанкаре, или неоднородная группа Лоренца, $\mathcal{E}$ — группа произвольных координатных преобразований, зависящая от четырех произвольных непрерывных функций пространства — времени. Первые три — конечнопараметрические, или конечные группы Ли, последняя — бесконечная непрерывная группа. Таким образом, принцип пространственно-временной симметрии связывается с существованием некоторой группы преобразований пространственно-временных переменных, оставляющей инвариантным то или иное выражение основного динамического закона, присущего некоторой физической теории [5].

Всякая физическая теория, будучи основанной на эксперименте, требует наличия системы отсчета. Научность теории предполагает существование целого класса эквивалентных систем отсчета, в противном случае утверждения теории носили бы единичный и, тем самым, ненаучный характер. Принцип отождествления этих систем отсчета теоретико-групповой — в силу групповой структуры аксиоматики равенства — и является, по существу говоря, принципом фундаментальной симметрии, лежащим в основе всякой физической теории и предшествующим ее построению [6].

Симметрии физики не исчерпываются симметрией пространства и времени; соответствующие группы действуют в множестве переменных, отвечающих внутренним степеням свободы физических систем, существование которых особенно характерно для современной физики элементарных частиц. Формулировка принципов внутренней симметрии вполне аналогична формулировке принципов пространственно-временной симметрии, и весь аппарат, связанный с изучением симметрии в физике, в равной мере применим и к обоим типам симметрии.

Согласно Вигнеру, место принципов симметрии в физике можно определить следующим образом: они являются корреляциями между законами природы, подобно тому как последние являются корреляциями между событиями [7]. Поэтому принципы симметрии обладают значительно большей универсальностью, нежели физические законы. Этим определяется их большое эвристическое значение.

Последовательный релятивистский подход к внутренним симметриям (а также, по всей вероятности, и к пространственно-временным симметриям конечнопараметрического типа) в теории поля приводит к многообещающей теории локальной инвариантности, позволяющей естественным путем вводить и классифицировать взаимодействия между полями [8].

Существует несколько частично или полностью эквивалентных формулировок принципов симметрии [9]. Весьма наглядным и общим является, например, определение, принадлежащее А. Траутману. Это определение базируется на понятии «состояния» в физике. Будем считать, что «состояние задается некоторым набором параметров, таким образом, что состояние системы в момент времени $t = t_0 > 0$ однозначно определяется соответствующим физическим законом и состоянием при $t = 0$» [10]. Тогда, согласно А. Траутману, симметрия системы — это такой автоморфизм множества состояний системы, который переводит в себя подмножество всех *физических состояний*, т. е. состояний, выделяемых из множества всех состояний посредством некоторого динамического закона [11]. Более детальный и глубокий анализ принципов симметрии можно найти в ряде работ Е. Вигнера, Г. Вейля, А. Траутмана, Дж. Андерсона, Г. А. Соколика и других исследователей [12].

В заключение этого краткого обсуждения современного представления о принципах симметрии приведем для сравнения первоначальное эйнштейновское определение принципа симметрии (например, принципа лоренц-инвариантности): «1. Законы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к которой из двух координатных систем, находящихся относительно друг друга в равномерном поступательном движении, эти изменения относятся. 2. Каждый луч света движется в «покоящейся» системе координат с определенной скоростью v, независимо от того, испускается ли этот луч света покоящимся или движущимся телом»[13]. Соответствующая формулировка Г. Минковского: «Оказывается еще возможным, соответственно преобразованиям указанной группы G_c (т. е. $\mathscr{P}$-группы.—*В. В.*), эту координатную систему (т. е. ту, в которой описываются физические явления.— *В. В.*) произвольно изменять, не изменяя при этом выражения законов природы» [14].

Законы сохранения

Другим, не менее фундаментальным, чем принципы симметрии, и, по-видимому, наиболее простым классом физических закономерностей являются законы сохранения. Общепринятая формулировка законов этого типа: «Согласно закону сохранения энергии (или какой-либо иной характеристики *С*.— *В. В.*), для каждой *изолированной* системы существует соответствующим образом определенная, *просуммированная по всем ее частям* величина — энергия (или величина *С*, например, электрический заряд.— *В. В.*), которая не изменяет своего значения с течением времени, *какой бы характер ни носили процессы, происходящие в системе»* [15]. Сразу же, в соответствии с этой формулировкой, отметим три основные черты всякого закона сохранения. Прежде всего рассматриваются *изолированные системы*, иногда они называются такж *замкнутыми* [16]. Обычно под такими системами понимают системы элементы которых не взаимодействуют с какими-либо посторон ними объектами. При этом внутри системы, между элементами вообще говоря, допускаются любые взаимодействия. И, наконец третья особенность заключается в интегральной природе законо сохранения.

Отметим, что отдельные законы сохранения могут выполнятьс и для незамкнутых систем, например закон сохранения момент импульса в центрально-симметричном внешнем поле.

Общепринято мнение, особенно в физике XIX и в значительно степени — XX веков, что фундаментальные законы физики, поз воляющие детально описывать физические явления, должн иметь форму дифференциальных уравнений (уравнений движения) Естественно, что при таком подходе законы сохранения играю второстепенную роль, а именно, они просто являются так назы ваемыми первыми интегралами, т. е. могут быть получены в ре зультате непосредственного интегрирования уравнений движения Причем если уравнения могут быть решены теми или иными спо собами, то надобность в законах сохранения как будто вообщ исчезает. Однако даже в случае, когда уравнения движения изве стны, законы сохранения оказываются очень важными. Во-пер вых, задача решения уравнений на самом деле, как правило, пред ставляет значительные трудности. Знание же первых интегралов может существенно упростить задачу. Во-вторых, в ряде случае решение уравнений может оказаться излишним, так как необ ходимая информация о системе может быть извлечена из анализа законов сохранения. В-третьих, и это вообще очень важная черта законов сохранения, сохраняющиеся величины обычно имеют глубокий физический смысл и могут быть измерены непосредст венно. Причины этого обстоятельства очень глубоки и корни их лежат как раз в обсуждаемой ниже взаимосвязи симметрия — сохранение.

Кроме того, основные законы сохранения, к которым в первую очередь относятся законы сохранения энергии, импульса, момента импульса, движения центра тяжести, электрического заряда и некоторые другие, отличаясь весьма большой общностью, выходят за рамки той или иной конкретной теории и потому неоценимы как эвристические принципы. В условиях, когда уравнения движения еще не открыты, законы сохранения являются эффективным средством исследования физических систем, позволяющим иногда установить и сами уравнения.

Фактически каждая из фундаментальных физических теорий внесла свой вклад в понимание законов сохранения, существенно конкретизировала и, значит, обогатила их содержание. Так, термодинамика и кинетическая теория теплоты способствовали открытию новой формы энергии и, соответственно, новой обобщенной формулировки закона сохранения энергии, выходящей за рамки механики. Фундаментальный вклад в понимание законов сохранения внесли сначала максвелловская теория поля, а затем — специальная теория относительности. Они со всей очевидностью обнаружили локальный характер законов сохранения [17]. Далее, благодаря открытию закона сохранения электрического заряда, были выявлены еще две важные особенности законов сохранения вообще. Во-первых, сохраняющиеся величины во многих случаях могут рассматриваться как источники тех или иных полей. Общая теория относительности показала, что это свойство присуще и энергии-импульсу. Во-вторых, так сказать, «счетный» характер некоторых сохраняющихся величин. Законы сохранения, обладающие этим свойством, напоминают законы сохранения числа частиц. Например, хорошо известные в физике элементарных частиц законы сохранения барионного и μ- и e-лептонных зарядов, подобно закону сохранения электрического заряда, совпадают с законами сохранения числа частиц, если соответствующие античастицы считать в шкале отрицательных чисел.

В нашей работе мы в основном ограничимся законами сохранения пространственно-временнóго типа, т. е. энергии, импульса, момента импульса и движения центра тяжести, которые в классической области не являются «счетными». Правда, при переходе в квантовую область в известной степени «счетный» характер приобретает закон сохранения момента импульса, что находит свое объяснение в квантово-механическом варианте взаимосвязи симметрия — сохранение. Квантовая механика выявила много и других существенных деталей в отношении законов сохранения. Больше того, были обнаружены законы сохранения, присущие лишь физике микромира и не имеющие классических аналогов (например, сохранение пространственной четности и т. д.).

Особую остроту приобрела проблема сохранения в общей теории относительности, в которой удалось сформулировать лишь глобальные законы сохранения при весьма жестких условиях на координатные системы (изолированные системы в асимптотически плоском пространстве). Кроме того, хорошо определенные в обычных полевых теориях понятия плотности энергии, тензора энергии-импульса поля и т. д. оказались непригодными в общерелятивистском случае. Корни этих затруднений, по существу, были связаны с основными принципами теории: принципами эквивалентности и общей относительности, что вполне выяснилось лишь после установления нетеровских теорем, которые, в свою очередь, явились непосредственным результатом многочисленных попыток корректно сформулировать общерелятивистский аналог закона сохранения энергии-импульса [18].

Значение законов сохранения со всей полнотой выявилось в физике элементарных частиц, где они заняли определяющее место. Это объясняется не только их простотой и непосредственной измеримостью сохраняющихся величин, но и следующими тремя обстоятельствами, которые неоднократно подчеркивали в последние годы многие исследователи, и прежде всего, Е. Вигнер, Р. Фейнман и другие [19]. В физике элементарных частиц именно законы сохранения дают основную, а иногда и единственную информацию о происходящих событиях. Уравнения движения или другие динамические законы нередко конструируются на основе законов сохранения и являются в этом смысле вторичными. Все это приводит к оформлению нового взгляда на законы сохранения, как на фундаментальные первичные принципы: «Все, что может происходить без нарушения законов сохранения, действительно происходит» [20]. Если при обычном, так сказать, динамическом, подходе роль наиболее фундаментальных законов играли уравнения движения, то при новом, более «демократическом» подходе фундаментальные законы приобретают характер «принципов запрета», являющихся одной из формулировок законов сохранения. Во-вторых, в силу своего «демократического» характера законы сохранения не однозначно определяют ту или иную реакцию, а фактически указывают различные возможности, имеющие различные вероятности. Поэтому может оказаться, что вероятностный характер современной физики есть следствие фундаментальности законов сохранения. Последним, возможно, решающим обстоятельством является как раз взаимосвязь симметрия — сохранение, фундаментальная закономерность, согласно которой основные принципы симметрии весьма непосредственно связаны с основными законами сохранения.

Взаимосвязь симметрия — сохранение

Анализ исторического развития именно этой взаимосвязи составляет основное содержание нашей работы. Нередко, когда упоминают о ней, упускают из виду одно важное обстоятельство [21]: рассматриваемая взаимосвязь, по крайней мере, в рамках классической физики имеет место лишь при условии, что физическая система имеет *вариационную структуру*, т. е. уравнения движения этой системы являются лагранж-эйлеровскими уравнениями некоторой вариационной задачи $\delta J = 0$, где J — действие системы. При этом законы сохранения являются следствием инвариантности действия J относительно непрерывных групп преобразований, задаваемых некоторыми принципами симметрии. Так что в обсуждаемой закономерности объединяются не два фундаментальных класса принципов физики (принципы симметрии и законы сохранения), а три (симметрия, сохранение, экстремальность).

Роль вариационных принципов в физике хорошо известна [22]. Достаточно заметить, что, по существу, все основные дифференциальные уравнения физики (т. е. уравнения движения физических систем) имеют вариационную структуру, а современные полевые теории в значительной степени опираются на лагранжев формализм, исходным пунктом которого является принцип Гамильтона.

Наиболее общим выражением взаимосвязи симметрия — вариационная структура — сохранение, которую мы для краткости будем называть, как уже условились, «симметрия — сохранение», являются две теоремы Нетер, установленные ею в 1918 г. в статье «Инвариантные вариационные задачи»[23]. Эти теоремы явились завершением, с одной стороны, почти трехлетних усилий ряда исследователей (Эйнштейн, Гильберт, Лоренц, Клейн, Вейль и др.), направленных к выяснению специфики законов сохранения в общей теории относительности, а с другой стороны,— результатом более чем полуторавекового развития взаимосвязи симметрия — сохранение в механике, электродинамике и специальной теории относительности, первый математически сформулированный вариант которой (для евклидовой группы), по-видимому, можно приписать Лагранжу (1760)[24].

Приведем формулировки нетеровских теорем: «I. Если интеграл J инвариантен по отношению к некоторой группе G_ρ, то ρ линейно независимых комбинаций лагранжевых выражений обращаются в дивергенции, и, обратно, из последнего условия вытекает инвариантность J по отношению к некоторой группе G_ρ. Теорема сохраняет справедливость и в предельном случае бесконечно большого числа параметров. II. Если интеграл J инвариантен по отношению к группе $\mathcal{G}_{\infty\rho}$, в которой встречаются производные до σ-го порядка, то имеют место ρ тождественных соотношений между лагранжевыми выражениями и их производными до σ-го порядка; здесь также возможно обращение»[25]. При этом под J понимается следующий интеграл, имеющий в физике размерность действия

$$J = \int f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots\right) dx,$$

где x обозначает совокупность n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ а u — совокупность μ зависимых переменных $u_1, \ldots, u_\mu$. Под группой G_ρ понимается ρ-параметрическая группа Ли. Группа $G_{\infty\rho}$ является бесконечной непрерывной группой, зависящей от ρ произвольных функций и их производных до σ-го порядка. Под лагранжевыми выражениями понимаются левые части лагранж-эйлеровских уравнений вариационной задачи $\delta J = 0$. Если лагранжевы выражения приравнять нулю в силу вариационной задачи, то ρ соотношений, о которых идет речь в первой теореме, превращаются в ρ локальных законов сохранения. Последние известным образом можно представить в интегральной форме.

Соотношения, о которых идет речь во второй теореме, являются тождествами и не могут быть, вообще говоря, представлены в интегральной форме. Таким образом, о законах сохранения, связанных с бесконечными непрерывными группами типа $\mathcal{E}$-группы, можно «лишь строить предположения»[26].

Так как для современной физики характерен квантовый подход, возникает важный вопрос, остается ли справедливой и какую форму имеет взаимосвязь симметрия—сохранение в квантовой теории? Замечательно, что в квантовой области эта взаимосвязь оказывается еще более тесной, чем в классике, и существенно связана с математической структурой квантовой механики (в частности, формализмом комплексного сепарабельного гильбертова пространства) [27]. Разумеется, сохраняет свое значение и классический вариант взаимосвязи, особенно в квантовой теории поля, для которой характерно систематическое развитие теории на классическом уровне с последующим переходом посредством процедуры квантования в квантовую область.

Уже из этого предварительного краткого рассмотрения ясно, насколько глубока и принципиальна обсуждаемая закономерность. Перечислим в дополнение к сказанному некоторые стороны нетеровских теорем, демонстрирующие их многообразное и действительно фундаментальное значение в физике и ее методологии.

а) *Структурно-синтетическая или концептуальная сторона* взаимосвязи и, соответственно, теорем Нетер заключается в том, что они объединяют в одну структуру три наиболее фундаментальных класса принципов физики, что позволяет выяснить их взаимосвязь и соотношение.

б) *Алгоритмо-систематизирующая сторона* состоит в возможности систематического вывода всей совокупности динамических переменных теории, совпадающих с присущими ей сохраняющимися величинами. Прямая теорема Нетер (первая), как мы увидим, дает определенный алгоритм для вычисления сохраняющихся величин, коль скоро известен лагранжиан, или действие физической системы и группы ее симметрии (а именно, конечно-параметрические группы Ли). Таким образом, оказываются излишними всевозможные искусственные приемы для получения различных законов сохранения, которые в рассматриваемой схеме не только выводятся с единой точки зрения, но и получают благодаря их связи с определенными симметриями весьма глубокую и нетривиальную интерпретацию.

в) Не менее важной представляется и *эвристическая сторона* нетеровских теорем, которые могут быть использованы в этом отношении, по крайней мере, двояко. Если обнаруживается некоторая новая симметрия системы, физический смысл и степень универсальности которой не вполне еще определены, то теоремы Нетер позволяют найти соответствующие этим симметриям новые законы сохранения. Последние не только могут способствовать выявлению физического значения найденной симметрии, но и быть экспериментально проверены.

Однако более распространен подход, основанный на не вполне оправданном усилении обратных теорем Нетер. Суть подхода заключается в следующем: по найденным, главным образом экспериментально, законам сохранения пытаются восстановить те группы симметрии, которые согласно теоремам Нетер могут породить найденные законы сохранения. Найденная совокупность симметрий позволяет, в свою очередь, получить значительно большее количество информации о системе и об истинном смысле законов сохранения. Этот подход особенно плодотворен в физике элементарных частиц [28].

г) Немалое значение имеет и чисто *вычислительная сторона* нетеровских теорем — упрощение задачи интегрирования дифференциальных уравнений математической физики вычислением первых интегралов, которые соответствуют тем или иным симметриям системы [29]. Заметим также, что инвариантность уравнений, а не вариационного функционала, относительно некоторых групп преобразований, также, как правило, существенно упрощает их решение, но тем не менее не дает единообразного и физически осмысленного алгоритма вычисления сохраняющихся величин, подобно нетеровскому [30].

Взаимосвязь симметрия — сохранение является одной из стержневых концепций современной физики элементарных частиц и квантовой теории поля. На нее опираются или связаны с ней такие актуальные проблемы, как поиск фундаментальной группы, содержащей в качестве подгрупп пространственно-временные и внутренние симметрии [31], нарушение PC-симметрии [32] и множество других вопросов классификации и систематики элементарных частиц и разработки математического аппарата квантовой теории поля [33].

Следует заметить, что взаимосвязь симметрия—сохранение не сводится только к установленным уже теоремам Нетер. Существует ряд направлений, развитие которых может привести к существенному ее обобщению и модификации Такого рода направлениями являются, например, теория локальной инвариантности, проблема взаимосвязи симметрия — сохранение без требования вариационной структуры системы [34], разработка «усиленных» вариантов обратных теорем Нетер и т. д.[35] В обстановке напряженных поисков теории элементарных частиц и ее синтеза с теорией гравитации может оказаться полезным пристальный анализ различных возможностей, связанных с расширением нетеровской формы взаимосвязи симметрия — сохранение.

Итак, можно сказать, что взаимосвязь симметрия — сохранение является одной из основных закономерностей структуры фундаментальных физических теорий; она имеет большое прикладное и эвристическое значение, наконец, в настоящее время наметились некоторые многообещающие возможности ее обобщения или модификации. Это позволяет надеяться на то, что изучение истории развития взаимосвязи будет полезно не только для истории физики, но и для дальнейшей ее разработки. Кроме того, для истории науки, по-видимому, совершенно необходимо ясное представление о развитии основных синтетических концепций науки, подобных взаимосвязи симметрия — сохранение [36]. Однако нам не удалось найти сколько-нибудь обстоятельные исторические обзоры и, тем более, историко-научные исследования, специально посвященные проблеме обсуждаемой взаимосвязи. Это обстоятельство и явилось решающим поводом для того, чтобы такое исследование предпринять.

Обзор литературы

Исходными в работе были отдельные замечания исторического характера, содержащиеся в весьма небольшом числе книг и статей. Главные из них мы здесь назовем и затем кратко опишем основное содержание этих замечаний.

1. F. Klein. Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. T. II, Berlin, Springer, 1927, IIA, § 2. Von den 10 allgemeinen Integralen des n-Körpersproblems der klassischen Mechanik.

Эти лекции Клейн читал с 1915 по 1917 г., и по крайней мере в 1917 г. они были распространены в машинописных копиях [37]. В § 2, IIA «Об общих интегралах задачи n тел классической механики» дан первый и чуть ли не единственный обзор обсуждаемой взаимосвязи.

Основоположником этой взаимосвязи Клейн считает К. Г. Якоби, в известных «Лекциях о динамике» которого уже содержался, по его мнению, «прообраз наиболее современных представлений» и вывод законов сохранения импульса и момента импульса из соответствующих симметрий евклидовой группы. Что же касается законов сохранения энергии и движения центра тяжести, то Якоби, по мнению автора, получил их формальным интегрированием. Рассматриваемую взаимосвязь Клейн назвал «якобиевским представлением» («Jacobische Darstellung»).

Далее Клейн отмечает вклад менее известного немецкого механика И. Шютца, который в статье «Принцип абсолютного сохранения энергии», опубликованной в «Göttinger Nachrichten» за 1897 г., установил, что из инвариантности закона сохранения энергии относительно галилеевских преобразований следует закон сохранения импульса. При всей своей важности это указание стоит несколько в стороне от центрального вопроса о взаимосвязи симметрия — сохранение (т. е. «якобиевского представления») и в общем не дает объяснения теоретико-групповой природе законов сохранения энергии и движения центра тяжести. Последнее произошло, как отмечает Клейн, уже в рамках теории относительности, когда Герглотц вывел все десять интегралов релятивистской механики сплошных сред из симметрий $\mathscr{P}$-группы (1911)[38]. Наконец, Клейн упоминает Энгеля, который по инициативе Клейна, используя методы Ли, непосредственно установил взаимосвязь $\mathscr{G}$-симметрия — сохранение (1916) [39].

Клейн, по существу, лишь перечисляет названные исследования, совершенно опуская их обсуждение (это в первую очередь касается работ Герглотца и Энгеля).

Следует подчеркнуть, что «Лекции» Клейна читались до того, как была опубликована статья Э. Нетер (1918). Как мы увидим ниже, Клейн сыграл решающую роль в переходе от оценки рассматриваемой взаимосвязи как формального математического приема к пониманию ее как универсальной самостоятельной закономерности, позволяющей вскрыть истинный смысл законов сохранения. Весьма значителен был его вклад и непосредственно в установление теорем Нетер.

2. E. N o e t h e r. Invariante Variationsprobleme. Gött. Nachrichten. Math.-Phys. Kl., 1918, S. 235. Русский перевод: Э. Н е т е р. Инвариантные вариационные задачи (1918). В сб. «Вариационные принципы механики». М., Физматгиз, 1959 [40].

В статье Нетер, которая была написана под влиянием Гильберта и Клейна и при известном творческом контакте с ними, какой-либо обзор литературы отсутствует; однако по ссылкам можно судить об известных автору работах. Из относящихся к конечнопараметрическим группам, кроме статей Герглотца и Энгеля, Э. Нетер называет две статьи Г. Гамеля, опубликованные в 1904 г.[41] Главную роль в процессе установления нетеровских теорем, как мы увидим, сыграли общерелятивистские исследования, посвященные проблеме энергии. Э. Нетер не перечисляет все эти работы, отсылая к почти одновременно опубликованной статье Клейна (1918)[42], подводящей итог исследованиям о законах сохранения в общей теории относительности. Клейн перечисляет и кратко обсуждает основные общерелятивистские работы, предшествующие установлению нетеровских теорем (Эйнштейна, Гильберта, Лоренца, Вейля, самого Клейна и некоторые другие).

Вполне сознавая, что основы концепции взаимосвязи симметрия — сохранение (по крайней мере, в математическом отношении) восходят к С. Ли, Э. Нетер тем не менее нигде не упоминает о существовании лиевского (канонического) варианта этой взаимосвязи. Такое упоминание имеется в названной статье Энгеля, правда, без указания каких-либо ссылок на С. Ли.

3. A. W i n t n e r. The analytical foundations of celestial mechanics. Princeton. Princeton University Press, 1941. Русский перевод: А. У и н т н е р. Аналитические основы небесной механики. М., Физматгиз, 1967.

Эта книга является одной из наиболее глубоких по математическим методам небесной механики. Она снабжена очень краткими, но весьма нетривиальными историческими комментариями. Вот краткое примечание к § 316—317, в которых рассмотрен вывод первых интегралов из свойств симметрии действия классической механики: «Фундаментальное замечание, что интегралы, выписанные в § 316—317, вытекают из галилеевого автоморфизма уравнений движения, дано впервые Якоби в «Vorles. über Dynamik» (1842), но оно должно было быть известным также Лагранжу

(1777, Oeuvres, 4, 406), по крайней мере, в неявной форме. Связь материала, изложенного в § 316—317, с общей теорией Ли обсуждается, например, Энгелем (F. Engel. Gött. Nachr., 1916, 270—275; 1917, 189—198)»[43]. Существенно новым является здесь замечание о работе Лагранжа, в которой «по крайней мере, в неявной форме» содержалась взаимосвязь симметрия — сохранение.

4. E. P. Wigner, H. Van Dam, R. M. Hautappel. The conceptual basis and use of the geometric invariance principles. Revs. Mod. Phys., 37, 595 (1965) [44].

В этой работе имеется небольшое замечание об истории развития взаимосвязи симметрия — сохранение, которое мы также приведем полностью: «Доктор E. Guth любезно познакомил нас с его исследованиями истории взаимосвязи между законами сохранения и свойствами инвариантности лагранжиана. Очевидно, первое упоминание этой связи (в 1842 г.) принадлежит К. Г. Якоби, который вывел законы сохранения линейного и углового импульса из евклидовой инвариантности лагранжиана. И. Шютц, которому случайно оказались неизвестны рассмотрения Якоби, вывел аналогичным образом принцип энергии. Следующая важная статья — это работа Гамеля, который опять-таки оказался неосведомленным о своих предшественниках. Первое полное обсуждение 10-ти интегралов движения (соответствующих 10-ти генераторам неоднородной группы Лоренца) было дано Герглотцем. Ф. Клейн обратил внимание на работу Герглотца и вдохновил Энгеля. Э. Нетер и Бессель-Хаген далее развили эти идеи» [45].

Очевидно, исследования Гасса до 1965 г. не были опубликованы (Вигнер не дает ссылок). Нам также неизвестно, опубликованы ли они в последующие годы. Они полностью опираются на названный выше обзор Клейна и статью Э. Нетер, но в отличие от клейновского обзора дают, если судить по приведенному высказыванию Вигнера, весьма искаженное, как мы увидим, представление о развитии концепции взаимосвязи и содержат ряд существенных неточностей. Особенно это относится к оценке работ Шютца и Гамеля [46].

Надо сказать, что и Клейн, и Гасс, и другие авторы явно упустили из виду не только существенную во многих деталях долагранжевскую предысторию обсуждаемой концепции, но и основополагающие работы Лагранжа, Гамильтона, С. Ли и некоторых других исследователей. Наконец, даже названные авторами работы, по существу, остались нерассмотренными хотя бы в порядке простого обзора.

Что же касается изложения работы самой Э. Нетер и связи нетеровских теорем с вариационными принципами, то здесь в первую очередь следует назвать монографию Л. С. Полака, посвященную истории вариационных принципов физики [47].

Большое значение для нас имел также сборник «Вариационные принципы механики», изданный в 1959 г. под редакцией Л. С. Полака, который содержит переводы ряда основных классических работ, посвященных не только вариационным принципам физики, но фактически и взаимосвязи симметрия — сохранение (работы Лагранжа, Гамильтона, Д. Гильберта и Э. Нетер) [48].

Современное изложение теорем Нетер и их применений можно найти в литературе по квантовой теории поля [49], вариационному исчислению [50] и общей теории относительности [51]. Впрочем, в подавляющем большинстве работ формулировки и доказательства теорем во многих важных деталях отличны от нетеровских. Поэтому анализ основной статьи Э. Нетер в связи с предшествующими ей общерелятивистскими исследованиями Гильберта, Клейна и др. также представляется весьма существенным.

Итак, сколько-нибудь подробные исторические обзоры и, тем более, историко-научные исследования взаимосвязи симметрия — сохранение и, соответственно, теорем Нетер, отсутствуют, имеющиеся в небольшом количестве исторические замечания (Ф. Клейн, А. Уинтнер, Э. Гасс) весьма неполны и содержат существенные неточности. Поэтому соответствующее историко-научное исследование представляется уместным.

Оглавление книги дает представление о ее содержании. Каждая глава соответствует относительно законченному периоду в развитии обсуждаемой концепции. Заключительная глава является, по существу, кратким обзором посленетеровского развития концепции взаимосвязи и ее современного состояния. В конце книги приложен перечень классических работ от Лагранжа до Э. Нетер, а также список основных работ, посвященных теоремам Нетер и опубликованных с 1918 (после статьи Э. Нетер) по 1971 г.

Глава I

ПРЕДЫСТОРИЯ

> «Анатомия человека — ключ к анатомии обезьяны. Наоборот, намеки более высокого у низших видов животных могут быть поняты только в том случае, если само это более высокое уже известно».
>
> К. Маркс [1].

Как было замечено во введении, взаимосвязь симметрия — сохранение в достаточно строгой математической форме, не потерявшей значение и в настоящее время, впервые встречается и систематически используется в механических работах Лагранжа [2].

Вместе с тем, некоторые прообразы этой взаимосвязи можно обнаружить и в творчестве более ранних исследователей. Рассматриваемая взаимосвязь, согласно современным представлениям, содержит три фундаментальные категории структуры физической теории: симметрию, сохранение и вариационный характер закономерностей движения физических систем [3].

Наиболее давнее происхождение имеют первые две категории. Они восходят к философским учениям древней Индии, Китая и античной Греции. Разумеется, они возникают в весьма наивной форме, иногда тесно связанной с мифологией, религией, искусством и т. д. Речь может идти поэтому лишь о некоторых прообразах или аналогах соответствующих современных концепций.

Если систематический анализ развития идей симметрии и сохранения в науке древнего мира еще и отсутствует, то все-таки имеются отдельные работы, в которых исследуется развитие концепций симметрии и сохранения, рассматриваемых, как правило, независимо друг от друга [4]. Работы же, посвященные изучению развития этих концепций и их взаимосвязи, по существу говоря, отсутствуют. Пожалуй, наибольший интерес в этом отношении представляют некоторые исследования, явно не относящиеся к историко-научным, а скорее, к историко-эстетическим и историко-философским [5]. Не претендуя на полноту, мы постараемся показать, что идея взаимосвязи симметрия — сохранение была чрезвычайно характерной для древнегреческого способа мышления в целом. Разумеется, детальный анализ этой концепции в античности в дальнейшем потребует более глубоких специальных исследований. Но мы надеемся, что наши предварительные замечания могут оказаться небесполезными в качестве исходного пункта этих исследований.

Описав наиболее характерные античные варианты взаимосвязи, мы рассмотрим некоторые, нередко близкие к античным формы этой взаимосвязи в механике нового времени. Материал, относящийся к генезису законов сохранения и принципов пространственно-временной симметрии в механике, мы постараемся свести к минимуму, учитывая наличие соответствующей литературы. В заключение будут рассмотрены основные предпосылки для установления лагранжева варианта взаимосвязи.

Античные аналоги взаимосвязи симметрия — сохранение

> «... находящееся посредине и стоящее в одинаковом отношении к краям, ничуть не более должно двигаться вверх, вниз или в стороны. Одновременно же совершать движения в противоположных направлениях невозможно. Таким образом, такое тело по необходимости пребывает неподвижным».
>
> Анаксимандр[6]

Это рассуждение Аристотель приписывает Анаксимандру, одному из первых философов эпохи расцвета древнегреческой мысли (600—300 до н. э.). Ипполит дает более краткую формулировку, также приписывая ее Анаксимандру: «Земля пребывает неподвижно по причине одинакового расстояния от всех вещей»[7]. Вообще характерная для древнегреческой космологии неподвижность Земли и в дальнейшем обосновывалась, как правило, в духе Анаксимандра, на основе своеобразной симметрии, заключающейся в «одинаковости» окружающих ее условий. Так, Аэций приписывает аналогичные рассуждения Пармениду и Демокриту: «Земля, находясь повсюду на одинаковом расстоянии от того, что ее окружает, пребывает в равновесии», поскольку нет причины, почему бы она «устремлялась предпочтительно сюда, а не туда»[8]. Весьма детально аналогичная аргументация сохранения Землей своего положения в космосе на основе соответствующего принципа симметрии была развита Платоном:

«Если Земля находится в середине неба, будучи круглой, ей нет нужды ни в воздухе для того, чтобы не падать, ни в какой-либо другой необходимости того же рода, но достаточно, если небо расположено симметрично по отношению к ней, и чтобы Земля находилась в равновесии (ἰσορροπία). Ведь равновесная вещь, будучи помещена в центре симметричного тела, не будет иметь ни большей, ни меньшей причины склоняться в ту или иную сторону, а, будучи расположена симметрично, остается неподвижной»[9].

Нетрудно усмотреть, что приведенные формулировки представляют собой не что иное, как своеобразную форму взаимосвязи симметрия — сохранение. Действительно, рассматривается система:

Земля плюс окружающее пространство. Астрономические наблюдения в сочетании с некоторыми общими соображениями свидетельствовали о сферически симметричном расположении сферической же Земли. В соответствии с геоцентрической концепцией, преобладающей в древнегреческой космологии, Земля предполагалась покоящейся, т. е. сохраняющей положение в пространстве. Но, теоретически конструируя Космос, греки не ограничивались констатацией эмпирического и пытались вывести логическим путем одни утверждения из других, более фундаментальных с их точки зрения. При этом в качестве мощного средства теоретизирования они использовали нередко логический принцип достаточного основания, или, как более точно выразился С. Самбурский, «принцип отсутствия достаточного основания» («principle of lack of a sufficient reason»)[10]. Но применение этого логического принципа целиком и полностью базировалось на некотором принципе симметрии. Отсутствие основания у Земли двигаться в некотором определенном направлении гарантировалось полной эквивалентностью этих направлений, т. е. изотропностью Космоса, в центре которого помещалась Земля. И эта симметрия системы Земля плюс окружающие условия логически неизбежно вела к закону сохранения положения Земли, т. е. своеобразному античному аналогу закона сохранения движения центра тяжести.

Нам представляется, что приведенные выше высказывания позволяют интерпретировать их в духе концепции взаимосвязи симметрия — сохранение. Более того, как показали исследования американского филолога-античника Дж. Властоса, для античной культуры в целом, по крайней мере, периода ранней классики, концепция органической связи симметрии, гармонии, эквивалентности, «равноправия» и т. д., с одной стороны, с сохранением, уравновешенностью, устойчивостью, «справедливостью» и т. д., с другой стороны, была одной из наиболее характерных и универсальных[11].

Используя большой фактический материал, относящийся по преимуществу к раннегреческим космологиям (Анаксимандр, Парменид, Гераклит, Эмпедокл и др.), Властос приходит к выводу, что «космическая справедливость», понимаемая как устойчивая упорядоченность космоса, обусловливается «равноправием» его элементов, которое означает, по существу говоря, не что иное, как некий принцип симметрии. Причем эта концепция применяется не только к космологии, но и к учению об обществе, человеке, познании и т. д. Например, «равновесие» в природе — следствие «равноправия» четырех времен года («климатическая изомерия»), «сохранение здоровья» — результат «равновесия» четырех «равноправных» сил, действующих в организме (холодного, горячего, сухого и влажного). «Стабильность» Космоса Эмпедокла гарантируется также «равноправием» четырех основных «корней» (воздух, вода, огонь, земля). Особенно эффективно эта концепция работает в учении о «Бытии» Парменида. Фундаментальная неподвижность «Бытия» и его «устойчивость» рассматриваются Парменидом как результат его «себетождественности», «однородности», т. е. опять-таки «равноправия» его частей («оно равно себе во всех местах»)[12]. В другом месте аргументация Парменида в точности совпадает с таковой у Анаксимандра: «Бытие» неподвижно, потому что оно «подобно массе хорошо закругленного шара, одинаково расположенной по отношению к своему центру в каждом направлении»[13].

Число примеров можно было бы умножить, что едва ли в состоянии заменить более детальный анализ раннегреческих космологий и вообще античной культуры под этим новым углом зрения. Можно еще только подчеркнуть, что понятия «справедливости» и «равноправия» несомненно имеют социально-правовое происхождение, и концепция взаимосвязи симметрия — сохранение по отношению к Космосу связывается с концепцией равноправие — справедливость в социально-правовой области[14].

С другой стороны, едва ли следует сводить понятие «симметрии», которое было, пожалуй, и само по себе одним из наиболее фундаментальных в античной культуре, к понятию «равноправия». Термин «симметрия», означающий «соразмерность», был создан, по-видимому, древними пифагорейцами. А. Ф. Лосев замечает: «Открытие «симметрии» и «асимметрии» приписывается Гиппасу (современнику Пифагора, VI в. до н. э. — *В. В.*). Симметрия употреблялась вместе с таким термином, как порядок. Но больших и разработанных текстов с этим термином в древнепифагорейских материалах не встречается»[15].

Формирование же представлений о гармонии, ритме и симметрии восходит к самым истокам человеческой культуры. Возникновение первоначальных представлений о числе и форме, лежащих в основе понятия симметрии, относится, по-видимому, к эпохе палеолита[16]. Наскальная живопись палеолита, имеющая, вероятно, ритуальное назначение, свидетельствует о высоко развитом чувстве формы у людей того времени. Вероятно, существенное значение в создании, усвоении и развитии этих абстрактных понятий (счет, число, форма, порядок, симметрия и т. д.) имел переход от пассивного отношения к природе (собирание, охота и т. д.) к активному (земледелие, ремесла и т. д.), происшедший в начале эпохи неолита. Изобретение гончарного круга и тележного колеса, например, несомненно должны были способствовать развитию более глубоких представлений о сферической симметрии. В неолитических орнаментах встречается равенство, подобие и симметрия геометрических фигур и т. д., хотя этих понятий в их абстрактном выражении у людей неолита еще не могло быть[17]. Такое владение приемами симметрии, ритмики и т. д. при создании орнаментов было не только результатом подражания симметричным и ритмическим явлениям и объектам природы, но также и следствием упорядоченности (ритмики) движений, характерной для производственной деятельности человека[18].

Фундаментальное же значение категории симметрии приобретает с начала периода ранней классики, и в этом решающую роль, по-видимому, сыграли три обстоятельства: возникновение математики как науки, разработка натурфилософии и космологии и расцвет искусства [19]. Приведем некоторые конкретные примеры античных представлений о симметрии.

Уже у Гомера и Гесиода можно найти разработанную систему космологических представлений, в которых идеи симметрии играют первостепенную роль (симметрия «Олимпа» и «Тартара», замыкающих сферический космос; использование чисел как своеобразных принципов симметрии, упорядочивающих и стабилизирующих действительность и т. д.[20]).

Значительный вклад в развитие идей симметрии внесли пифагорейцы: Гиппас, Филолай, Архит и др. (пифагорейская космология центрально-симметричной Вселенной; доплатоновское учение о пяти правильных многогранниках, отождествляемых с элементами основных стихий; тесно связанные с предыдущим учение о пропорциях и теория музыкальных тонов и т. д.[21]).

В законченной форме пифагорейское учение о симметрии и числовой гармонии содержится в знаменитом диалоге Платона «Тимей»[22]. Наиболее интересным с современной точки зрения является платоновское понимание материи, согласно которому элементы основных стихий могут быть отождествлены с правильными многогранниками. Однако платоновские элементы — еще не элементарные частицы, а, скорее, соответствуют нашим атомам.

Таким образом, он стоял на точке зрения делимости атомов, что подчеркнул В. Гейзенберг [23]. Элементарными частицами Платона являются прямоугольные треугольники двух видов: равнобедренный и треугольник, получающийся в результате опускания высоты из вершины равностороннего. Из этих треугольников можно составить грани всех правильных тел. Заметим, что подлинное обоснование платоновой атомистики базировалось на пифагорейской теории пропорций [24], при этом «Платон, — как заметил Г. А. Соколик, — представлял себе атомы различными пространственными симметриями, иначе говоря, фундаментальные частицы задавались неприводимыми представлениями конечной группы пространственных вращений»[25]. Подчеркнем также, что почти вся эта конструкция была предвосхищена древними пифагорейцами (Филолай, Гиппас и др.)[26].

Гейзенберг подчеркнул в своем известном курсе лекций своеобразную преемственность современных единых теорий поля (типа своей нелинейной теории) и платоно-пифагорейских идей о структуре материи: «Математическая симметрия, играющая центральную роль в правильных телах платоновской философии, составляет ядро основного уравнения (т. е. уравнения «первоматерии». — *В. В*). Уравнение — только математическое представление всего ряда свойств симметрии, которые, конечно, не так наглядны, как платоновские тела»[27].

Идеи симметрии и числовой гармонии были присущи не только пифагорейским и платоновским учениям, но в той или иной мере и форме всей античной науке. Они проявлялись, например, в концепции периодического возникновения и уничтожения Космоса у Анаксимандра и Анаксимена [28], в использовании Парменидом идеи симметрии в учении о неподвижном «Бытии» и условиях его познания [29], в гераклитовской гармонии [30], в учении Анаксагора об уме как принципе красоты и порядка [31], в космологии Эмпедокла с его первообразом мира в виде бескачественного шара — символа всеобщей гармонии [32] и т. д. Атомистика Левкиппа и Демокрита также широко использовала идеи симметрии: учение о пустоте — прообразе трехмерного бесконечного однородного и изотропного пространства, являющейся необходимой предпосылкой движения атомов; геометричность атомов, более схожих с атомами Платона, чем это обычно принято считать — «все формы (т. е. атомы Демокрита. — *В. В.*), — как свидетельствует Аристотель, — составляются из пирамид» [33].

Любые представления, связанные с понятием некоторой материальной первоосновы мира, содержали в себе идею сохранения материи (первоэлементы локаятиков — земля, воздух, огонь и вода; древнекитайских философов — вода, огонь, дерево, металл, земля; первоматерия Фалеса — вода, Анаксимандра — апейрон, Анаксимена — воздух) [34].

Весьма определенно идея сохранения была сформулирована Анаксагором [35]. Элеаты абсолютизировали идею вечной неизменности бытия (Парменид считает «вселенную единой, вечной, невозникшей и шаровидной»). Платон находит источник сохранения, неизменности в мире вечных и неизменных идей — сущностей. Несмотря на идеалистический характер платоновской концепции, в ней содержалась глубокая мысль о том, что, изучая реальные непрестанно меняющиеся вещи, можно найти некоторые формальные конструкции, приближающиеся к идеальному миру сущностей, в котором, согласно Платону, и существуют математические формы, управляющие миром конкретных явлений [36]. Атомисты, воспринявшие идеи ионийцев и элеатов, выдвигают концепцию вечности и сохраняемости атомов и их вечного движения [37].

Последовательная разработка древними атомистами концепции «пустоты» как прообраза бесконечного однородного и изотропного пространства и использование при этом «принципа отсутствия достаточного основания» могли привести их к некоторому предвосхищению принципа инерции не только покоя, но и движения (равномерного и прямолинейного), т. е. принципа инерции классической механики. К этому был весьма близок, по-видимому, Демокрит. Но соответствующие рассуждения не в отношении покоя, а в связи с движением, у Демокрита отсутствуют. «Весьма сомнительно, чтобы в античной науке применялся к движению тот принцип, который не так давно Самбурский удачно назвал «принципом отсутствия достаточного основания» [38]. Действительно, согласно Симплицию, Демокрит, утверждая, что атомы по природе неподвижны, говорит, что «они движутся вследствие удара» [39]. Джеммер приходит к аналогичному выводу, что в «античности не было понятия массы ни в смысле понятия количества материи, ни в смысле динамической массы» [40] (впрочем, по мнению других исследователей, античные атомисты были весьма близки к пониманию массы, по крайней мере, как количества материи).

Как подчеркивает Зубов, «Демокрит не ставил своей задачей дать абстрактную систему законов движения тел в... абсолютно однородном пространстве» [41]. Однако демокритовская концепция «великой пустоты» потенциально заключала в себе идею принципа инерции. В этом отношении особенно замечательно одно рассуждение Аристотеля, в котором он, пытаясь привести к абсурду представление о «пустоте», приходит на основе концепции взаимосвязи симметрия — сохранение к выводу: существование «пустоты» влечет за собой некоторый прообраз принципа инерции движения. «Далее, никто не может сказать, почему тело, приведенное в движение (в пустоте. — *В. В.*), где-нибудь остановится, ибо почему оно скорее остановится здесь, а не там? Следовательно, ему необходимо или покоиться, или бесконечно двигаться, если только не помешает что-нибудь более сильное» [42]. Но, как заметил Ф. Франк, «древний грек (в отличие от современного человека, который нашел бы рассуждения Аристотеля весьма близкими к принципу инерции. — *В. В.*) нашел идею о том, что тело может равномерно двигаться со своей собственной скоростью до бесконечности, настолько абсурдной, что даже заключил: «Из этих рассуждений ясно, что какой-то особой пустоты не существует» [43]. Несколько далее Аристотель замечает, что «тела передвигаются в более редкое вследствие того, что оно подается, а пустота обладает этим свойством одинаково во всех направлениях, следовательно, тело должно передвигаться во все стороны» [44], что, по мнению Аристотеля, абсурдно. Поэтому и атомисты, и Аристотель, как подчеркивал В. П. Зубов, лишь подходили, но не пришли к пониманию принципа инерции движения. Вместе с тем, они «подходили» и к установлению взаимосвязи однородности пространства с принципом инерции равномерного и прямолинейного движения или законом сохранения количества движения, и главную роль в этом подходе играл античный вариант взаимосвязи, опирающийся на принцип отсутствия достаточного основания.

Здесь уместно несколько подробнее остановиться на естественно-научных и космологических представлениях Аристотеля, в которых идеи симметрии и сохранения играли существенную роль.

Физическая система Аристотеля может быть понята, как это заметил В. П. Зубов [45], на основе двух принципов: 1) бесконечно делимая материя сплошь заполняет все мировое пространство, пустота не существует вообще; 2) движение тел — первичный и фундаментальный факт. Можно заметить, что Аристотель придерживался принципа, согласно которому понятия, принципиально наблюдаемые или отвергаемые на основе мысленных экспериментов, должны быть изъяты из теории (например, «пустота», «бесконечность пространства» и т. д.). Можно показать, что вся его геоцентрическая космология неразрывно связана с основными положениями его физики (кстати говоря, Аристотель был приверженцем весьма совершенной геоцентрической теории Вселенной Евдокса). Геоцентризм Аристотеля вместе с его теорией «естественных» и «насильственных» движений приводит к следующим представлениям о пространственно-временной космологической симметрии мира [46].

Шарообразная лежащая в центре мироздания Земля и равномерно вращающаяся вокруг нее «сфера неподвижных звезд» гарантировали изотропность пространства. «Естественные» движения тел, направленные по радиусу к своим естественным местам, т. е. к центру мира или его периферии, явно разрушали однородность пространства «подлунного» мира, позволяя говорить о конечном изотропном, но неоднородном пространстве. Признавая вечность движения Вселенной, Аристотель был вынужден ввести пятый элемент — «эфир», для которого, в отличие от обычных четырех стихий-элементов, «естественным» движением было никогда не прекращающееся равномерное вращение. Таким образом, пространство «надлунного» мира можно было бы интерпретировать как однородное в том смысле, что на круговых траекториях тел в этом пространстве нельзя указать ни начала, ни конца бытия этих тел, т. е. все точки на них равноправны. Что касается понятия времени, то Аристотель связывал его с вечным равномерным круговым движением «мировой сферы», что позволяет говорить о некоторой античной форме понимания однородности времени.

Фундаментальным положением аристотелевой динамики, с отказом от которого была связана революция в науке нового времени, было утверждение о том, что движение тел («насильственное») возможно лишь под действием некоторого источника (силы). «Все движущееся необходимо бывает движимо чем-то. Ведь если оно не имеет начала движения в себе самом, ясно, что оно движимо другим» [47]. В конце «Книги VII (H)» «Физики» Аристотель, по существу, намечает количественную формулировку закона движения своей динамики: «И если одна и та же сила движет одно и то же тело в определенное время на определенную длину, а половину в половинное время, то половинная сила продвинет половину движимого тела в то же время на равную длину»[48]. Таким образом, он полагал, что постоянная сила, действующая на тело, заставляет его двигаться равномерно. Интересно, что такое представление не было фантастическим и находилось в согласии с рядом наиболее простых и непосредственно наблюдаемых фактов, например с тем, что при перемещении грузов волоком для поддержания равномерного движения необходимо было прикладывать к этим грузам вследствие трения постоянную силу [49].

Если отвлечься от космологической неоднородности пространства, связанной с «естественными» движениями, то это основное положение аристотелевой динамики можно по аналогии с ньютоновским законом движения сформулировать в виде

$$m\dot{x} = F_x, \tag{1}$$

и аналогичные уравнения для y- и z-компонент, F_x — проекция F на ось x, а F — постоянная сила, понимаемая как источник движения. Из этого уравнения видно, что при отсутствии действующих сил центр тяжести системы находится в покое, и равномерное и прямолинейное движение системы как целого невозможно, хотя приведенные уравнения допускают евклидову группу для пространства (однородность и изотропность) и одномерную группу временны́х трансляций [50].

Таким образом, если использовать современную терминологию, то в аристотелевой физике, можно различить, по крайней мере, три фундаментальные группы. Космология «подлунного» мира характеризуется группой вращения $\mathcal{O}_3$; пространство «надлунного» мира однородно в том смысле, что обладает однопараметрической группой вращений вокруг фиксированной оси $\mathcal{O}_1$. Наконец, если в качестве модели аристотелевой динамики принять уравнения типа (1), которые весьма наглядно отражают ее основную особенность — любое движение возможно лишь под действием некоторого источника силы, — то фундаментальной группой будет являться прямое произведение евклидовой группы для пространства ($\mathcal{M}$) и группы временны́х трансляций ($\mathcal{T}_0$), т. е. $\mathcal{A} = \mathcal{M} \times \mathcal{T}_0$. Заметим, что современная физика также не имеет единой группы пространственно-временно́й симметрии: космология связана с $\mathcal{E}$-группой или ее конечнопараметрическими подгруппами движений пространств постоянной кривизны, а физика микромира характеризуется $\mathcal{P}$-группой. Еще раз подчеркнем, что теоретико-групповой подход к физике Аристотеля является, конечно, известной модернизацией. Тем не менее, он отражает ее наиболее существенные черты в более привычной для нас форме.

В этом же смысле можно говорить о дискретной группе пространственных вращений как о фундаментальной группе платоновой атомистики [51]. С некоторыми оговорками можно было бы также пространству, используемому атомистами, приписать евклидову симметрию $\mathcal{M}$ [52].

Связывал ли Аристотель пространственно-временны́е симметрии с теми или иными законами сохранения? Частично связывал. Так, ему была известна аргументация Анаксимандра в отношении неподвижности Земли, которой, в качестве закона сохранения покоя центра Земли, можно сопоставить изотропность аристотелевого космоса. Вечность движения Вселенной он обосновывал «естественностью» кругового движения эфира «надлунного» мира, при котором отсутствуют какие-либо причины для его прекращения (своеобразный «надлунный» вариант взаимосвязи однородности пространства с сохранением некоторого аналога количества движения или момента количества движения). При этом речь шла лишь о движении эфира — «небесной материи», не способной превращаться в «земные» тела [53].

Что же касается динамики Аристотеля, то она, конечно, содержала принцип инерции покоя, и обоснование его в духе анаксимандрова варианта взаимосвязи Аристотель, по-видимому, имел в виду. При этом закон сохранения покоя центра тяжести тела (или его античный аналог), естественно связывался с однородностью пространства, подразумеваемой уравнениями аристотелевой динамики (1) [54].

Остальные симметрии, содержащиеся в динамике Аристотеля, не ассоциируются с какими-либо законами сохранения, и это объясняется тем, что уравнения (1) не обладают вариационной структурой, т. е. невыводимы из некоторого вариационного принципа [55].

Наконец, несколько ранее мы видели, что Аристотель вплотную подходил к установлению принципа инерции равномерного прямолинейного движения на основе однородности бесконечного пустого пространства (в космологическом варианте), однако он воспользовался соответствующим рассуждением лишь для того, чтобы показать абсурдность предположения о бесконечном пустом пространстве, так как принцип инерции движения, в соответствии с динамикой Аристотеля, представлялся древним грекам безусловно неправдоподобным [56].

Нетрудно заметить, что используемые Аристотелем рассуждения, касающиеся взаимосвязи симметрия—сохранение, не выходят за рамки античного варианта взаимосвязи, существенным образом опирающегося на принцип отсутствия достаточного основания.

Заметим, что натурфилософские построения античных мыслителей базировались на естественно-научных и математических результатах и представлениях. При этом идеи симметрии наполнялись конкретным естественно-научным и математическим содержанием. Не рассматривая относящийся сюда богатый фактический материал [57], отметим лишь значение евклидовой геометрии как фундаментальной предпосылки для разработки понятия об однородном и изотропном физическом пространстве, которая, однако, была вполне реализована лишь в механике Ньютона. Одним из главных приемов доказательства теорем в ней был метод совмещения конгруэнтных фигур посредством «движений» (сдвигов и вращений), т. е. таких преобразований, при которых не меняются основные свойства перемещаемых фигур. С этим методом было связано и общее требование античных математиков к геометрическим построениям, заключающееся в необходимости использовать в геометрических задачах лишь линейку и циркуль.

Таким образом, в античной геометрии содержался некоторый прообраз клейновских представлений («Эрлангенская программа»), хотя «это в явном виде не содержалось в аксиомах евклидовой геометрии»[58].

В эпоху средневековья принципиальных сдвигов в развитии концепции взаимосвязи в общем не произошло. Основные усилия науки нового времени заключались прежде всего в преодолении аристотелевых концепций, остававшихся и в средневековье теоретической основой естествознания. Отсылая читателей к обширной историко-научной литературе [59], ограничимся лишь оценкой средневековых представлений о пространстве и времени, принадлежащей В. П. Зубову: «у аристотеликов-аверроэистов центральное положение Земли было самым неразрывным образом связано с теорией «места» и движения. Концепции «эмпирея» (т. е. «десятое небо» за пределами сферы неподвижных звезд и другой сферы, объясняющей предварение равноденствия.— *В. В.*) и ubi (т. е. некоторое состояние тела, внутренне присущее самому предмету и не требующее для своего определения какого-либо второго тела.— *В. В.*) как будто избавляли от этой неизбежности геоцентризма, но были практически бесплодны и оставались в пределах представлений о конечной сферической Вселенной. В рамках конечного аристотелевского космоса оставались и номиналисты, согласно которым сферическая Вселенная — ее полюсы и центр — ничем не отличается от абсолютно неподвижного тела...»[60]; и далее: «Знакомство с птолемеевской теорией и ее распространение на Западе способствовали развитию взглядов на пространство как некое неподвижное вместилище тел. Но окончательно выбило почву о представлении о центральном привилегированном положении Земли учение о бесконечности Вселенной... Но эта стадия эволюции взглядов относится уже к следующему периоду. В позднем средневековье можно лишь говорить о каком-то приближении к ней»[61].

Некоторые аналоги античного варианта взаимосвязи симметрия — сохранение можно найти и у средневековых мыслителей. Таким образом, цепочка, связывающая античность с новым временем в отношении рассматриваемой концепции, не обрывается. Приведем, например, высказывание, принадлежащее одному из философов — «Братьев Чистоты» (тайная философская и политическая организация, возникшая в Басре в конце X в. и испытавшая несомненное влияние неоплатонизма): «Покой более соответствует понятию материи, чем движение, так как материя, хотя и имеет шесть сторон (т. е. три измерения.— *В. В.*), не может двигаться одновременно по всем шести направлениям; движение в одном направлении не имеет преимущества перед другими направлениями, поэтому неподвижность есть характеристика материи»[62]. Но, конечно, и в средневековую эпоху, а затем и в эпоху Возрождения закладывались предпосылки для преодоления аристотелизма, которое произошло в новое время. Здесь мы упомянем только Н. Кузанского, одного из основателей учения об однородном и изотропном бесконечном пространстве[63]. По Н. Кузанскому, «мир не имеет окружности и центра»; в противовес Аристотелю, Земля не является центром мира, а «сфера неподвижных звезд» — сферой, замыкающей его. Каждая точка мира может рассматриваться как центр бесконечно большого шара: «Машина мира имеет, так сказать, свой центр повсюду, а свою окружность нигде» [64]. Таким образом, он весьма недвусмысленно формулировал положение об однородности и изотропности бесконечного пространства. Его влияние на Леонардо да Винчи, Коперника, Д. Бруно (который называл его «божественным Кузанцем»), Кеплера и других естествоиспытателей и философов было весьма велико. Заметим также, что Н. Кузанский в какой-то мере предвосхитил современный подход к познанию природы на основе принципов запрета, которые он называл принципами ограничения абсолютного максимума [65].

Решающие сдвиги в переходе к механике нового времени связаны с именами Коперника и Бруно, которые вслед за Н. Кузанским, разрушая аристотелев космос, вплотную подошли к концепции бесконечного однородного и изотропного пространства [66].

У Коперника была некоторая переходная форма принципа относительности, связанная с равномерными круговыми движениями [67]. Механический же принцип относительности как принцип равноправия инерциальных систем отсчета, так же как и механический принцип инерции, был делом механики нового времени [68].

Вопрос об однородности времени, несмотря на некоторые высказывания Аристотеля [69], по существу, непосредственно не обсуждался, хотя вырабатывавшиеся в течение веков (от пифагорейцев до Галилея и Ньютона) представления о «законах природы» как некоторых постоянных во времени соотношениях неявно содержали мысль об однородности времени. Простейшей формой выражения этого обстоятельства является воспроизводимость результатов эксперимента. Экспериментальный метод, зарождение которого относится к доренессансному периоду (особенно Р. Бэкон) и Реннесансу (Леонардо да Винчи и др.) [70], основывался, таким образом, на неявном предположении об однородности времени.

Напряженная работа, происходящая в этот период, непосредственно предшествующий эпохе нового времени, подготавливала утверждение новой симметрии пространства и времени и устранение характерного для аристотелевой схемы разрыва между космологией и динамикой. Однако каких-либо новых форм взаимосвязи симметрия — сохранение в это время мы не находим.

«Ведь если бы не было этого равновесия во Вселенной (т. е. сохранения «количества направления», или проекции количества движения на произвольное направление.— *В. В.*), то все двигалось бы беспрерывно в какую-нибудь одну сторону, а это лишено смысла, поскольку пространство повсюду себе подобно и поскольку невозможно понять причины, почему все должно двигаться в одну сторону больше, чем в другую».

Г. В. Лейбниц [71]

В чем различие этой формулировки взаимосвязи однородность пространства—сохранение импульса с характерным для античности анаксимандровым вариантом взаимосвязи? С принципиальной стороны вариант Лейбница ничем не отличается от античной формы взаимосвязи: в основе рассуждения лежит тот же принцип отсутствия достаточного основания, опирающийся на требования симметрии. Но старая форма наполнена новым содержанием: новые симметрии, новые законы сохранения, открытие и утверждение которых — результат торжества классической механики, являющейся в то же время теоретической основой новой космологии. Установление принципов пространственно-временнóй симметрии, присущей классической механике, и основных законов сохранения, осуществленное в XVII в. трудами Кеплера, Галилея, Декарта, Гюйгенса, Ньютона, Лейбница, происходило в значительной мере независимо друг от друга. Поэтому, как бы интересно и важно это ни было, мы вынуждены отказаться от рассмотрения соответствующего материала, тем более, что имеется значительная литература, содержащая указанный материал [72]. Все-таки, прежде чем перейти к обсуждению некоторых форм взаимосвязи симметрия—сохранение в классической механике до Лагранжа и обсуждению основных предпосылок генезиса лагранжева варианта взаимосвязи, мы, по возможности кратко, не претендуя на полноту, резюмируем основные результаты механики XVII и первой половины XVIII вв. в отношении принципов пространственно-временнóй симметрии и законов сохранения.

1. *Галилей-ньютоновская симметрия пространства и времени*, т. е. евклидова симметрия пространства, однородность времени и «галилеевский» принцип относительности, а также абсолютный характер пространства и времени были установлены в трудах Н. Кузанского, Коперника, Д. Бруно, Кеплера, Галилея, Декарта, Гюйгенса и других и окончательную формулировку получили в «Началах» Ньютона: «Как неизменен порядок частей времени, так и неизменен порядок частей пространства. Если бы они переместились из мест своих, то они продвинулись бы (так сказать) в самих себя» [73]; «Относительные движения друг по отношению к другу тел, заключенных в каком-либо пространстве, оди-

naковы, покоится ли это пространство или движется равномерно и прямолинейно без вращения»[74]. Ньютоновские определения абсолютных пространства и времени хорошо известны и здесь не приводятся[75]. Аналогичным образом формулировал галилей-ньютоновскую симметрию Лейбниц: «Пространство является чем-то совершенно однородным, и, если отвлечься от находящихся в нем вещей, одна его точка абсолютно ничем не отличается от другой... Так же обстоит дело и со временем»[76], но в отличие от Ньютона он отрицал абсолютный характер пространства: «Я неоднократно подчеркивал, что считаю пространство, так же как и время, чем-то чисто относительным»[77].

Фундаментальным отличием классической механики и основанной на ней космологии от аристотелевой схемы является совпадение симметрий пространства и времени, лежащих в основе космологии и динамики, чего не было у Аристотеля.

2. *Основные законы сохранения* классической механики (энергии, импульса, момента импульса и движения центра тяжести) были открыты и четко сформулированы в XVII — первой половине XVIII вв. Причем с законом сохранения энергии связаны имена Галилея, Гюйгенса, Ньютона, Лейбница, И. Бернулли, Эйлера, Д. Бернулли, Даламбера[78]; с законом сохранения импульса и движения центра тяжести — имена Декарта, Гюйгенса, Ньютона, Лейбница, И. Бернулли, Даламбера[79]; момента импульса — Кеплера, Ньютона, Эйлера, Д. Бернулли, Дарси[80].

Формулировки, принадлежащие этим авторам, можно найти в указанной литературе. Отметим в связи с законами сохранения одно важное для нас обстоятельство. Если в доньютоновской механике законы сохранения рассматривались как принципы или постулаты, то после Ньютона они постепенно приобрели статус теорем, доказываемых на основе той или иной формы динамического закона. Однако до Лагранжа вывод их носил, как правило, чисто формальный или искусственный характер. Отсутствовало и единообразие в их получении, что иногда позволяло одним законам сохранения отдавать предпочтение перед другими. Наконец, связь их с симметриями пространства и времени в общем оставалась невыясненной.

Впрочем, это не означает, что античная традиция была совершенно утрачена. Вспомним, что для античных вариантов взаимосвязи было характерно обосновывать, исходя из условий симметрии, сохранение телами покоя, т. е. своеобразный античный аналог принципа инерции — принцип инерции покоя. Так как на смену этому принципу пришел в механике нового времени принцип инерции равномерного и прямолинейного движения, то оказалось, что своеобразная модификация античного варианта взаимосвязи приобрела значение для обоснования принципа инерции классической механики. Особенно выпукло и совершенно в духе античного варианта соответствующие рассуждения проводят, например, и Эйлер, и Даламбер.

Даламбер рассуждает следующим образом: «Тело не може само себя привести в движение, потому что нет никакого основа ния к тому, чтобы оно двигалось предпочтительно в одну сторону чем в другую», поэтому «тело, находящееся в покое, будет неизмен но пребывать в покое, пока какая-нибудь внешняя причина н выведет его из этого состояния»[81] (это еще — «принцип инерци покоя», вполне согласующийся с аристотелевой концепцией ме ханического движения). Но последующее рассуждение Даламбер уже характерно только для классической механики: «Если вслед ствие какой-либо причины тело получило движение, оно не смо жет *само по себе* ни ускорить, ни замедлить это движение»; объяс няется это тем, что, если на прямой линии взять две произвольны точки C и D, то «находясь в точке D, тело пребывает в точно тако же состоянии, в каком оно пребывало в точке C, с той лишь раз ницей, что теперь оно находится в другом месте». Следовательно с этим телом «здесь должно происходить то же самое, что и в C»[82] Ясно, что Даламбер здесь явно опирается на однородность про странства.

Приведем теперь аналогичные рассуждения Эйлера: «Есл мы допускаем, что тело находится в бесконечном пространств и при этом в пустоте, то ясно, что нет никакого основания, почему бы оно начало двигаться в том или другом направлении. Отсюд следует, что так как нет достаточного основания, почему бы он стало двигаться, то оно всегда будет оставаться в покое»[83]. И да лее: «Если принять, что тело находится в бесконечном и пусто пространстве, то нет никакого основания, почему бы оно откло нилось от прямой в ту или другую сторону»[84]. Весьма примеча тельно, что Эйлер в обоих случаях подчеркивает, что за логически или феноменологическим, по существу, принципом отсутстви достаточного основания скрывается «природная» суть явления «Разумеется, отсутствие достаточного основания не может счи таться за истинную и субстанциональную причину какого-ни будь явления: оно только доказывает и притом самым строги образом необходимость этого явления. Более того, оно доказы вает и то, что в самой природе вещей скрыта настоящая субстан циональная причина, которая не перестает действовать, когд этого отсутствия достаточного основания уже нет»[85].

Чем объяснить, что модификация античного варианта взаимо связи использовалась, по существу, лишь для обоснования прин ципа инерции? Известное значение имела, конечно, античная тра диция. Другим, не менее существенным обстоятельством было по-видимому, то, что после Ньютона законы сохранения получа лись как следствия, в то время как принцип инерции постулиро вался. Поэтому законы сохранения, в отличие от последнего, н требовали обоснования.

Эта мысль подтверждается также тем, что незадолго до выход в свет ньютоновских «Начал» Лейбниц обосновывал закон сох ранения импульса для «вселенной», т. е. для механической си схемы, однородностью пространства, так как в механике Лейбница, которая не была, однако, систематически разработана, законы сохранения играли фундаментальную роль. С другой стороны, в работах Кеплера, Галилея, Декарта, за исключением, пожалуй, Гюйгенса, концепцию которого мы рассмотрим ниже, обоснование тех или иных законов сохранения в духе Лейбница отсутствует. Впрочем, это не случайно, так как закон сохранения момента импульса в общем оформился лишь после Ньютона; связь закона сохранения энергии с однородностью времени значительно менее наглядна, а к векторной формулировке закона сохранения импульса лишь незадолго до этого пришел Гюйгенс. Однако декартов скалярный вариант принципа сохранения импульса, благодаря авторитету Декарта, оставался во второй половине XVII в. еще популярным, и Лейбниц в 80-х годах выступает с резкой критикой картезианской меры движения, выдвигая в качестве основной меры «живую силу». Но он не отвергает закон сохранения импульса вообще, а лишь его скалярную форму. В нескольких работах, относящихся, по-видимому, к 80—90-м годам XVII в. и в основном не опубликованных при его жизни, Лейбниц весьма отчетливо (как и Гюйгенс) формулирует векторный вариант закона сохранения импульса, считая его, однако, менее фундаментальным, чем закон сохранения «живых сил». Обоснование, которое дает Лейбниц своему варианту закона сохранения импульса [86], опирается, в духе античного варианта взаимосвязи, на симметрию пространства, а именно его однородность. При этом используется, как и прежде, «принцип отсутствия достаточного основания». Однако речь теперь идет не о принципе инерции покоя или равномерного и прямолинейного движения, а о законе сохранения импульса.

Разумеется, рассуждение Лейбница могло появиться лишь после открытия *векторной* формулировки закона сохранения импульса, т. е. лишь в конце XVII в. То, что оно принадлежало именно Лейбницу, было вполне естественно, так как он вообще придавал принципам пространственно-временно́й симметрии и принципам сохранения первостепенное значение. Кстати говоря, работа Лейбница, где взаимосвязь однородность пространства — сохранение импульса явно сформулирована, не была опубликована при жизни Лейбница — она увидела свет лишь в середине XIX в.[87] Впрочем, даже если бы работа Лейбница и была опубликована, то, так как после появления «Начал» Ньютона необходимость в специальном обосновании законов сохранения была уже не столь насущна — они получались как следствия ньютоновской схемы,— она едва ли повлияла бы существенно на развитие механики в первой половине XVIII в. Однако модификация античного варианта взаимосвязи, которую мы встречаем у Эйлера и Даламбера, была весьма популярной в XVIII в.; она, конечно, была известна Лагранжу и могла натолкнуть его на мысль о связи законов сохранения с принципами симметрии [88].

Теперь кратко рассмотрим, хотя и побочную, но тем не мене весьма существенную сторону связи законов сохранения со свой ствами пространственно-временной симметрии в исследования: Гюйгенса по теории удара [89].

Речь идет о закономерности, заключающейся в следующем если закон сохранения энергии для системы тел (у Гюйгенса і в случае соударения тел) остается в силе при добавлении к ско рости каждого тела произвольной, но одинаковой для всех тел добавочной скорости, т. е. при рассмотрении системы с точки зре ния равномерно и прямолинейно движущихся систем отсчета то для системы с необходимостью выполняется и закон сохране ния импульса. Или более кратко: инвариантность закона сохра нения энергии относительно «чистых» галилеевских преобразо ваний влечет за собой закон сохранения импульса. Эта законо мерность в труде Гюйгенса впервые была усмотрена Паули [90] Приблизительно через 200 лет она была восстановлена без ссылкı на Гюйгенса в работе И. Шютца, который пытался вывести основ ные законы ньютоновской механики из инвариантности закона сохранения энергии относительно галилеевских преобразова ний [91]. Более подробное рассмотрение «концепции Гюйгенса — Шютца» будет дано в III главе, где будут обсуждены также неко торые обобщения и современные ее интерпретации. Здесь же мы заметим, что в основной работе Гюйгенса, резюмирующей его ис следования по теории удара и опубликованной лишь в 1703 г «О движении тел под влиянием удара» [92], мы все-таки не находим явного изложения «концепции». Более того, в этой работе отсут ствует даже векторный вариант закона сохранения количества движения, которым владел Гюйгенс, по крайней мере, к 1669 г. [9 Как известно, вся совокупность результатов теории упругого уда ра была выведена Гюйгенсом по существу из: а) принципа относи тельности для равномерных и прямолинейных движений (по-ви димому, наиболее четко сформулированного и эффективно исполь зуемого в доньютоновский период именно Гюйгенсом); б) гюйген совой формы принципа «живых сил», или «теоремы Гюйгенса»; в) некоторых эмпирических «гипотез», обусловливающих упру гий характер удара.

Обычный (современный) подход заключается в систематиче ском использовании принципа «живых сил» и принципа сохране ния импульса. У Гюйгенса же вместо последнего используется «галилеевский» принцип относительности, который в сочетании с принципом «живых сил» дает всю совокупность результатов тео рии упругого удара. Хотя ряд частных «предложений» Гюйгенс доказывает на основе а) и в)-аксиом, не прибегая к помощи б) основную задачу («предложение IX») [94] он решает с помощью «предложения VIII», доказательство которого было бы невозмож но без б)-аксиомы. Таким образом, сочетание принципов относи тельности и «живых сил» в теории упругого удара вполне экви валентно сочетанию принципов сохранения импульса и «живых сил», и поэтому можно считать, что принципы сохранения импульса есть следствие «галилеевской» инвариантности принципа сохранения «живых сил».

Концепция Гюйгенса, связывающая два основных закона сохранения механики с галилеевским принципом относительности, также могла способствовать возникновению и развитию идеи о связи законов сохранения с симметриями пространства и времени, вводя при этом в рассмотрение, наряду с евклидовской, и галилеевскую симметрию.

Впрочем, в работе Гюйгенса она была скрыта настолько основательно, что едва ли могла быть замечена Лагранжем или его современниками и повлиять непосредственно на генезис лагранжева варианта взаимосвязи. Даже И. Шютц, исследовавший этот аспект взаимосвязи законов сохранения с симметриями в 1897 г., не ссылался при этом на Гюйгенса.

В заключение сделаем несколько замечаний о предпосылках, необходимых для установления лагранжева варианта взаимосвязи.

Лагранжев вариант взаимосвязи мог быть систематически развит лишь после установления основных принципов пространственно-временной симметрии и законов сохранения, характерных для классической механики, а также после открытия вариационных формулировок динамики, так как требования симметрии в сочетании с уравнениями Ньютона еще не давали возможности вывести законы сохранения в духе рассматриваемой взаимосвязи. Все эти предпосылки оказались подготовленными как раз к середине XVIII в.:

а) галилей-ньютоновская симметрия стала достоянием теоретического естествознания к концу XVII в.;

б) законы сохранения энергии, импульса и движения центра тяжести после Ньютона перешли из ранга постулатов, принципов, в ранг теорем, законов, выводимых из общих аксиом динамики типа ньютоновских (Эйлер, 1736, Даламбер, 1743);

в) закон сохранения момента импульса механической системы был ясно сформулирован и получен на основе ньютоновской механики лишь к середине XVIII в. (Эйлер и Д. Бернулли, 1746, Дарси, 1752) [95];

г) необходимые для лагранжева варианта взаимосвязи вариационные формулировки динамики были развиты также к середине XVIII в. (И. Бернулли, 1717, Мопертюи, 1740—1748, Эйлер, 1744—1753, Даламбер—Эйлер—Германн, 1740—1744) [96].

Таким образом, лагранжев вариант взаимосвязи, существенным образом опирающийся на эти результаты, мог быть установлен не ранее 50—60-х годов XVIII в.

Вместе с тем сама идея связи законов сохранения, или, по крайней мере, принципов инерции с симметрией пространства, была, очевидно, воспринята механикой нового времени из античности и известна в середине XVIII в. (Эйлер, 1736, Даламбер, 1743).

Глава II

КЛАССИКИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

> «Хотя необычайная важность инвариантов и ковариантов во всех явлениях природы была открыта лишь недавно и во времена Эйлера и Лагранжа была еще неизвестна, оказалось, что вариационный подход к механике предвосхитил это направление развития, так как принцип инвариантности удовлетворяется в нем автоматически».
>
> **К. Ланцош**[1]

Решающий шаг в развитии взаимосвязи симметрия — сохранение был сделан Лагранжем в его исследованиях по механике. Необходимые предпосылки для этого были созданы, по крайней мере, к середине XVIII в. трудами Гюйгенса, Ньютона и Лейбница, а также И. и Д. Бернулли, Эйлера, Даламбера. Если представление о пространственно-временно́й (галилей-ньютоновской) симметрии было ясно сформулировано уже Ньютоном и Лейбницем, то установление основных законов сохранения механических систем, осознание их вторичного характера по сравнению с динамическим законом и разработка различных вариантов вариационных формулировок динамики явились достоянием лишь XVIII в. Например, закон сохранения момента импульса механической системы был сформулирован в работах Эйлера, Д. Бернулли и Дарси в 1746—1752 гг. Основы вариационного исчисления и принцип наименьшего действия были развиты Эйлером и Мопертюи в 1726—1753 гг. Дифференциальное и интегральное исчисление не только становится мощным средством для решения конкретных задач механики, но и существенным образом преобразует ее концептуальную структуру. Возникает аналитическая механика как «учение о дифференциальных уравнениях и траекториях произвольных механических систем»[2]. Своеобразным итогом этого развития явились исследования Лагранжа и прежде всего его «Аналитическая механика», первое издание которой увидело свет в 1788 г.[3]

Именно Лагранж впервые в строгой и общей форме установил связь основных законов сохранения с пространственно-временно́й симметрией, характерной для классической механики. Он же, по общему признанию, явился основоположником «аналитического» направления в механике[4], которое в дальнейшем было связано в первую очередь с именами Пуассона, Гамильтона, Остроградского, Якоби, С. Ли и др.

Конечно, развитие механики после Лагранжа происходило не только в рамках аналитической механики. Двумя другими направлениями, более непосредственно связанными с физикой и техни ной, были так называемая «молекулярная» механика (Лаплас) и «индустриальная» механика (Понселе, Кориолис)[5]. Однако разработка новых вариантов взаимосвязи симметрия — сохранение, основанных на тонких абстрактных построениях, происходила прежде всего в рамках аналитической механики, и именно ее творцы Гамильтон, Остроградский, Якоби, С. Ли внесли вслед за Лагранжем наиболее весомый вклад в развитие рассматриваемой взаимосвязи.

Не надо забывать, что в XVIII—XIX вв. механика продолжала оставаться теоретической основой физики вообще, так как механическими были представления и о первичных динамических законах, и о пространстве и времени. Аналитическая же механика формулировала эти представления в наиболее общей и математически совершенной форме, что позволяло устанавливать между различными понятиями механики (нередко чисто формально) нетривиальные взаимосвязи.

Важной особенностью аналитической механики было открытие в XVIII и первой трети XIX в. ряда эквивалентных (полностью или частично) фундаментальных принципов механики и связанных с ними формализмов. Разнообразие этих формализмов весьма благотворно влияло на развитие проблемы интегрирования уравнений механики. Ценность их заключалась еще в том, что они раскрывали различные стороны структуры классической механики. При этом существенную роль в рамках каждого из формализмов играли способы получения (выводы) первых интегралов механики, т. е. основных механических законов сохранения. В этой главе мы и рассмотрим как раз те конструкции первых интегралов, в которых основное значение имеют так или иначе формулируемые принципы симметрии. Развитие взаимосвязи симметрия — сохранение в этот период оказывается, таким образом, нераздельно связанным с развитием аналитической механики.

> «Из числа последователей этих блестящих ученых Лагранж, пожалуй, больше, чем какой-либо другой аналитик, сделал для того, чтобы расширить и придать стройность подобным дедуктивным исследованиям, доказав, что самые разнообразные следствия, относящиеся к движению системы тел, могут быть выведены из одной основной формулы».
>
> В. Р. Гамильтон[6]

Основные интересы молодого Лагранжа непосредственно примыкали к теории «изопериметрических» задач, т. е. вариационному исчислению, и применению его к механике. Главные работы, относящиеся к этому кругу проблем, принадлежали Эйлеру, который блестяще развил вариационную концепцию во второй четверти XVIII в. Развитие этого направления происходило в тесной взаимосвязи математики и механики.

В 1755 г. Лагранжу удалось усовершенствовать вариационную схему Эйлера благодаря открытому им изящному способу вычисления вариации интеграла интегрированием по частям. Введя понятие о вариациях функций и распространив на них правила дифференциального исчисления, в частности, доказав перестановочность операций d и δ, а также $\int$ и δ, Лагранж фактически сделал решающий шаг в переходе от прямых методов Эйлера к исчислению вариаций. Об этом открытии он сразу же сообщил Эйлеру (письмо от 12 августа 1755 г.), который дал ему настолько высокую оценку, что отказался от публикации собственных работ по этому вопросу до тех пор, пока Лагранж не опубликует в печати свои основные результаты. Эти результаты были опубликованы в двух статьях 1760—1761 гг., напечатанных во II томе «Miscellanea Taurinensia»[7].

В первой статье рассматривалось исчисление вариаций[8] Вторая статья под названием «Применение метода, изложенного в предыдущем мемуаре, для решения различных задач динамики»[9], была посвящена приложениям принципа наименьшего действия к ряду задач динамики с использованием лагранжевского исчисления. На основе обобщенного эйлеровского варианта принципа наименьшего действия для произвольной системы точек, связанных и действующих друг на друга произвольным образом, Лагранж решает десять задач из различных разделов динамики.

Наибольший интерес для нас представляют первые две задачи: 1) о движении тела в поле центральных сил с произвольным числом неподвижных центров этих сил, являющихся некоторыми функциями расстояний; 2) о движении произвольной системы взаимодействующих тел под действием центральных сил. Существенным условием, неразрывно связанным с принципом наименьшего действия, является при этом выполнимость принципа живых сил. На этой основе и с помощью исчисления вариаций Лагранж получает первый вариант своей будущей «общей формулы динамики» (уравнение B)[10]:

$$\int \left[\left(d\,\frac{udx}{ds} + \Pi dt \right) \delta x + \left(d\,\frac{udy}{ds} + \Omega dt \right) \delta y + \left(d\,\frac{udz}{ds} + \Psi dt \right) \delta z \right] + \frac{udx}{ds}\,\delta x + \frac{udy}{ds}\,\delta y + \frac{udz}{ds}\,\delta z = 0\,^{11}, \tag{1}$$

замечая при этом, что члены

$$\frac{udx}{ds}\,\delta x + \frac{udy}{ds}\,\delta y + \frac{udz}{ds}\,\delta z$$

«можно не принимать во внимание, предположив, что оба конца траектории заданы (фиксированы.— *В. В.*), так как это предположение приводит к исчезновению начальных и конечных δx, δy, δz, и, следовательно, всех упомянутых членов»[12]. Здесь приняты следующие обозначения: s — путь, пройденный телом; u — скорость в момент времени t; x, y, z — прямоугольные координаты тела; Π, Ω, Ψ — проекции внешних сил на оси координат x, y, z. Формула (1) дает возможность обычным образом (учитывая произвол в выборе вариаций δx, δy, δz) получить уравнения движения тела, интегрирование которых приводит к решению задачи 1. Выражение, аналогичное (1), получается и для системы тел в случае второй задачи (уравнения E и U Лагранжа)

$$(E) \int \left[Md\,\frac{udx}{ds}\,\delta x + \ldots + M'd\,\frac{u'dx'}{ds'}\,\delta x' + \ldots + (Mu\delta u + M'u\delta u' + \ldots)\,dt \right] = 0, \tag{2}$$

$$(U)\; Mu\delta u + M'u'\delta' u' + \ldots = -M(P\delta p + Q\delta q + R\delta r) - M'(P'\delta p' + Q'\delta q' + R'\delta r' + \cdots) - \cdots - MM'F\delta f - \cdots - M'M''G\delta g. \tag{3}$$

Здесь f, g, ... — расстояния между телами M и M', M' и M'' и т. д.; F, G, ... — силы притяжения между ними. Далее, на основе этих формул Лагранж рассматривает два важных частных случая: первый — система свободна и подвержена действию внешних сил, x-, y-, z-компоненты которых одинаковы для каждого из тел и равны P, Q, R соответственно; второй случай: а) система совершенно свободна или б) вынуждена двигаться вокруг неподвижной точки; тогда допускаются внешние силы, направленные к этой точке. В первом случае он получает уравнение движения центра тяжести, которое при отсутствии внешних сил P, Q, R дает известный закон сохранения движения центра тяжести. Во втором случае имеет место закон сохранения момента импульса. Рассмотрим последовательно оба случая и убедимся, что метод вывода упомянутых законов сохранения использует существенно свойства пространственной симметрии и поэтому может быть интерпретирован как некоторый вариант взаимосвязи симметрия сохранение.

В первом случае Лагранж выражает координаты всех тел с стемы через координаты тела M и взаимные расстояния между т лами:

$$\left.\begin{aligned} x' = x + X,\ y' = y + Y,\ z' = z + Z, \\ x'' = x + X',\ y'' = y + Y',\ z'' = z + Z'. \end{aligned}\right\} \quad (\ldots$$

Тогда вариации $\delta x'$, $\delta x''$ и т. д. представимы в виде

$$\begin{aligned} \delta x' = \delta x + \delta X, \ldots, \delta z' = \delta z + \delta Z, \\ \delta x'' = \delta x + \delta X', \ldots, \delta z'' = \delta z + \delta Z'. \end{aligned} \quad (\ldots$$

Далее, «ясно, что линии f, f', g, ..., которые определяют ра стояния между телами, будут зависеть исключительно от лини X, Y, Z, X', Y', Z', ..., которые определяют их взаимное распо ложение. Таким образом, выражения разностей δf, $\delta f'$, δg, н в коем случае не будут содержать разностей δx, δy, δz; *более тог заметим, что эти приращения будут совершенно независимы о всех разностей* δX, δY, δZ. Очевидно, *что взаимное действие те зависит только от их относительного расположения*, а именно о линий X, Y, Z, X', Y', Z', ...; приращения δX, δY, δZ, $\delta X'$, . будут связаны между собой отношениями, определяемыми при родой задачи. Отсюда,— заключает Лагранж,— следует, что мно жители при δx, δy, δz в уравнении (E) должны быть по отдельност равны нулю»[13], что и дает после несложных преобразовани уравнения движения центра тяжести:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_0}{dt^2} + (M + M' + \cdots)\,P = 0, \\ \frac{d^2y_0}{dt^2} + (M + M' + \cdots)\,Q = 0, \\ \frac{d^2z_0}{dt^2} + (M + M' + \cdots)\,R = 0, \end{aligned}\right\} \quad (6$$

где

$$\left.\begin{aligned} x_0 = \frac{Mx + M'x' + \cdots}{M + M' + \cdots}, \\ y_0 = \frac{My + M'y' + \cdots}{M + M' + \cdots}, \\ z_0 = \frac{Mz + M'z' + \cdots}{M + M' + \cdots} \end{aligned}\right\} \quad (7$$

Таким образом, «эта точка (т. е. x_0, y_0, z_0.— *В. В.*) будет дви гаться просто как тело, подверженное действию трех сил P, Q R. Кроме того, очевидно, что эта точка будет не чем иным, как цен тром тяжести системы»[14]. В отсутствие внешних сил P, Q, R при

Аналогичное рассуждение дает, очевидно, закон сохранения движения центра тяжести, который гарантирует равномерное прямолинейное движение центра тяжести. В этом выводе, как нетрудно видеть, содержится предположение, что для рассматриваемой системы допустимыми виртуальными перемещениями являются сдвиги всех тел системы на одну и ту же величину (δx, δy, δz), т. е. переносы системы как целого в пространстве. Таким обазом, устанавливается связь трансляционной симметрии пространства с законом сохранения движения центра тяжести.

Ниже мы увидим, что в действительности трансляционной симметрии отвечает закон сохранения импульса, а интеграл движения центра тяжести связан с «галилеевской» симметрией. Однако в представлениях Лагранжа, Якоби и других механиков XVIII—XIX вв. эти законы принципиально не различались, так как один из другого мог быть легко получен непосредственным интегрированием (или дифференцированием). Глубокое родство этих законов, естественно, объясняется тесной связью галилеевской симметрии с однородностью пространства. Но было бы серьезной ошибкой совершенно отождествлять эти симметрии [15].

Обратимся теперь ко второму случаю, при рассмотрении которого удобно ввести полярные координаты, что и делает Лагранж. Соответствующий аналог выражения (3) тогда имеет вид:

$$\int \Big[Md\,\frac{ux^2d\varphi}{ds}\,\delta\varphi + M\left(d\,\frac{udx}{ds} - \frac{uxd\varphi^2}{ds}\right)\delta x + Md\,\frac{udz}{ds}\,\delta z + M'\,d\,\frac{u'x'^2d\varphi'}{ds}\,\delta\varphi' + \cdots + (Mu\delta u + M'u'\delta u' + \cdots)\,dt\Big] = 0 \quad (8)$$

(уравнение (F) Лагранжа). Основное рассуждение, приводящее к закону сохранения момента импульса, по существу совпадает с предыдущим. Только исходной является не трансляционная, а вращательная симметрия. Наличие связи представляет собой более общий случай, поэтому, «принимая ее (т. е. неподвижную точку.— *В. В.*) за центр радиусов-векторов x, x', x'', ... и полагая: $\varphi' = \varphi + \Phi$, $\varphi'' = \varphi + \Phi'$, ..., легко видеть, что $\delta\varphi$ *будет совершенно независима от других разностей* $\delta\Phi$, $\delta\Phi'$, ..., δx, $\delta x'$, ..., *каково бы ни было взаимодействие тел*; кроме того, очевидно, *что все разности* δp, δq, δf, ..., *которые входят в значение* $Mu\delta u + M'u'\delta u' + \ldots$, *будут также независимы от разности* $\delta\varphi$. Отсюда следует, что все члены уравнения (F), которые стоят при разностях $\delta\varphi$, должны быть после подстановки $\delta\varphi + \delta\Phi$, $\delta\varphi + \delta\Phi'$, на место $\delta\varphi'$, $\delta\varphi''$, равны 0 отдельно от остальной части уравнения» [16]. Это дает, ввиду произвола в выборе вариаций $\delta\varphi$, уравнение

$$Md\,\frac{ux^2d\varphi}{ds} + M'd\,\frac{u'x'^2d\varphi'}{ds'} + \cdots = 0,$$

интегрирование которого приводит к закону сохранения момента количества движения в форме

$$\frac{Mux^2d\varphi}{ds} + \frac{M'u'x'^2d\varphi'}{ds'} + \cdots = \mathrm{const}. \qquad (9$$

Лагранж при этом ссылается на известные работы Дарси, Эйлера и Д. Бернулли (1746—1752), установивших и широко применявших закон сохранения момента импульса механических систем [17]. Из приведенного рассуждения видно, что в случае свободной системы (как и в случае системы с неподвижной точкой) последняя допускает бесконечно малые вращения вокруг каждой из трех координатных осей x, y, z, что и приводит к сохранению x-, y-, z-компонент момента импульса.

Итак, выводы обоих законов сохранения существенно основываются на представлении об евклидовой симметрии пространства, которая вместе с тем явно не постулировалась Лагранжем. Однако Лагранж существенно использует условие, что механическая система (прежде всего связи системы и взаимодействия между телами) допускает бесконечно малые движения в пространстве, что, разумеется, предполагает евклидову симметрию пространства.

Спустя 15 лет, в работе «Общие замечания о движении тел, которые притягиваются друг к другу обратно пропорционально квадратам расстояний» (1777)[18], Лагранж обращается снова к выводу законов сохранения импульса и момента импульса на основе евклидовой симметрии пространства. Но на этот раз он опирается на введенную им (и несколько ранее Д. Бернулли)[19] потенциальную, или силовую функцию

$$\Omega = \frac{MM'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} + \frac{MM''}{\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2}} + \qquad (10)$$

и уравнения механики, записанные с ее помощью:

$$\left.\begin{array}{ll} M\,\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d\Omega}{dx}, & M\,\dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{d\Omega}{dz} \\ M'\,\dfrac{d^2x'}{dt^2} = \dfrac{d\Omega}{dx'}, & M'\,\dfrac{d^2z'}{dt^2} = \dfrac{d\Omega}{dz'} \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Сформулированный ранее постулат о зависимости взаимодействий между телами системы лишь от относительных расстояний между ними заменяется, по существу говоря, тождественным ему требованием евклидовой симметрии потенциальной функции Ω, откуда непосредственно следуют известные законы сохранения. Из инвариантности потенциальной функции Ω относительно пространственных переносов вдоль осей x, y, z следует обращение в нуль дифференциала $d\Omega$, и уравнения будут

$$\frac{d\Omega}{dx} + \frac{d\Omega}{dx'} + \quad = 0, \qquad \frac{d\Omega}{dz} + \frac{d\Omega}{dz'} + \quad = 0, \qquad (12)$$

так как дифференциалы $dx, dx', \ldots, dz, dz', \ldots$ приравниваются бесконечно малым произвольным постоянным:

$$dx = dx' = \quad = \alpha; \quad dy = dy' = \quad = \beta; \quad dz = dz' = \cdots = \gamma.$$

Отсюда, с учетом (11), непосредственно вытекают уравнения движения центра тяжести:

$$\frac{d^2X}{dt^2} = 0, \tag{13}$$

где

$$X = \frac{Mx + M'x' + \cdots}{M + M' +}$$

и соответствующие выражения для Y и Z [20].

Аналогичным образом инвариантность функции Ω относительно бесконечно малых вращений вокруг оси z (при этом, как легко показать, $dx = y\alpha$; $dx' = y'\alpha, \ldots, dy = -x\alpha$, $dy' = -x'\alpha$, где бесконечно малая константа α эквивалентна бесконечно малому углу поворота системы) приводит к уравнению

$$\frac{d\Omega}{dx} y + \frac{d\Omega}{dx'} y' + \quad - \frac{d\Omega}{dy} x - \frac{d\Omega}{dy'} x' = 0. \tag{14}$$

Далее, использование уравнений движения (11) позволяет после интегрирования получить закон сохранения z-компоненты момента импульса [21].

Описанный метод элегантен и более непосредственно опирается на евклидову симметрию пространства. Но он неприменим, вообще говоря, к системам со связями, так как использует систему уравнений (11), записываемых для каждого тела в отдельности. По этой же причине в нем оказывается невыявленной вариационная сторона. Поэтому в своей «Аналитической механике» (1788) Лагранж возвращается к методу, использованному им в работе 1761 г., но изложенному в более общей и, вместе с тем, более наглядной форме [22].

В основе лагранжевского вывода законов сохранения, как и всей «Аналитической механики», лежит так называемая «общая формула динамики», представляющая собой комбинацию принципа возможных перемещений (И. Бернулли, 1717), с «петербургским принципом» (Я. Германн, 1716) (в современной терминологии — принцип Даламбера — Лагранжа) [23]. Как мы видели, «общая формула» Лагранжа фигурировала уже в его работе 1760 г. [24], правда, не как исходный принцип, а как некий эквивалент, полученный из принципа наименьшего действия. Но уже в 1764 г. Лагранж ставит ее во главу угла в «Исследованиях о либрации Луны» [25], а в «Аналитической механике» совершает в известном смысле обратный путь, выведя из нее принцип наименьшего действия.

«Общая формула динамики» в обозначениях Лагранжа може[т] быть записана так:

$$\mathbf{S}m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right)+\mathbf{S}m\,(P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\cdots)=0 \qquad (15)$$

где S — знак суммы; P, Q, R, — силы, действующие на каж[-]дое тело системы вдоль прямых p, q, r, ... и отнесенные к единиц[е] массы. Если же учесть, что силы P, Q, R, могут быть сведен[ы] к трем силам, X, Y, Z (т. е. проекциям равнодействующей на ос[и] x, y, z), то «общая формула» принимает свой привычный вид:

$$\mathbf{S}m\left(\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\delta x+\mathbf{S}m\left(\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\delta y+\mathbf{S}m\left(\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\delta z=0. \qquad (15')$$

«Одно из преимуществ, которое получается при использовании этой формулы, заключается в том, что она непосредственно приводит к общим уравнениям, в которых содержатся принципы или теоремы, известные под названием принципов сохранения живых сил, сохранения движения центра тяжести, сохранения моментов вращения, или принципа площадей, и принципа наименьшего действия»[26]. В этом же месте Лагранж подчеркивает: «Однако все эти принципы следует рассматривать скорее как общие выводы из законов динамики, чем как первоначальные принципы этой науки». Именно формула (15) в сочетании с принципами пространственно-временно́й симметрии механических систем позволяет Лагранжу с единой точки зрения вывести всю совокупность законов сохранения.

В отделе III, ч. II, называемом «Общие свойства движения, выведенные из предыдущей формулы», т. е. «Общей формулы динамики системы», Лагранж на основе этой формулы последовательно получает перечисленные законы сохранения, существенно используя свойства пространственно-временно́й симметрии механической системы.

Вывод закона сохранения движения центра тяжести[27] производится следующим образом. «Пусть x', y', z' — координаты какого-либо определенного тела системы, в то время как x, y, z представляют собой вообще координаты какого-либо иного тела. *Положим, что всегда допустимо:* $x = x' + \xi$, $y = y' + \eta$, $z = z' + \zeta$. *Ясно, что величины* x', y', z' *не войдут в выражение для взаимных расстояний между телами и что эти расстояния будут зависеть только от различных величин* ξ, η, ζ, *которые, собственно, и выражают координаты различных тел по отношению к телу, имеющему своими координатами* x', y', z'; следовательно, условные уравнения системы будут иметь место только между переменными ξ, η, ζ и совершенно не будут содержать x', y', z' Таким образом, если в общей формуле динамики все вариации свести к δx, δy, δz и затем вместо δx, δy, δz подставить их значения $\delta x' + \delta\xi$, $\delta y' + \delta\eta$, $\delta z' + \delta\zeta$, то *вариации* $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ *будут независимыми* *от всех остальных и сами по себе будут произвольными*, поэтому надо будет приравнять нулю совокупность всех членов, в состав которых входит каждая из этих вариаций, в результате чего мы получим три общих уравнения, не зависящих от особой структуры системы» [28]. Принимая, таким образом, во внимание только вариации $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, можно записать

$$\delta x' \, \mathrm{S} m\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right) + \delta y' \, \mathrm{S} m\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right) + \delta z' \, \mathrm{S} m\left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right) = 0, \tag{16}$$

и ввиду произвольности вариаций $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ получим уравнения

$$\mathrm{S} m\left(\frac{d^2x}{dt^2} + X\right) = 0, \quad \mathrm{S} m\left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y\right) = 0,$$

$$\mathrm{S} m\left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z\right) = 0. \tag{17}$$

В отсутствие внешних сил интегрирование этих уравнений дает закон сохранения количества движения:

$$\mathrm{S} m \frac{dx}{dt} = \mathrm{const}, \qquad \mathrm{S} m \frac{dy}{dt} = \mathrm{const}, \qquad \mathrm{S} m \frac{dz}{dt} = \mathrm{const}. \tag{18}$$

Далее, простая выкладка [29] дает возможность из формулы (17) получить закон сохранения движения центра тяжести в форме

$$\frac{d^2x'}{dt^2} \mathrm{S} m + \mathrm{S} m X = 0, \qquad \frac{d^2z'}{dt^2} \mathrm{S} m + \mathrm{S} m Z = 0 \tag{19}$$

и при отсутствии внешних сил

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y'}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2z'}{dt^2} = 0, \tag{20}$$

где (x', y', z') — центр тяжести системы.

Заметим, что однократное интегрирование уравнения (20) приводит к закону сохранения импульса для центра тяжести системы, который, конечно, всегда можно переписать в форме (18). Двукратное интегрирование (20) приводит к другой известной форме закона сохранения движения центра тяжести:

$$\mathrm{S} mx = A_1 t + B_1, \qquad \mathrm{S} my = A_2 t + B_2, \qquad \mathrm{S} mz = A_3 t + B_3. \tag{21}$$

Как видно из приведенной выдержки, исходным моментом в выводе является предположение, что система в целом допускает пространственные переносы (чему соответствует однородность пространства). Тогда, рассматривая возможное перемещение, соответствующее такому бесконечно малому переносу системы, и учитывая его произвольность, мы сразу же получаем закон сохранения количества движения.

Аналогичное рассуждение Лагранж проводит и при выводе закона сохранения момента количества движения. Требование вращательной симметрии системы (т. е. изотропности пространства) формулируется им следующим образом: «Рассмотрим теперь движение системы вокруг какой-либо неподвижной точки и допустим, что она может совершенно свободно вращаться вокруг этой точки в любом направлении» [30]. Тогда δx, δy, δz (т. е. вариации x, y, z, получающиеся при вращении вокруг каждой из трех осей x, y, z) записываются так:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= z\delta\omega - y\delta\varphi, \\ \delta y &= x\delta\varphi - z\delta\psi, \\ \delta z &= y\delta\psi - x\delta\omega. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Здесь $\delta\varphi$, $\delta\omega$, $\delta\psi$ — произвольные бесконечно малые («элементарные») вращения вокруг осей z, y, x. Далее, «эти выражения (22) являются общими для вариаций координат всех тел системы», так как рассматривается «элементарное» *вращение системы в целом*. Затем, подставляя (22) в (15), получаем

$$\mathrm{S}m\left\{\begin{aligned} &\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2y}{dt^2} + Yx + Xy\right)\delta\varphi + \left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} + \right. \\ &\left. + Xz - Zx\right)\delta\omega + \left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} + Zy - Yx\right)\delta\psi \end{aligned}\right\} = 0. \tag{23}$$

Ввиду произвольности вариаций $\delta\varphi$, получаем

$$\mathrm{S}m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} + xY - yX\right) = 0, \tag{24}$$

что в отсутствие внешних сил после интегрирования по времени дает «принцип площадей» или закон сохранения момента импульса (точнее, его z-компоненты):

$$\mathrm{S}m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = C_1. \tag{25}$$

Аналогичное рассуждение позволяет связать законы сохранения y- и x-компонент момента импульса с соответствующими вращательными симметриями.

Несколько более завуалирована связь закона сохранения «живых сил» с однородностью времени; тем не менее и она может быть усмотрена, если соответствующим образом интерпретировать рассуждение Лагранжа, которое мы приводим полностью. «Вообще говоря, как бы ни были расположены или связаны друг с другом различные тела, образующие систему, если только это расположение не зависит от времени, т. е. если *условные уравнения между координатами совершенно не содержат переменной t*, ясно, что в общей формуле динамики всегда можно *приравнять ва-*

риации δx, δy, δz дифференциалам dx, dy, dz, выражающим пути, фактически пройденные телом за мгновение dt, в то время как вариации δx, δy, δz должны выражать некоторые пути, которые *могли бы быть пройдены* телами за то же мгновение, если принять во внимание взаимное расположение этих тел» [31]. Переход от вариаций δx, δy, δz к дифференциалам dx, dy, dz соответствует переходу от виртуального перемещения к действительному движению системы за интервал времени dt, т. е. переводу системы из состояния с моментом времени t в состояние с моментом времени $t + dt$ или бесконечно малому временно́му сдвигу системы. Причем этот сдвиг Лагранж обозначает именно dt, а не δt, так как временно́й сдвиг сопровождается «фактическим» движением системы. Тогда, если «условные уравнения» не зависят от времени, т. е. система допускает переносы во времени, то (15) переходит в

$$\mathrm{S}\left[m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,dx + \frac{d^2y}{dt^2}\,dy + \frac{d^2z}{dt^2}\,dz\right) + d\Pi\right] = 0, \tag{26}$$

где $d\Pi = Pdp + Qdq + Rdr +$ (предполагается, что силы имеют потенциал Π). Последующее интегрирование (26) приводит к выражению

$$\mathrm{S}m\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) + \Pi\right] = H, \tag{27}$$

где H — произвольная постоянная, равная значению левой части уравнения в заданное мгновение. Итак, закон сохранения энергии (кинетической и потенциальной), если и не столь непосредственно, как в первых двух случаях, но все-таки достаточно определенно связывается с одной из симметрий пространства—времени, а именно, с однородностью времени.

Задача, которую ставил перед собой Лагранж, заключалась в «сведении динамики к одной общей формуле», «развитие которой, если при этом принять во внимание условия, зависящие от природы системы, должно дать все уравнения, необходимые для определения движения каждого тела, после чего останется только эти уравнения проинтегрировать, что является уже задачей анализа» [32]. Законы сохранения в этой программе играют роль первых интегралов дифференциальных уравнений механических систем, что было также отмечено Лагранжем [33]. Однако мы видели, что эти первые интегралы Лагранж получает не формальным интегрированием, а исходя из пространственно-временно́й симметрии системы, что значительно упрощает общую задачу интегрирования. Правда, свойства симметрии пространства и времени, которые он использует для вывода законов сохранения, не сформулированы у него в виде четких положений аксиоматического характера, как это было сделано еще в «Началах» Ньютона. Но все-таки они выражены достаточно определенно, как допущения об известной подвижности механических систем, которая, в свою очередь, обусловлена евклидовой симметрией пространства и однородность времени. Лагранж отводит много места своему методу получения законов сохранения и подробно его разъясняет. Все законы сохранения выводятся в соответствии с этим методом единообразно и в высшей степени просто. И даже одно из основных достоинств своей «общей формулы» Лагранж видит именно в том, что «она *непосредственно* приводит» к законам сохранения, т. е. позволяет ему реализовать вышеописанный метод.

Таким образом, основные законы сохранения механики оказались одинаковым образом связанными с симметриями пространства и времени, а также приобрели статус не принципов или аксиом, а теорем, доказываемых на основе вариационной формы динамического закона и свойств пространства и времени.

Вместе с тем установленная Лагранжем взаимосвязь симметрия — сохранение не была им явно сформулирована в виде некоторого общего результата. Отношение к законам сохранения, как к первым интегралам дифференциальных уравнений механики, могло поддерживать иллюзию, что взаимосвязь симметрия — сохранение имеет лишь формально-вычислительное значение и в своей общности и фундаментальности существенно уступает самим уравнениям движения или иной форме динамического закона (при этом нередко упускалось из виду, что структура уравнений сама, в свою очередь, базировалась на определенных представлениях о свойствах симметрии пространства и времени).

Отметим еще одну важную особенность лагранжева варианта взаимосвязи симметрия — сохранение. Хотя «галилеевская» симметрия была известна уже Ньютону, вопрос о том, какой же закон сохранения отвечает этой симметрии, Лагранжем не обсуждается. Это еще раз говорит о том, что установленная взаимосвязь на этом этапе не приобрела еще характера фундаментального закона. Заметим, правда, что «галилеевская» симметрия, как и однородность пространства, в рамках используемого Лагранжем формализма, по-видимому, должна была привести к выражениям типа (17), которые позволяют посредством однократного или двукратного интегрирования получить соответственно закон сохранения импульса или движения центра тяжести [последний — в форме (21)].

Таким образом, лагранжев вариант не был полностью эквивалентен современным вариантам взаимосвязи, которые совершенно однозначно связывают сохранение импульса с однородностью пространства, а сохранение движения центра тяжести — с «галилеевской» симметрией. Это игнорирование «галилеевской» симметрии объяснялось утратой практического значения ее для решения задач механики [34], а также той ролью, которую в науке того времени играла небесная механика с характерной для нее естественной абсолютной системой отсчета, связанной с центром масс солнечной системы [35]. Наконец, для механики (особенно ее аналитического направления) второй половины XVIII в. и первой половины XIX в. была весьма характерна тенденция избегать обсуждения аксиоматических основ [36]. С этой тенденцией была связана и присущая механике XVIII—XIX вв. переоценка значения динамических законов и недооценка принципов пространственно-временной симметрии. Оба эти обстоятельства объясняют не только неучет «галилеевской» симметрии, но и в известной мере неявный (неаксиоматический) характер формулировки других принципов пространственно-временной симметрии (евклидовость пространства и однородность времени).

Итак, хотя взаимосвязь симметрия — сохранение была отчетливо установлена Лагранжем для евклидовой симметрии и однородности времени, она не была сформулирована как общая закономерность механики, и, кроме того, оставался открытым вопрос о том, какой закон сохранения следует связать с «галилеевской» симметрией [37]. Несмотря на это, Лагранжа несомненно следует считать первым в числе творцов концепции взаимосвязи симметрия — сохранение. Он, как мы видим, весьма отчетливо представлял себе связь симметрий пространства и времени с основными законами сохранения, однако использовал ее, скорее как метод и не придавал ей значения самостоятельной фундаментальной закономерности механики.

Наконец, влияние, которое оказал Лагранж на развитие концепции взаимосвязи, далеко не исчерпывается найденным им вариантом этой взаимосвязи. В действительности он разработал в механике такие понятия и методы, которые определили во многом развитие обсуждаемой концепции вплоть до нашего времени. Им, наряду с Эйлером, были заложены основы вариационного исчисления и существенно развит принцип наименьшего действия. Открытые им «уравнения Лагранжа», записываемые в «обобщенных координатах» и инвариантные относительно произвольных преобразований координат, послужили основой формализма, выходящего далеко за рамки собственно механики. С этими достижениями Лагранжа связано развитие концепции взаимосвязи не только в механический период (Гамильтон, Якоби, С. Ли) , но и в последующие периоды (Герглотц, Клейн, Энгель, Гильберт, Э. Нетер и т. д.).

«Функция Лагранжа», «лагранжиан», «лагранжевы выражения» и т. д. прочно вошли в арсенал теоретической физики и, прежде всего, в связи с обсуждаемой закономерностью.

> «Следовательно, таким путем мы можем вывести из свойст нашей характеристической функции шесть других из вестных интегралов, помимо того седьмого, который со держится в законе живой силы...»
>
> Гамильтон

> «... Вариация этого определенного интеграла (т. е. ин теграла действия.— *В. В.*) обладает тем свойством, что она даст интегралы дифференциальных уравнений, ко гда крайние положения рассматриваются как переменные»
>
> Гамильтон

После Лагранжа наиболее значительный вклад в аналитичес кую механику был внесен Гамильтоном. В его работах содер жится ряд новых глубоких идей и формализмов, так или иначе связанных с развитием проблемы взаимосвязи симметрия — сох ранение [40]. Назовем лишь три главных открытия Гамильтона, име ющих непосредственное отношение к развитию рассматриваемой концепции. 1) Метод «характеристической», или «главной», функ ции, непосредственно связанный с оптико-механической аналогией Гамильтона. Именно на основе этого метода, как мы увидим, был получен гамильтонов вариант взаимосвязи симметрия — сохра нение. 2) Наиболее общее и глубокое представление принципа наименьшего действия — «принцип Гамильтона», именно та форма вариационного принципа, которая органически вошла в современ ную физику. Развитие взаимосвязи симметрия — сохранение в начале XX в., как мы увидим, определялось в значительной сте пени изучением свойств симметрии именно «интеграла Гамиль тона», или «действия», исследуемых систем. 3) «Канонические», или «гамильтоновы», уравнения движения механики, исследова ние которых, особенно их свойств симметрии, привело, благодаря прежде всего Якоби и С. Ли, к каноническому, или лиевскому, ва рианту взаимосвязи.

Под гамильтоновым вариантом взаимосвязи симметрия — со хранение мы будем понимать вывод законов сохранения на основе исследования инвариантности характеристической функции Га мильтона V, который был осуществлен им в работе «Об общем ме тоде в динамике» (1834). Здесь мы как раз и остановимся на анали зе этого гамильтонова варианта взаимосвязи. С развитием же двух других его достижений — принципа Гамильтона и канонического формализма — мы встретимся ниже.

История открытия Гамильтоном метода «характеристической» функции достаточно хорошо изучена [41]. Первая публикация, в которой уже в весьма развитой форме содержался этот метод при менительно к оптике, относится к 1827 г. («Теория систем лучей»). В период с 1827 по 1832 г. он продолжал совершенствоваться («До полнения» к работе «Теория систем лучей») преимущественно в направлении приложения его к оптике. На этом пути Гамильтон, по крайней мере, в «Третьем дополнении» (1832) установил математическую эквивалентность корпускулярной и волновой теорий света, и, таким образом,— обычного вариационного подхода и метода контактных преобразований, получившего значительное развитие затем в работах Якоби и особенно С. Ли.

Хотя уже в 1825—1832 гг. Гамильтон думал о распространении своего метода на механику, в печати с этим он выступил впервые в 1833 г. в статье «Об общем методе определения путей света и планет с помощью коэффициентов характеристической функции», в которой он, кстати говоря, писал «о красоте и полезности общего метода Лагранжа в теоретической механике», о «мощи и достоинстве центральной динамической теоремы, выведенной Лагранжем в «Аналитической механике» [42]. Более общий подход к проблеме интегрирования уравнений механики был далее развит в неопубликованной при жизни работе «Проблема трех тел, рассмотренная с помощью моей характеристической функции» (1833 г.), где и была введена впервые характеристическая функция $V = \int T dt$, здесь T — кинетическая энергия системы. Во всей же своей полноте и общности метод характеристической функции был развит в статье Гамильтона, опубликованной в 1834 г. под названием «Об общем методе в динамике» [43]. С практической точки зрения особая ценность его заключалась в том, что он задачу интегрирования системы большого числа обыкновенных дифференциальных уравнений сводил «к отысканию и дифференцированию единственной функции, удовлетворяющей двум уравнениям в частных производных первого порядка и второй степени» [44]. Введя вышеуказанным образом характеристическую функцию и рассматривая переход от системы, движущейся по одному пути, к системе, движущейся по другому пути, при тех же динамических соотношениях между ускорениями и положениями ее точек, но при *различных начальных данных*, Гамильтон переписывает уравнения «живых сил» в форме

$$\delta T = \delta U + \delta H, \tag{28}$$

где T и U — кинетическая и потенциальная (с обратным знаком) энергии («живая сила» и «силовая функция» — в терминах Гамильтона). Учитывая выражения для T и U:

$$T = \frac{1}{2} \sum m (x'^2 + y'^2 + z'^2) \text{ и } \delta U = \sum m (x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z) \tag{29}$$

и интегрируя (28) после умножения на dt, он получает

$$\int \sum m (dx\, \delta x' + dy\, \delta y' + dz\, \delta z') =$$

$$= \int \sum m (dx'\, \delta x + dy'\, \delta y + dz'\, \delta z) + \int \delta H\, dt. \tag{30}$$

Вычисление вариации δV с учетом (30) дает

$$\delta V = \sum m\,(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) - \sum m\,(a'\delta a + b'\delta b + c'\delta c) + t\delta H \tag{31}$$

Рассматривая V как функцию начальных $a_i, b_i, \ldots$ и конечных координат x_i, y_i, и величины H и принимая во внимание (31), он получает следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial x_i} = m_i x_i', \qquad \frac{\partial V}{\partial a_i} = -m_i a_i',\\
&\frac{\partial V}{\partial y_i} = m_i y_i', \qquad \frac{\partial V}{\partial b_i} = -m_i b_i', \qquad \frac{\partial V}{\partial H} = t,\\
&\frac{\partial V}{\partial z_i} = m_i z_i', \qquad \frac{\partial V}{\partial c_i} = -m_i c_i', \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),
\end{aligned} \tag{32}$$

Заметим, что функция V в соответствии с законом сохранения энергии и системой уравнений (32) должна удовлетворять двум вышеупомянутым уравнениям в частных производных:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum \frac{1}{m}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] = U + H,\\
&\frac{1}{2}\sum \frac{1}{m}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)^2\right] = U_0 + H,
\end{aligned} \tag{33}$$

которые «дают основное средство для раскрытия формы характеристической функции V» [45]. Не анализируя детально описанный метод [46], мы рассмотрим лишь одно его применение, а именно, получение с его помощью основных законов сохранения из пространственно-временной симметрии механической системы.

Приведем соответствующее рассуждение Гамильтона: «Мы сможем считать еще одним подтверждением наших собственных общих интегральных уравнений, т. е. уравнений (32), доказательство того, что они *заключают в себе не только известный закон живой силы, но также шесть других известных интегралов* первого порядка: закон движения центра тяжести и закон площадей. Для этой цели необходимо только отметить, что из концепции нашей характеристической функции V с очевидностью следует, что эта функция зависит от начальных и конечных положений притягивающихся или отталкивающихся точек системы, не как отнесенных к какому-либо внешнему стандарту, а только как сравниваемых друг с другом; следовательно, *эта функция не будет меняться, если мы, не делая никаких реальных изменений ни в начальной, ни в конечной конфигурации, ни в их отношении друг к другу, сразу изменим все начальные и все конечные положения точек системы при помощи какого-нибудь общего движения, будь то перенос или вращение*» [47]. Итак, свойства симметрии механической системы, обусловленные евклидовой симметрией пространства, Гамильтон формулирует как принцип инвариантности характеристической функции V относительно бесконечно малых пространственных переносов и вращений, отнесенных к системе в целом. Специфика метода заключается в том, что варьируются одновременно и начальные и конечные положения точек системы. Так, требование трансляционной инвариантности (например, вдоль оси x) V-функции можно записать, учитывая ее зависимость не только от x, но и от начальных координат a, в виде

$$\delta V = \sum \frac{\partial V}{\partial x}\,\delta x + \sum \frac{\partial V}{\partial a}\,\delta a = 0.$$

Принимая же во внимание произвольность вариаций и то, что $\delta x = \delta a$ для всех точек системы, Гамильтон получает

$$\sum \frac{\partial V}{\partial x} + \sum \frac{\partial V}{\partial a} = 0$$

и затем, в силу системы уравнений (32), закон сохранения x-компоненты импульса системы.

Используя теперь уравнения (32), немедленно получаем

$$\sum m x' = \sum m a', \tag{34}$$

а в случае трансляционной симметрии вдоль осей y и z — законы сохранения для y- и z-компонент импульса. Аналогично, рассматривая инвариантность V относительно вращений вокруг координатных осей, например вокруг оси z, получаем

$$\sum \left(x \frac{\partial V}{\partial y} - y \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \sum \left(a \frac{\partial V}{\partial b} - b \frac{\partial V}{\partial a} \right) = 0.$$

И, принимая во внимание (32), будем иметь

$$\sum m\,(xy' - yx') = \sum m\,(ab' - ba') \tag{35}$$

и аналогично — законы сохранения x- и y-компонент момента импульса, если имеет место вращательная симметрия вокруг осей x и y. Заметим, кстати говоря, что Гамильтон, как и Лагранж, отождествляет законы сохранения импульса и движения центра тяжести и не ставит также вопроса о законе сохранения, отвечающем галилеевой симметрии.

Таким образом, введение характеристической функции и требование ее евклидовой инвариантности приводит сразу же к законам сохранения импульса и момента импульса. Что же касается закона сохранения энергии, то он, конечно, содержится в формализме характеристической функции, так как он лежит в его основе, но, как раз в силу этого, он играет несколько особую роль (как и в работе Лагранжа 1760 г.), так что связь его с однородностью времени в рамках гамильтонова варианта остается в тени.

В конце рассматриваемой работы Гамильтон намечает фундаментальное расширение этого формализма посредством перехода от V-функции к так называемой «главной функции» S, т. е. действию системы. Название соответствующего раздела, который занимает примерно одну страницу, весьма примечательное: «Введение времени в общем виде в выражение характеристической функции в любой задаче динамики» [48]. Действительно, переход от V- к S-функции, осуществляемый путем преобразования

$$S = -V + tH, \tag{36}$$

где $H = T - U$ — функция Гамильтона системы, а $S = \int_0^t (T + U)\,dt$ — главная функция Гамильтона, или действие системы, позволяет сформулировать вариационный принцип Гамильтона и на его основе такой вариант взаимосвязи симметрия — сохранение, который способен охватить не только евклидову симметрию пространства, но и симметрии пространственно-временно́го типа, характерные для галилей-ньютоновской группы. Здесь Гамильтон вплотную подходит к тому основному варианту взаимосвязи, который мы связываем с именем Э. Нетер и который заключается в выводе законов сохранения из инвариантности действия S физической системы, хотя ни в этой, ни в последующей работе 1835 г. [49] взаимосвязь симметрия — сохранение в рамках S-формализма *явно* не устанавливается, она, несомненно, подразумевается. И прежде всего потому, что S-формализм, несмотря на большую общность, в значительной мере аналогичен V-формализму. В частности, выражению для δV [формула (31)] соответствует выражение для δS:

$$\delta S = -H\delta t + \sum m\,(x'\delta x - a'\delta a + \cdot\ \cdot), \tag{36'}$$

а уравнениям (32) — вполне аналогичные уравнения с заменой функции V на функцию S, только вместо уравнения $\partial V/\partial H = t$ следует писать $\partial S/\partial t = -H$. Весь вывод законов сохранения, связанный с евклидовой симметрией V-функции, полностью переносится на S-формализм с той лишь разницей, что свойства евклидовой симметрии должны формулироваться для S-функции. Но теперь закон сохранения энергии может быть выведен так же, как и законы сохранения импульса и момента импульса из некоторого свойства симметрии S-функции. Выражение для вариации δS (36′) показывает, что требование трансляционной симметрии времени в духе гамильтонова варианта взаимосвязи для V-функции приводит теперь к постоянству H во времени, т. е. закону сохранения энергии.

Здесь мы подходим к очень важному моменту, который намечен в рассматриваемой статье 1834 г., но ясно выражен лишь в уже упомянутой статье 1835 г. Речь идет о том, что открытием вариационного принципа для S-функции Гамильтон свел динамику к стандартной задаче вариационного исчисления, разработанного Эйлером и Лагранжем. Конечно, принцип наименьшего действия Эйлера — Лагранжа, «общая формула динамики» Лагранжа и т. д.

уже до Гамильтона приводили к тесной связи между механикой и вариационным исчислением, но только открытие принципа Гамильтона привело к полному их слиянию.

В настоящее время хорошо известно, что теоремы Нетер могут рассматриваться как прямое следствие фундаментальной формулы для вариации функционала в случае переменной области интегрирования [50]. Но для случая одного независимого переменного задачи с подвижными концами успешно решались Лагранжем в 50—60-х годах XVIII в. По-видимому, первой задачей такого рода была задача о брахистохроне, когда конец не фиксирован, а скользит по фиксированной кривой. Лагранж рассмотрел решение этой задачи в письме к Эйлеру от 20 ноября 1755 г. [51] В статье 1760 г. [52] Лагранж развил свое исчисление вариаций и вывел общую формулу для вариации интеграла с подвижными концами отрезка интегрирования. В обозначениях Лагранжа эта формула выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta \int Z = \int (n - dp + d^2q + \cdots)\,\delta x + \int (N - dP + d^2Q - \cdots)\delta y + \\ + (p - dq + d^2r - \cdots)\,\delta x + (q - dr + \cdots)\,d\delta x + \\ + (P - dQ + d^2R - \cdots)\,\delta y + (Q - dR + \cdots)\,d\delta y + \cdots. \quad (37)\end{aligned}$$

Здесь

$$Z = Z(x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, \quad .), \qquad n = \frac{\partial Z}{\partial x},\ p = \frac{\partial Z}{\partial (dx)},$$

$$q = \frac{\partial Z}{\partial (dy)}, \qquad N = \frac{\partial Z}{\partial y}, \qquad P = \frac{\partial Z}{\partial (dy)} \ \text{и т. д.}$$

Тогда (37) можно записать так:

$$\begin{aligned}\delta \int Z = \int \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - d\,\frac{\partial Z}{\partial (dx)} + \qquad \right)\delta x + \int \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - d\,\frac{\partial Z}{\partial (dy)} + \qquad \right)\delta y + \\ + \left(\frac{\partial Z}{\partial (dx)} - \qquad \right)\delta x + \left(\frac{\partial Z}{\partial (dy)} - \qquad \right)\delta y \qquad (38)\end{aligned}$$

или в несколько более современной записи (и для одного зависимого переменного) [53]:

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathscr{L}(t, x, \dot x)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta x \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot x}\right) dt + \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot x}\,\delta x\right]_0^1. \quad (39)$$

С учетом же возможности варьирования и независимого переменного формула (38), или (39), переходит в известное выражение для вариации функционала с подвижными концами:

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \delta x \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot x}\right) dt + \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot x}\,\delta x + \left(\mathscr{L} - \dot x\,\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot x}\right)\delta t\right]_0^1. \quad (40)$$

Из формулы (40) следуют не только уравнения Лагранжа — Эйлера в случае закрепленных концов, но и, по существу говоря, первая теорема Нетер для случая одного независимого переменного. Действительно, если I инвариантен относительно некоторого бесконечно малого преобразования, задаваемого посредством вариаций δx и δt, то $\delta I = 0$, а интегральный член аннулируется в силу уравнений Лагранжа — Эйлера, и мы получаем, что [ ] обращается в 0, т. е. $\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}}\,\delta x + \left(\mathscr{L} - \dot{x}\,\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}}\right)\delta t\right] = \mathrm{const}$. Подстановка δx и δt, отвечающих генераторам евклидовой группы пространства и однородности времени, дает сразу же выражения для известных законов сохранения импульса, момента импульса и энергии.

Подчеркнем теперь, что хотя Лагранж и имел, по крайней мере, формулу (39) (как формулу вариационного исчисления, но не механики), но для вывода законов сохранения воспользоваться ею не мог. Но как только Гамильтон сформулировал основную проблему динамики как задачу вариационного исчисления, он сразу же понял возможность вывода основных законов сохранения механики на основе формулы для вариации действия с граничными членами. Гамильтонова формула для δS (36′) тождественна с формулой (40), так как

$$H = \sum_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}_i}\,\dot{x}_i - \mathscr{L},$$

и рассуждение, приводящее к первым интегралам, теперь не вызывает затруднения, тем более что в рамках V-формализма взаимосвязь симметрия — сохранение уже установлена. И не проводя известных рассуждений, которые при наличии формулы (36′) и вывода для V-функции вполне элементарны, Гамильтон после формулировки принципа действия делает глубокое замечание, которое ставит точку над «и» и позволяет приписать ему механический вариант первой теоремы Нетер: «Следует отметить, что когда S выражается этим определенным интегралом (т. е. $S = \int\limits_0^t (T + U)\,dt. — B.\,B.$), условия для исчезновения его вариации (если заданы начальные и конечные координаты и время) в точности представляют собой дифференциальные уравнения движения... в форме, данной Лагранжем. Поэтому вариация этого определенного интеграла S обладает тем двойным свойством, что она дает дифференциальные уравнения движения для любых преобразованных координат, когда крайние положения рассматриваются как закрепленные, а также *дает интегралы дифференциальных уравнений, когда крайние положения рассматриваются как переменные*» [54].

Теперь в число первых интегралов включается и энергия, закон сохранения которой получается из формулы (36′), или (40), в случае инвариантности S относительно временны́х трансляций.

Таким образом, можно говорить о двух подвариантах гамильтонова варианта взаимосвязи симметрия — сохранение: первый связан с V-формализмом и второй — с S-формализмом, т. е. принципом Гамильтона. Первый сформулирован очень четко и рассмотрен весьма подробно, второй, хотя и не рассмотрен столь же исчерпывающе, но ясно сформулирован, чего при наличии фундаментальной формулы (36′) и первого подварианта вполне достаточно, чтобы провести необходимые выкладки. Недостаток первого подварианта состоит в том, что на его основе нельзя вывести законы сохранения, связанные с *временны́ми или пространственно-временны́ми* симметриями, в частности, закон сохранения энергии, а также закон сохранения, ассоциируемый с галилеевой симметрией. Второй вариант лишен этого недостатка. Но Гамильтон, как и Лагранж, самой взаимосвязи не придает характера самостоятельной и общей закономерности. Она рассматривается им, как и Лагранжем, как своего рода методический прием, упрощающий вывод законов сохранения. Об этом свидетельствует и то, что Гамильтон упоминает о ней как бы мимоходом, чтобы проиллюстрировать достоинства метода V- или S-функции, и то, что, несомненно, зная о галилеевской симметрии, он не ставит вопроса о соответствующем ей законе сохранения, и то, что, используя в общем идею Лагранжа о связи симметрий с сохраняющимися величинами, он не ссылается на него.

Тем не менее, в формальном отношении Гамильтон сделал все необходимое, чтобы установить непосредственную связь основных законов сохранения со свойствами инвариантности действия механической системы. При этом он использовал как раз ту схему рассуждений, которая в несколько более общей ситуации легла в основу первой теоремы Нетер. Преимущества гамильтонова варианта взаимосвязи, совпадающего, по существу говоря, с нетеровским, по сравнению с лагранжевым достаточно очевидны: более четкая, близкая к современной формулировка принципов симметрии механической системы, простота выкладок (если, например, для лагранжева варианта в качестве заключительного момента характерно интегрирование, то в гамильтоновом варианте эта операция отсутствует), совершенно одинаковая схема получения всех законов сохранения механики (чего, вообще говоря, нельзя утверждать для лагранжева варианта), возможность распространения на любые физические системы, для которых описание посредством принципа Гамильтона более характерно, чем посредством «общей формулы динамики», т. е. принципа Даламбера — Лагранжа.

Однако гамильтонов вариант не получил распространения в механике и в своем втором, нетеровском, подварианте занял подобающее ему место лишь в 10—20-х гг. XX в. после работ Герглотца, Клейна, Гильберта и Э. Нетер [55], которые не ссылались в этой связи на Гамильтона. Чем можно объяснить это забвение гамильтонова варианта взаимосвязи симметрия — сохранение? В следующем разделе мы увидим, что, несмотря на открытие новых тонких принципов типа принципа Гамильтона, канонических уравнений и т. д., наиболее фундаментальным началом механики середины XIX в. считалась «общая формула динамики», или принцип Даламбера — Лагранжа. Поэтому вывод законов сохранения на основе этого принципа представлялся более непосредственным и простым, к тому же он был поддержан и авторитетом Лагранжа. Кроме того, вторая форма гамильтонова варианта взаимосвязи, обладающая перечисленными выше достоинствами, не была изложена достаточно подробно, а первая форма обладала все-таки меньшей степенью общности, чем лагранжев вариант взаимосвязи.

Наконец, в силу характерных для физики XVIII—XIX вв. недооценки принципов симметрии и переоценки динамического аспекта, взаимосвязь симметрия — сохранение рассматривалась скорее как простое и общее средство для получения первых интегралов, но не как существенная черта (закономерность) структуры механики. Поэтому, хотя методы Гамильтона не остались незамеченными и сразу же получили блестящее развитие в работах Якоби, Остроградского, С. Ли и т. д., гамильтонов вариант взаимосвязи не был воспринят. В наиболее известных систематических изложениях аналитической механики от Якоби и Остроградского до Жуковского и Вебстера в качестве основного метода вывода первых интегралов продолжал фигурировать лагранжев вариант взаимосвязи. Это обстоятельство заставляет нас хотя бы кратко рассмотреть форму изложения лагранжева варианта в нескольких наиболее значительных курсах аналитической механики XIX в.

Лагранжев вариант взаимосвязи симметрия — сохранение в XIX веке

> «Принцип Даламбера (т. е. общая формула динамики Лагранжа.— *В. В.*) дает полное решение задач механики. Все остальные принципы — это просто математически другие формулировки принципа Даламбера».
>
> К. Ланцош[44]

Именно такое отношение к «общей формуле динамики» было в XIX в. Она действительно рассматривалась после Лагранжа как наиболее общий и фундаментальный принцип механики, а так как механика продолжала оставаться единственной теоретической основой физики, то и всей физики. Новые методы, открытые самим Лагранжем, Гамильтоном, Якоби и др., представлялись имеющими значение лишь для интегрирования уравнений механических систем. К тому же, начало разработки неголономной механики в конце XIX в. показало известные преимущества принципа Даламбера — Лагранжа перед другими (особенно интегральными) принципами механики. Все это способствовало определенной канонизации принципа возможных перемещений в качестве исходного принципа механики. В наиболее известных, ставших классическими, курсах аналитической механики Остроградского, Якоби, Кирхгофа, а также более поздних — Жуковского, Вебстера и др. построение аналитической механики начинается, как правило, с принципа Даламбера — Лагранжа. Не случайно поэтому, что в названных изложениях в основе вывода законов сохранения лежит лагранжев вариант взаимосвязи. При этом рассуждения Лагранжа, проведенные им в «Аналитической механике», остаются почти без изменения, приобретая лишь несколько более краткую и современную форму.

Так, в «Лекциях по аналитической механике», читанных Остроградским в 1836 г. [57], лагранжев вариант использован для получения законов сохранения импульса, момента импульса и энергии (см. лекции № 17, 28, 29).

Особого рассмотрения заслуживают в этом отношении «Лекции по динамике» Якоби [58]. Это объясняется следующими обстоятельствами.

1) «Лекции» Якоби в истории аналитической механики занимают столь же важное место, как и «Аналитическая механика» Лагранжа и «Очерки об общем методе в динамике» Гамильтона. Основная цепочка в развитии аналитической механики: Лагранж — Гамильтон — Якоби [59].

2) Лагранжев вариант взаимосвязи представлен здесь в исключительно ясной и краткой форме, характерной для современных курсов аналитической механики [60].

3) В немногочисленных историко-научных замечаниях о связи законов сохранения с симметрией именно Якоби ошибочно приписывается лагранжев вариант взаимосвязи, который Клейн называл «якобиевским представлением» [61].

В рассуждениях Якоби, как мы увидим, имеется лишь один момент, отсутствующий в «Аналитической механике», который, однако, был принят во внимание Лагранжем в его работе 1777 г. Речь идет о том, что в «Аналитической механике» Лагранж получает законы сохранения импульса и момента импульса, не используя формализм силовой функции.

Для сравнения с рассмотренными выше изложениями Лагранжа мы приведем достаточно обширные выдержки из «Лекций» Якоби, которые не нуждаются в каких-либо комментариях. Вот как выглядит рассуждение, приводящее к закону сохранения движения центра тяжести [62]: «Возьмем сначала простейший случай, когда существует силовая функция, тогда мы имеем:

$$\sum_i m_i \left\{\frac{d^2x_i}{dt^2}\,\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\,\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\,\delta z_i\right\} = \delta U. \tag{4}$$

Предположим, что *как U, так и условные уравнения зависят только от разностей координат, так что они не изменяются,* если все x возрастают на одну и ту же величину, равно как если это происходит со всеми y или со всеми z. Тогда предположение

$$\delta x_1 = \delta x_2 = \cdots = \delta x_n = \lambda,$$
$$\delta y_1 = \delta y_2 = \quad = \delta y_n = \mu,$$
$$\delta z_1 = \delta z_2 = \quad = \delta z_n = \nu$$

согласуется с условными уравнениями. При этом предположении мы получаем

$$\sum_i m_i \left\{\frac{d^2x_i}{dt^2}\lambda + \frac{d^2y_i}{dt^2}\mu + \frac{d^2z_i}{dt^2}\nu\right\} = \sum_i\left\{\frac{\partial U}{\partial x_i}\lambda + \frac{\partial U}{\partial y_i}\mu + \frac{\partial U}{\partial z_i}\nu\right\} \qquad (1)$$

Но правая часть равна 0. В самом деле, так как по нашему предположению U зависит только от разностей координат, то, можно, положив: $x_1 - x_n = \xi_1$, $x_2 - x_n = \xi_2, \ldots, x_{n-1} - x_n = \xi_{n-1}$, представить U, поскольку она зависит от координат x, в форме: $U = F(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \qquad \frac{\partial U}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial F}{\partial \xi_{n-1}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_n} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_1} - \frac{\partial F}{\partial \xi_2} - \quad - \frac{\partial F}{\partial \xi_{n-1}}$$

так что: $\frac{\partial U}{\partial x_1} + \quad + \frac{\partial U}{\partial x_n} = 0$ и точно так же: $\sum_i \frac{\partial U}{\partial y_i} = 0$; $\sum_i \frac{\partial U}{\partial z_i} = 0$. Поэтому наше уравнение (1) преобразуется в следующее:

$$\sum_i m_i \left\{\frac{d^2x_i}{dt^2}\lambda + \frac{d^2y_i}{dt^2}\mu + \frac{d^2z_i}{dt^2}\nu\right\} = 0.$$

И так как это уравнение должно иметь место для всех λ, μ, ν, то

$$\sum_i m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = 0; \qquad \sum_i m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = 0;$$

$$\sum_i m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = 0.\text{»}$$ [63]

Однократное интегрирование приводит к закону сохранения импульса, а двукратное — к закону сохранения движения центра тяжести в виде: $A = \alpha^{(0)} + \alpha' t$; $B = \beta^{(0)} + \beta' t$; $C = \gamma^{(0)} + \gamma' t$, где A, B, C — координаты центра тяжести; α', β', γ' — компоненты скорости, с которой центр тяжести движется равномерно и прямолинейно по прямой: $\frac{A - \alpha^{(0)}}{\alpha'} = \frac{B - \beta^{(0)}}{\beta'} = \frac{C - \gamma^{(0)}}{\gamma'}$.

В общем случае, когда силовая функция может отсутствовать, рассуждения также вполне эквивалентны лагранжевским. Совершенно аналогично и рассуждение, приводящее к закону сохранения момента импульса: «Мы нашли принцип сохранения движения центра тяжести в предположении, что *силовая функция U и условные уравнения остаются неизменными, если все координаты x изменить на одну и ту же величину*, все координаты y — на вторую, все z — на третью. Мы сделаем теперь другое предположение: *условные уравнения не должны изменяться, если при неподвижной оси x, оси y и z поворачиваются в их плоскости на любой угол* и т. д.» [64], откуда непосредственно (как и у Лагранжа) следует закон сохранения x-компоненты момента импульса.

Эквивалентность лагранжева варианта взаимосвязи и «якобиевского представления» очевидна. В отношении же закона сохранения энергии вывод Якоби даже несколько более формален, связь его с однородностью времени завуалирована сильнее, чем у Лагранжа. Опять-таки для сравнения мы приводим полностью соответствующее место из «Лекций» Якоби: «Гипотеза относительно вариаций, совместная во всех обстоятельствах с условными уравнениями, заключается в том, что для всех значений i:

$$\delta x_i = \frac{dx_i}{dt}\,dt; \qquad \delta y_i = \frac{dy_i}{dt}\,dt; \qquad \delta z_i = \frac{dz_i}{dt}\,dt.$$

Если мы введем эти значения вариаций в символические уравнения второй «Лекции», которые имеют место в случае существования силовой функции, то δU перейдет в dU, и мы получим после деления на dt:

$$\sum m_i \left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\,\frac{dx_i}{dt} + \frac{d^2y_i}{dt^2}\,\frac{dy_i}{dt} + \frac{d^2z_i}{dt^2}\,\frac{dz_i}{dt}\right) = \frac{dU}{dt}$$

Это уравнение можно непосредственно проинтегрировать; его интегралом служит:

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i \left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right\} = U + h.\text{»}$$ [65]

Таким образом, идея Лагранжа полностью сохранена и в этом выводе, хотя и выражена несколько более кратко и формально. Конечно, «Лекции» Якоби замечательны не этим повторным использованием лагранжева варианта взаимосвязи. Их основное значение заключается в дальнейшем развитии методов Гамильтона, и прежде всего в разработке теории канонических преобразований, которая стала исходным моментом исследований С. Ли, открывшего на этой основе новый «канонический» вариант взаимосвязи симметрия — сохранение. Но об этом — в следующем разделе, а здесь мы вернемся к рассмотрению лагранжева варианта в известных курсах аналитической механики второй половины XIX в.

В четвертой лекции «Механики» Кирхгофа (1876) [66] совершенно в духе Лагранжа рассмотрен вывод основных законов сохранения. Вот, например, рассуждение, приводящее к закону сохранения энергии: «Связи не содержат времени, это — первое предположение, которое мы примем. Пусть смещения, получаемые точками при их движении, суть виртуальные смещения, которые определены уравнением (1) третьей лекции $\left(\text{т. е. } \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, \delta x = 0;\right.$ $\sum \frac{\partial \psi}{\partial x}\, \delta x = 0, \quad ..$, где $\varphi = C_1, \psi = C_2, \quad$ — уравнения связей.— *В.В.*). Поэтому можно всюду вместо знака δ поставить знак d, который означает, что речь идет об изменениях, происходящих в действительном движении за элемент времени dt» [67]. Это дает с учетом потенциальности действующих сил закон сохранения энергии: $T = U + h$ (предполагается также, что потенциал U не зависит от времени).

Соответствующее рассуждение, приводящее к закону сохранения момента импульса: « ...Предположим, что связи точек системы таковы, что они допускают вращение вокруг оси z без изменения относительного положения точек. Положим $x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$, тогда бесконечно малому вращению вокруг оси z соответствует увеличение всех углов ϑ, относящихся к отдельным точкам системы, на такую же бесконечно малую величину и т. д.» [68]

В курсе лекций по теоретической механике, читанных Н. Е. Жуковским в течение 1886—1920 гг.[69] и сыгравших значительную роль в преподавании и развитии механики в России, «основные теоремы динамики» и ассоциированные с ними законы сохранения также получены на основе лагранжева варианта взаимосвязи симметрия — сохранение. Вывод, например, теоремы о движении центра масс (и закона сохранения импульса) резюмируется следующей формулировкой: «*Если система может двигаться поступательно в известном направлении*, то сумма проекций всех действующих сил на это направление равна производной по времени от суммы проекций на это направление количеств движения всех точек системы» [70], что при аннулировании суммы проекций внешних сил на указанное направление дает закон сохранения проекции импульса на это направление.

Знаменитые лекции Вебстера, первое издание которых появилось в 1904 г., также содержат лагранжев метод получения первых интегралов механики, повторяя слово в слово соответствующее рассуждение Якоби [71]. Наконец, нелишним будет заметить, что лагранжев вариант, по существу говоря, целиком вошел в современные курсы теоретической механики, такие, как Н. Н. Бухгольца, Е. Н. Березкина и т. д. [72]

Резюмируя, можно сказать, что лагранжев вариант взаимосвязи симметрия — сохранение стал одним из главных методов получения основных законов сохранения механики. Но традиционная недооценка принципов симметрии в механике XVIII—XIX вв. и несколько завуалированная формулировка требований симметрии не давали возможности в этом методе Лагранжа усмотреть своеобразную форму фундаментальной концепции, связанной с именем Э. Нетер.

С. Ли

«Таким образом, имеет место теорема: Интегралы динамической системы и контактные преобразования, переводящие систему в самое себя, представляют собой по сути дела одно и то же...»

Э. Т. Уиттекер[73]

Развитие лагранжевых и гамильтоновых методов привело Якоби к теории канонических преобразований, истинный смысл которой был вполне выяснен лишь в работах С. Ли, выдающегося норвежского математика — творца теории непрерывных групп. Именно С. Ли был выдвинут новый вариант взаимосвязи симметрия — сохранение, тесно связанный с теорией канонических преобразований и потому называемый нами в дальнейшем «лиевским», или «каноническим» вариантом взаимосвязи. Его замечательной особенностью было то, что он непосредственно связан с теорией групп. Причем связь эта носила двойственный характер: с одной стороны, анализ проблемы интегрирования уравнений механики и, в частности, связи первых интегралов с бесконечно малыми каноническими преобразованиями симметрии этих уравнений существенно стимулировал развитие теории непрерывных групп вообще, а с другой стороны — разработка методов этой теории создавала мощные теоретико-групповые средства исследования проблем механики, в частности, позволяла на теоретико-групповом языке сформулировать связь интегралов механики с симметрией механических систем.

Открытие С. Ли канонического варианта взаимосвязи симметрия — сохранение связывает, таким образом, линию развития аналитической механики с той алгебро-геометрической линией, которая вела к возникновению теории групп и, прежде всего, теории непрерывных групп. Но здесь мы вынуждены отказаться от исследования этой второй линии, тем более что недавно стала доступной изданная в виде книги диссертация Г. Вусинга, посвященная генезису понятия абстрактной группы [74]. Мы также не будем рассматривать теорию канонических преобразований в той форме, как она была развита Якоби [75], и сразу обратимся к лиевскому варианту взаимосвязи симметрия — сохранение, который можно сформулировать так: *все первые интегралы уравнений движения механической системы являются производящими функциями* *бесконечно малых канонических преобразований, оставляющих инвариантной гамильтонову функцию системы*[76]. Требования симметрии формулируются здесь в терминах инвариантности гамильтониана относительно бесконечно малых канонических преобразований, а алгоритм для вычисления сохраняющихся величин предельно прост — сохраняющиеся величины совпадают с производящими функциями названных преобразований.

Таким образом, основным понятием в этом варианте являются *бесконечно малые канонические преобразования*, определяемые посредством *производящей функции*. Поэтому и в генезисе канонического варианта взаимосвязи эти понятия должны были иметь определяющее значение.

Теория канонических преобразований генетически связана с каноническим формализмом механики, ведущим свое начало от Пуассона и Лагранжа (1809—1811)[77]. Кроме того, уравнения, аналогичные каноническим уравнениям Гамильтона, фигурировали в чисто математических исследованиях Пфаффа (1814), Коши (1819) и даже с некоторой натяжкой — в работах Монжа и Лагранжа по теории нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка[78]. Систематическая разработка метода канонических уравнений принадлежит Гамильтону (1835)[79]. Термин же «канонические уравнения» был введен Якоби[80], который также «впервые поставил вопрос о том, каковы *самые общие канонические подстановки*, т. е. те подстановки:

$$\left.\begin{aligned} p'_\alpha &= \varphi_\alpha\left(q_1^{(0)}, \ldots, q_n^{(0)};\ p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}\right), \\ q'_\alpha &= \psi_\alpha\left(q_1^{(0)}, \ldots, q_n^{(0)};\ p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}\right) \end{aligned}\right\}$$

которые переводят канонические дифференциальные уравнения снова в канонические уравнения»[81]. Якоби (1837) и спустя некоторое время Бур (1855) показали, что эти преобразования определяются условиями, формулированными в терминах скобок Пуассона[82]:

$$(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = (\varphi_\alpha, \psi_\beta) = (\psi_\alpha, \varphi_\beta) = 0; \qquad (\psi_\alpha, \varphi_\alpha) = 1.$$

Фундаментальное значение теории канонических преобразований для интегрирования уравнений механики было понято уже Якоби (и предвосхищено Гамильтоном, характеристическая функция которого давала важный частный случай такого преобразования). Однако со всей полнотой оно проявилось лишь в исследованиях С. Ли, начатых в 1872 г. и продолжавшихся на протяжении всей его творческой жизни[83]. Начало математической деятельности С. Ли совпало с началом его дружбы и тесной творческой связи с двадцатилетним Ф. Клейном (Берлин, 1869). Поездка Ли и Клейна в Париж, знакомство с новейшими достижениями французской геометрической школы и связанные с этим первые совместные работы по геометрии, а затем — изучение теории групп подстановок в основном по «Трактату о подстановках»

К. Жордана [84] — так началась закладка фундамента теории непрерывных групп С. Ли и «Эрлангенской программы» Ф. Клейна [85]. В цепочке работ Клейна и Ли, приведших к «Эрлангенской программе» 1872 г., первыми были две совместные работы 1870—1871 гг. о так называемых W-кривых, в которых «они со своей „замкнутой системой преобразований" стихийно пришли к идее группы ... усмотрели здесь общую идею и осознали возможности, заложенные в последовательном применении теоретико-групповых представлений к геометрии и анализу» [86].

Если в становлении «Эрлангенской программы» решающую роль в конечном счете сыграло объединение групповой концепции с проективно- и неевклидово-геометрическими исследованиями, то лиевская теория непрерывных групп возникла в результате объединения групповой концепции с геометрической теорией дифференциальных уравнений. После опубликования Клейном «Эрлангенской программы» пути Ли и Клейна расходятся, и области исследования разделяются.

Клейн использовал понятие группы в соответствии со своей «Программой» как упорядочивающий принцип в геометрии, а затем и в теории функций. С. Ли, в свою очередь, сосредоточил основное внимание на применении теории групп к интегрированию дифференциальных уравнений в духе своеобразного аналога теории Галуа. Эти исследования были тесно связаны и с теорией интегрирования уравнений механики, которая была им весьма существенно продвинута благодаря глубокому развитию теории канонических преобразований Якоби. Наконец, на этой основе возникла, а затем превратилась в самостоятельный раздел математики его теория непрерывных групп преобразований. Методы Якоби и, прежде всего, теория канонических преобразований в значительной мере были исходными в том основном направлении работ С. Ли, которое привело не только к его результатам по теории интегрирования дифференциальных уравнений (в частности, уравнений механики), но и к лиевской теории непрерывных групп.

«В 1872 г. он (т. е. С. Ли.— *В. В.*) начинает глубокое изучение работ Якоби по уравнениям в частных производных первого порядка и встречается сначала с А. Майером (который, кстати говоря, также внес заметный вклад в разработку этой проблемы.— *В. В.*), чтобы усовершенствовать эту теорию в существенном пункте. Продолжая изучение этого прекрасного предмета, он приходит далее к постепенному построению той магистральной теории групп преобразований, которая составляла наиболее важное его дело» [87],— писал Дарбу (оказавший и на Ли, и на Клейна известное влияние в знаменательный парижский период) в некрологе, посвященном С. Ли. Стимулирующее значение проблемы интегрирования дифференциальных уравнений, в частности, уравнений механики, для развития групповых и геометрических исследований Ли неоднократно подчеркивали и Клейн, и сам С. Ли [88].

Решающую роль при этом сыграли инфинитезимальные методы, введенные С. Ли в теорию канонических преобразований. «Следует ...отметить два существенных элемента этих исследований: 1) употребление преобразований прикосновения, бросающих столь живой и неожиданный свет на наиболее трудные и наиболее темные стороны теории интегрирования уравнений с частными производными первого порядка, затем употребление *инфинитезимальных преобразований. Введение этих преобразований принадлежит всецело Ли*»[89]. Понятие бесконечно малых преобразований, в частности, бесконечно малых канонических преобразований, на которых базируется представление о непрерывной группе, несомненно имело корни в механике. Так, бесконечно малые движения рассматривались в явном виде Пуансо в «Новой теории вращения тел» (1834) [90]. Вариации координат, или виртуальные перемещения δx, δy, δz, широко используемые впервые Лагранжем, можно считать эквивалентными лиевским бесконечно малым преобразованиям евклидовой группы. Больше того, представление об однородности и изотропности пространства, восходящее к геометрии Евклида и постепенно утвердившееся ко времени Ньютона в физике, в сочетании с представлением о непрерывности пространства, подготавливало понятие о бесконечно малых преобразованиях пространственных координат.

Во избежание недоразумений заметим, что термины «контактное», «касательное» или «преобразование прикосновения» (Ли использовал термин «Berührungstransformation») являются, по существу говоря, тождественными [91].

Первоначально Ли рассматривал преобразования более частного вида, которые в настоящее время называются преобразованиями Ли — Матье [92] (по-видимому, они были известны также Якоби; Матье изучал их в 1874 г.) [93]. Они определяются как преобразования инвариантности дифференциальной формы $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i dq_i$ (т. е. удовлетворяющие требованию: $\sum\limits_{i=1}^{n} P_i dQ_i - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i dq_i = 0\Big)$. Ли их называл «однородными преобразованиями в $q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n$» [94]. Многие важные результаты теории контактных преобразований были первоначально установлены именно для них и лишь впоследствии обобщены для произвольных контактных преобразований. Эквивалентность контактных и канонических преобразований была известна уже Якоби [95]. Но непосредственно в строгой и общей форме она была доказана С. Ли, как раз на основе понятия бесконечно малых контактных преобразований. Поэтому в дальнейшем термины «контактное» и «каноническое» преобразования мы считаем тождественными. Трудами Якоби, Остроградского, С. Ли, а также А. Майера, Шеринга и некоторых других установлено несколько эквивалентных условий контактности (или каноничности) преобразований.

Одним из условий такого рода является инвариантность билинейной дифференциальной формы, по существу, известная уже Остроградскому и непосредственно вытекающая из определения контактного преобразования или условий контактности, формулируемых посредством скобок Пуассона или Лагранжа [96]. Эта форма лежит в основе структуры фазового пространства, в котором она может быть интерпретирована как фундаментальный бесконечно малый элемент площади, так же как дифференциальная квадратичная форма ds^2 — в основе метрической геометрии конфигурационного пространства.

Представление о фазовом пространстве (квазипространстве R_{2n}) использовал явно Больцман (1868), который опирался прежде всего на теорему Лиувилля об инвариантности функционального определителя канонических преобразований (1838) [97]. Эти результаты Лиувилля, и особенно Больцмана, легли в основу статистической механики, широко использовавшей аппарат фазового пространства. Однако здесь мы не ставим задачу обстоятельного изучения истории разработки теории канонических преобразований, в которой приняли участие многие исследователи. Вместе с тем заметим, что решающими были работы Якоби, открывшего, по существу, эти преобразования как важное средство для интегрирования уравнений механики, и С. Ли, который ввел инфинитезимальные и теоретико-групповые методы в теорию канонических преобразований, что позволило не только развить методы интегрирования, но и выявить новые фундаментальные черты аналитической механики.

Д. Я. Стройк, оценивая значение работ С. Ли в механике, указывал, что «Софус Ли открыл контактные преобразования и тем самым ключ ко всей гамильтоновой динамике как теории групп» [98]. Действительно, групповой характер канонических преобразований и, следовательно, применимость специфических групповых методов к механике впервые продемонстрировал С. Ли. При этом как механика, особенно на первых этапах, оказала значительное воздействие на формирование основных понятий теории непрерывных групп, так и, в свою очередь, теория групп, примененная затем к механике, позволила углубить понимание структуры механики. Оба эти аспекта были особенно тесно связаны как раз в творчестве С. Ли. Одним из важных результатов, полученных на этом пути С. Ли, было новое, более абстрактное и глубокое понимание природы механического движения «как постепенного развертывания контактного преобразования» [99]. Достигнутое, главным образом, благодаря применению лиевского метода бесконечно малых контактных преобразований, это понимание в действительности восходит к Гамильтону и представляет собой обобщение его оптической теоремы о том, что «путь светового луча может быть определен через постепенное распространение волнового фронта» [100].

Решающим моментом в установлении канонического варианта взаимосвязи было введение бесконечно малых контактных преобразований посредством единственной функции, которую С. Ли называл характеристической и для которой в настоящее время используется термин «производящая функция бесконечно малого контактного преобразования». Это явное представление бесконечно малых контактных преобразований дается следующими формулами:

$$
\left.\begin{aligned}
\delta p_i &= -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}, \\
\delta q_i &= \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i},
\end{aligned}\right\} \tag{41}
$$

где $\delta q_i = Q_i - q_i$, $\delta p_i = P_i - p_i$, G — дифференцируемая функция переменных q и p; ε — бесконечно малый параметр преобразования. Они могут быть получены различными путями, наиболее естественный из которых использован в книге Гольдстейна [101].

Производящая функция канонического преобразования F_1: $Q_i = q_i + \delta q_i$; $P_i = p_i + \delta p_i$ должна бесконечно мало отличаться от производящей функции тождественного канонического преобразования F_2, которая, согласно общей теории [102], выражается посредством формулы

$$F_2 = \sum q_i P_i. \tag{42}$$

Тогда

$$F_1 = F_2 + \varepsilon G(q, P)$$

или

$$F_1 = \sum_i q_i P_i + \varepsilon G(q, P), \tag{43}$$

где G — предполагается достаточно гладкой функцией q и P. Для производящей функции, зависящей от q и P, опять-таки в соответствии с общей теорией, будут справедливы соотношения

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial F_1}{\partial P_i} \tag{44}$$

Подставляя (43) в (44), получаем

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial q_i} &= p_i = P_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad \text{или} \quad \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}, \\
\frac{\partial F_1}{\partial P_i} &= Q_i = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}, \quad \text{или} \quad \delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}
\end{aligned} \tag{45}
$$

Но так как P_i отличается от p_i бесконечно мало, то с точностью до величин первого порядка малости относительно ε $G(q, P)$ можно заменить на $G(q, p)$, а $\frac{\partial G}{\partial P_i}$ — на $\frac{\partial G}{\partial p_i}$. Тогда вместо (45) получаем соотношения (41).

Другой, более известный, но несколько более искусственный вывод соотношений (41) [103] опирается непосредственно на определение контактных преобразований, т. е. на соотношение

$$\sum P_i dQ_i - \sum_i p_i dq_i = d\Omega. \tag{46}$$

Подставляя сюда выражения для P_i и Q_i, получаем

$$\sum(\delta p_i dq_i - \delta q_i dp_i) = d\left(\Omega - \sum_i p_i \delta q_i\right). \tag{47}$$

Затем вводится обозначение

$$-\varepsilon G = \Omega - \sum_i p_i \delta q_i,$$

тогда (47) сразу же дает

$$\delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}; \qquad \delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i},$$

т. е. соотношения (41). Соотношения (41) позволяют без труда получить сформулированный выше канонический вариант взаимосвязи. Действительно, изменение некоторой функции $U = U(q, p)$ вследствие бесконечно малого канонического преобразования можно записать, используя (41) в виде

$$\delta U = \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial U}{\partial p_i} \delta p_i \right) =$$

$$= \varepsilon \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial U}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) = \varepsilon [U, G], \tag{48}$$

где [ ] — означает скобки Пуассона, вновь введенные Ли и Шерингом в 1873 г. [104] Принимая в качестве U гамильтониан H и считая его инвариантным относительно рассматриваемого преобразования (41), получим

$$\delta H = \varepsilon [H, G] = 0,$$

т. е. G — первый интеграл системы, определяемой соответствующими каноническими уравнениями

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{49}$$

Это известный результат, вытекающий из подстановки (49) в

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial G}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial G}{\partial q_i} \dot{q}_i \right), \tag{50}$$

что дает

$$\frac{dG}{dt} = [G, H]. \qquad (5$$

Обратно, если G — первый интеграл уравнений (49), то $[G, H]$ $= \delta H = 0$, и, следовательно, H инвариантен относительно пр образования (41).

Изучение работ С. Ли (с учетом комментариев его ученика, со рудника и комментатора Ф. Энгеля, написавшего обстоятельн примечания к собранию сочинений С. Ли [105]) показывает, что уже в ранний период своего творчества (1872—1874), по сущес ву, владел обсуждаемой теоремой. Сразу же подчеркнем, что него едва ли кто-нибудь, например Якоби, мог знать эту те рему, так как она была непосредственным следствием инфин тезимального подхода к теории канонических преобразовани выдвинутого, как мы неоднократно упоминали ранее, лишь С. Л

Энгель, комментируя его первую работу о значении контак ных преобразований для теории интегрирования дифференциал ных уравнений, писал: «Не подлежит сомнению, что он (т. е С. Ли.— *В. В.*) знал их (т. е. соотношения между интеграла дифференциальных уравнений и бесконечно малыми контактны преобразованиями.— *В. В.*), когда писал сочинение I [106]. Здес также возникает *двойственная точка зрения, которая оказываетс крайне полезной*: благодаря тому, что, *с одной стороны*, $\Phi(x, p) =$ $=$ const *может рассматриваться как интеграл системы, а с дру гой стороны, как бесконечно малое контактное преобразовани при котором уравнение остается инвариантным*, легко получаю теорему Пуассона — Якоби» [107]. Правда, в этой первой работе Ли имеющей непосредственное отношение к механике, обсуждаема взаимосвязь, о которой говорит также Энгель, не выражена явно а скорее, подразумевается. Несколько позже (1874), в более под робной работе «Основания теории инвариантов контактных пре образований», Ли формулирует и доказывает следующую теорему «Теорема V. Каждое инфинитезимальное однородное контактное преобразование может быть записано в форме: $\frac{\delta x_i}{\partial H/\partial p_i} = \frac{\delta p_i}{-\partial H/\partial x_i} =$ $= \delta t$,, где H — произвольная однородная функция первого по рядка» [108].

Как мы видели, именно эти соотношения, дающие явное выра жение бесконечно малых контактных преобразований (ср. с (47) н стр. 69), дают возможность легко получить канонический вариан взаимосвязи симметрия — сохранение посредством использовани формализма скобок Пуассона. Но, как мы уже отмечали, Ли в 1873 г. ввел эти скобки в широкое употребление как раз в связи с теорией бесконечно малых канонических преобразований. Так что вполне естественным выглядит примечание Ли к формулированной выше теореме:

«Из этой теоремы следует, в частности, как легко видеть, что *определение всех инфинитезимальных контактных преобразований, которые переводят уравнение*: $f(z, x_1, \ldots, x_n;\ p_1, \ldots, p_n) =$ const (*т. е. распространенная в то время запись канонической системы с гамильтонианом f.— В. В.*) *в себя, совпадает с интеграцией этого уравнения*»[109]. Правда, в этой теореме речь идет только об однородных контактных преобразованиях. Как мы замечали, требование однородности равносильно условию: $\sum_i P_i dQ_i = \sum_i p_i dq_i$ (q — в обозначениях Ли x), и, таким образом, эти преобразования образуют важнейшую подгруппу группы канонических преобразований, называемую обычно подгруппой Матье или Матье — Ли (см. стр. 66). В более поздних исследованиях Ли уже не ограничивался подгруппой Матье, рассматривая общие канонические преобразования. Основные же результаты при этом обобщении, в частности, приведенная на стр. 70 теорема, сохраняют свою силу. Цитированное примечание и составляет, по существу, лиевский вариант взаимосвязи.

В последующих работах Ли неоднократно использовал установленную им закономерность, например, для доказательства теоремы Пуассона — Якоби, не ограничивая при этом тип контактных преобразований[110]. Так, уже в работе 1875 г. он фактически использует свою теорему V для общих контактных преобразований, и цитированное выше примечание остается в силе и в этом случае: «Далее мы должны рассмотреть, наконец, инфинитезимальные контактные преобразования, обладающие формой

$$\delta x_k = \delta t\,\frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \delta p_k = -\,\delta t\,\frac{\partial H}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

По аналогии с вышеупомянутым я обозначу это преобразование символом:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right) = [H,\ f].$$

В дальнейшем я часто буду находить полезнее инфинитезимальные контактные преобразования обозначать непосредственно функцией H»[111]. Наконец, можно сослаться на работу Энгеля 1916 г., в которой четко формулируется канонический вариант взаимосвязи, причем с указанием на авторство С. Ли (более детальный разбор этой работы будет дан в следующей главе): «Но, согласно С. Ли, каждый интеграл уравнения $H =$ const, т. е. каждое решение уравнения $(H,\ f) = 0$, является характеристической функцией инфинитезимального преобразования: $\delta x_i = \Phi_{p_i}\,\delta t$, $\delta p_i = -\,\Phi_{x_i}\,\delta t$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, при котором уравнение $H =$ const остается инвариантным, так как

$$\delta H = \sum_{i=1}^{n} (\Phi_{p_i} H_{x_i} - \Phi_{x_i} H_{p_i})\, \delta t = (\Phi, H)\, \delta t = 0.\text{»}\ [112]$$

Из приведенных высказываний Ли и Энгеля, а также доказ тельства канонического варианта (стр. 69) видно, что решающи моментом в его установлении были соотношения (41), дающие явно выражение бесконечно малого канонического преобразования п средством использования единственной функции G. В упомянуто работе 1874 г. [113] С. Ли формулирует и доказывает теорему V, ка раз дающую соотношения (41). Выкладки же, приводящие на о нове этой теоремы к каноническому варианту взаимосвязи симме рия — сохранение, сформулированному им в виде примечани С. Ли не считает необходимым проводить, по-видимому, в силу и элементарности. Первая же работа 1872 г. [114], по существу говоря вообще не содержит выкладок и доказательств, связанных с соо ношениями (41) и вытекающим из них каноническим варианто взаимосвязи.

Первый вывод соотношений (41), принадлежащий С. Ли, соде жится, очевидно, как раз в статье 1874 г. и заслуживает ра смотрения. Ли записывает бесконечно малое контактное прео разование посредством двух функций M_i и Π_i:

$$X_i = x_i + \varepsilon M_i; \qquad P_i = p_i + \varepsilon \Pi_i. \qquad (5$$

Так как в этой работе он ограничивается рассмотрением «одноро ных контактных преобразований», то на M_i и Π_i накладывается д полнительное условие быть однородными функциями соответс венно нулевого и первого порядков. Доказательство соотношени (41), по существу говоря, сводится к доказательству существ вания «однородной функции первого порядка, частные прои водные которой по p_i и x_i совпадают соответственно с M_i и $-\Pi$ (Несколько далее Ли подчеркивает: «Это замечание... имеет фу даментальную важность; оно было для меня исходным пунктом новейших исследованиях по группам преобразований») [115]. Ли и пользует якобиевские условия каноничности преобразовани

$$(X_i,\ X_k) = (X_i,\ P_k) = (P_i,\ P_k) = 0; \qquad (P_i,\ X_i) = 1, \qquad (5$$

подставляя в них выражения для X и P из (52). Эта подстановка, точностью до бесконечно малых первого порядка, дает следующи соотношения:

$$\frac{\partial M_i}{\partial p_k} = \frac{\partial M_k}{\partial p_i}; \qquad \frac{\partial M_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial \Pi_k}{\partial x_i} \qquad \frac{\partial \Pi_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \Pi_k}{\partial x_i} \qquad (5$$

Они позволяют определить такую функцию Φ переменных x и p, дл которой выполняются условия

$$M_i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}; \qquad \Pi_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \qquad (5$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Таким образом, выражения типа (41) доказаны и получено явное представление бесконечно малых контактных преобразований посредством задания единственной функции Ф. Последующее доказательство однородности первого порядка для функции Ф не представляет интереса, и мы его опускаем. Кроме того, ясно, что подобная схема вывода соотношений (41) остается в силе и для контактных преобразований общего типа.

В работе 1877 г. [116] Ли рассмотрел вывод соотношений (41), исходя из основных условий контактности (см. стр. 69):

$$\sum P_i dX_i - \sum_i p_i dx_i = d\Omega, \tag{56}$$

которые можно переписать в виде

$$\frac{\delta}{\delta t}\sum_i p_i dx_i = d\Omega, \tag{57}$$

и после выполнения дифференцирования и перестановки символов d и δ представить так:

$$\sum \left(\frac{\delta p_i}{\delta t} dx_i + p_i d\,\frac{\delta x_i}{\delta t}\right) = d\Omega. \tag{58}$$

Если же учесть, что

$$\left.\begin{aligned} X_i - x_i = \delta x_i = Y_i\,(x_1, \ldots, x_n;\ p_1, \ldots, p_n)\,\delta t, \\ P_i - p_i = \delta p_i = Q_i\,(x_1, \ldots, x_n;\ p_1, \ldots, p_n)\,\delta t, \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

то выражение (57) можно переписать в форме

$$\sum (Q_i dx_i + p_i dY_i) = d\Omega,$$

что эквивалентно двум следующим уравнениям:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_r} = Q_r + \sum_i p_i\,\frac{\partial Y_i}{\partial x_r}; \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial p_\rho} = \sum_i p_i\,\frac{\partial Y_i}{\partial p_\rho} \tag{60}$$

со свойствами симметрии:

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho}\left(Q_r + \sum_i p_i\,\frac{\partial Y_i}{\partial x_r}\right) = \frac{\partial}{\partial x_r}\left(Q_\rho + \sum_i p_i\,\frac{\partial Y_i}{\partial x_\rho}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial p_\rho}\left(Q_r + \sum_i p_i\,\frac{\partial Y_i}{\partial x_r}\right) = \frac{\partial}{\partial x_r}\sum_i p_i\,\frac{\partial Y_i}{\partial p_\rho},$$

$$\frac{\partial}{\partial p_\rho}\sum p_i\,\frac{\partial Y_i}{\partial p_r} = \frac{\partial}{\partial p_r}\sum_i p_i\,\frac{\partial Y_i}{\partial p_\rho}.$$

После упрощения эти соотношения сводятся к равенствам ви[д]
(54):

$$\frac{\partial Q_r}{\partial x_\rho} = \frac{\partial Q_\rho}{\partial x_r}; \quad \frac{\partial Q_r}{\partial p_\rho} = -\frac{\partial Y_\rho}{\partial x_r}; \quad \frac{\partial Y_\rho}{\partial p_r} = \frac{\partial Y_r}{\partial p_\rho}, \qquad (6[1])$$

откуда немедленно следует, что Y_r и Q_ρ равны соответственно час[т]ным производным по p_r и $-x_r$ от некоторой функции F переме[н]ных $x_1, \ldots, x_n$; $p_1, \ldots, p_n$:

$$Y_r = \frac{\partial F}{\partial p_r}; \quad Q_r = -\frac{\partial F}{\partial x_r},$$

и сравнение этих выражений с (59) дает соотношения (41). (Лемма [...] рассматриваемой работы Ли, являющаяся обобщением теоремы [...] работы 1874 г. [117]). Подчеркнем, что этот вывод С. Ли вполне со[в]падает с наиболее распространенным современным выводом соот[но]шений (41) [118].

Итак, С. Ли установил в 1872—1874 гг. канонический вариан[т] взаимосвязи симметрия — сохранение, согласно которому с каж[]дой однопараметрической подгруппой группы контактных (ил[и] канонических) преобразований связывается некоторый первы[й] интеграл исследуемой механической системы, причем связь эт[а] такова, что названный интеграл просто совпадает с производяще[й] функцией заданного преобразования, т. е. с генератором соответ[]ствующей однопараметрической группы.

Простейшим примером применения лиевского варианта взаимо[]связи является вывод законов сохранения импульса и момент[а] импульса.

Так как «евклидова группа», являющаяся подгруппой групп[ы] точечных преобразований, может рассматриваться как подгрупп[а] группы канонических преобразований, то шести бесконечно ма[]лым преобразованиям этой группы должны, в согласии с лиевски[м] вариантом взаимосвязи, отвечать шесть законов сохранения. Кон[]кретный вид генераторов группы позволяет, благодаря соотно[]шениям (41), вычислить соответствующие производящие функции, отождествляемые с шестью первыми интегралами механики. Ге[]нераторы, соответствующие трансляционной симметрии гамиль[]тониана, можно записать в виде

$$\delta q_i = \varepsilon \delta_{ij}; \quad \delta p_i = 0, \qquad (62)$$

откуда, согласно (41), видно, что это бесконечно малое канониче[]ское преобразование можно задать функцией: $G = p_i$, которая для $i = 1, 2, 3$ дает три первых интеграла импульса.

Вращательной симметрии гамильтониана вокруг, например, оси z (за обобщенные координаты принимаем здесь x, y, z) отвечает инвариантность гамильтониана относительно бесконечно малого канонического преобразования

$$\left.\begin{aligned}\delta x_i &= -y_i\varepsilon\\ \delta y_i &= x_i\varepsilon,\\ \delta z_i &= 0,\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\delta p_{ix} &= -p_{iy}\varepsilon,\\ \delta p_{iy} &= p_{ix}\varepsilon,\\ \delta p_{iz} &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

p_{ix}, p_{iy}, p_{iz} — x-, y-, z-компоненты импульса i-той частицы.

Кстати говоря, формулы преобразования для p_i получаются из следующего представления:

$$p_{ix} = m_i\frac{dx_i}{dt},$$

откуда

$$\delta p_{ix} = m_i\frac{\delta t\cdot d\delta x_i - dx_i d\delta t}{dt^2} = m_i\frac{d\delta x_i}{dt} - p_i\frac{d\delta t}{dt}. \tag{64}$$

Соотношения (63) легко позволяют восстановить вид производящей функции этого бесконечно малого канонического преобразования. Действительно:

$$dG = \sum_i\left(\frac{\partial G}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial G}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial G}{\partial p_{ix}}dp_{ix} + \frac{\partial G}{\partial p_{iy}}dp_{iy}\right);$$

подставляя сюда выражения для частных производных функции G по всем переменным, вычисленные с учетом соотношений (63) и (64), получаем

$$dG = \sum_i (p_{iy}dx_i - p_{ix}dy_i - y_i dp_{ix} + x_i dp_{iy}) =$$

$$= d\left[\sum_i (p_{iy}x_i - p_{ix}y_i)\right],$$

и, следовательно, G, отвечающая бесконечно малому вращению вокруг оси z, с точностью до константы совпадает с z-компонентой момента импульса:

$$G = \sum_i (x_i p_{iy} - y_i p_{ix}). \tag{65}$$

Кстати говоря, из соотношений (41) непосредственно следует, что производящей функцией бесконечно малых канонических преобразований, реализующих действительное движение механической системы, является гамильтониан (с чем и связана его фундаментальная роль в механике и физике). В самом деле, взяв в качестве бесконечно малого параметра $\varepsilon = dt$ и положив $G = H$, получим, используя канонические уравнения системы,

$$\delta q_i = dt\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot q_i dt = dq_i; \qquad \delta p_i = -dt\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot p_i dt = dp_i. \tag{66}$$

Однако для того, чтобы в рамках лиевского варианта получить непосредственно интегралы движения центра тяжести и энергии как производящие функции некоторых бесконечно малых канонических преобразований, потребовалось бы такое расширение канонического формализма, которое бы придало и времени характер канонической переменной. Но несмотря на то, что уже Ньютон (и даже некоторые его предшественники) ясно представляли себе однородность времени и «галилеевский» принцип относительности, обе эти симметрии рассматривались как бы совершенно независимо от широко используемой евклидовой симметрии. По существу, представление о галилей-ньютоновской группе $\mathcal{G}$ как единой фундаментальной группе классической механики, действующей на пространственно-временно́м многообразии, возникло лишь после построения специальной теории относительности. В этой связи уместно привести высказывание Клейна: «Эта выделенность (т. е. времени.— *В. В.*) играла определенную тормозящую роль в истории развития механики. Несмотря на то, что уже Лагранж говорил о механике как геометрии 4-мерного пространства, действительную пользу из этого понимания извлекли лишь недавно. Все предыдущие авторы всегда имели перед своими глазами лишь евклидовскую группу и не связывали с ней преобразований (4) и (5) (т. е. преобразований, отвечающих однородности времени и галилеевской симметрии.— *В. В.*), хотя, вообще говоря, они могли это сделать. Это относится и ко мне, когда я писал свою «Эрлангенскую программу». Я отчетливо помню, что не прошел мимо замечания Лагранжа, но я полагал, что оно не может быть включено в мой групповой принцип. Лишь выдвижение группы Лоренца привело математиков к более правильному пониманию галилей-ньютоновской группы»[119]. Действительно, расширение канонического формализма в указанном направлении и соответствующее обобщение лиевского варианта взаимосвязи было произведено лишь в 1916 г., после того как была установлена взаимосвязь симметрия — сохранение для $\mathcal{P}$-группы. Примечательно, что это было сделано именно Энгелем и по инициативе Ф. Клейна[120].

Хотя лиевский аналог рассматриваемой закономерности и обладал значительно большей общностью и абстрактностью, чем лагранжев и гамильтонов варианты, и как бы потенциально заключал в себе возможность упомянутого расширения, взаимосвязь $\mathcal{G}$-симметрия — сохранение продолжала оставаться незамкнутой. Разумеется, в рамках механики и в отношении евклидовской симметрии лагранжев, гамильтонов и лиевский варианты могли рассматриваться как эквивалентные, вследствие эквивалентности соответствующих формализмов аналитической механики. Правда, известные преимущества канонического варианта в самой механике были несомненны. Так, он обладал значительно большей общностью, потому что евклидова группа является подгруппой существенно более широкой канонической группы. Кроме того, связь симметрий с сохранением стала в нем более непосредственной: функ-нии, определяющие преобразования симметрии, просто совпадают (тождественны) с сохраняющимися величинами системы. Кстати говоря, именно эта сторона лиевского варианта почти без изменения вошла в квантово-механический аналог взаимосвязи симметрия — сохранение, согласно которому унитарные инфинитезимальные операторы симметрии гамильтониана (точнее, их эрмитовы аналоги) совпадают с соответствующими операторами сохраняющихся величин. Если лагранжев вариант взаимосвязи позволял все-таки усмотреть связь однородности времени с законом сохранения энергии, то в каноническом варианте вследствие известной выделенности времени эта взаимосвязь становилась менее явной. Впрочем, интерпретация гамильтониана как производящей функции, которая осуществляет каноническое преобразование, реализующее действительное движение системы [см. соотношение (66) на стр. 75] весьма близка к соответствующему лагранжевскому рассуждению (см. стр. 47).

Лиевский вариант явился высшим достижением «механического» периода развития рассматриваемой взаимосвязи. Особое значение он имел благодаря включению теоретико-групповых представлений, прежде всего аппарата теории групп Ли, в основы аналитической механики. Правда, многие важные теоретико-групповые стороны механики оставались неразработанными. Так, Гамель в 1904 г., приводя высказывание Ли: «Принципы механики имеют теоретико-групповую природу (происхождение)» (из предисловия к третьей главе его «Теории групп преобразований», изданной в 1893 г. отдельной книгой, стр. VII) замечает: «Я почти уверен, что Ли имел в виду лишь теорию интегрирования дифференциальных уравнений механики, взаимосвязь канонических преобразований Якоби со своими контактными преобразованиями и расширение теории геодезических линий. Следующая цитата заставляет меня предположить это еще более уверенно: истинный смысл фразы «Кинематика и ее законы строятся частично («zum Teil») как специальный случай моих общих теорем» остается неясным, особенно из-за «zum Teil» [121]. Действительно, последующие работы, с одной стороны, Штуди А. П. Котельникова и др., а с другой — Гамеля, Пуанкаре и др. [122], существенно углубили понимание теоретико-групповой структуры механики. Однако несомненно, что начало было положено С. Ли, и рассматриваемый выше лиевский вариант взаимосвязи имел при этом фундаментальное значение.

В заключение рассмотрим следующие два вопроса: 1) о преемственности в развитии рассматриваемой взаимосвязи от Лагранжа и Гамильтона к С. Ли; 2) об отношении С. Ли к установленной им взаимосвязи симметрия — сохранение в рамках канонического формализма.

Прежде всего С. Ли нигде не ссылается в связи с концепцией взаимосвязи ни на Лагранжа, ни на Гамильтона. Он непосредственно отталкивается от теории канонических преобразований

Якоби и теоремы Пуассона — Якоби, которые вплотную подводили к установлению связи между каноническими преобразованиями и интегралами уравнений механики. Стимулирующую роль играла также аналогия между теорией Галуа и возможностью установления теоретико-групповых критериев интегрируемости дифференциальных уравнений. Таким образом, лагранжев и гамильтонов варианты взаимосвязи, если и оказали влияние на генезис канонического варианта, то, скорее всего, косвенно. Решающее значение, как мы заметили, имело развитие канонического формализма вообще (Пуассон, Гамильтон, Якоби), геометрические методы интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (Монж, Ампер, Пфафф, Коши, Якоби) [123] и подход к теории интегрирования дифференциальных уравнений с теоретико-групповой точки зрения, аналогичной теории Галуа в алгебре.

Второе замечание касается отношения С. Ли к найденному им каноническому варианту взаимосвязи. В отличие от Лагранжа и Гамильтона, С. Ли даже в своих механических работах оставался математиком, но математиком геометрического и теоретико-группового склада. Выявление теоретико-групповой структуры различных разделов математики и математического естествознания представлялось ему делом принципиальным и плодотворным с практической точки зрения. С этой точки зрения С. Ли весьма высоко оценивал открытую им взаимосвязь симметрий фазового пространства с интегралом уравнений механики (см. его высказывания на стр. 72). Однако пространственно-временно́й подход для него не был характерен, и он на основе сформулированного им варианта взаимосвязи не пытался исследовать уравнения механики в рамках галилей-ньютоновской группы (см. стр. 75). Взаимосвязь $\mathcal{G}$-симметрия — сохранение, где $\mathcal{G}$ — галилей-ньютоновская группа, продолжала оставаться незамкнутой, и хотя сам С. Ли, по-видимому, отдавал себе отчет в фундаментальности установленной взаимосвязи (по крайней мере, на абстрактно-механическом уровне), такое отношение к рассматриваемой взаимосвязи и после открытия лиевского варианта не стало еще общим достоянием механики и физики.

Глава III

МЕХАНИКА КОНЦА XIX ВЕКА

«Итак, механика эпохи от Лагранжа до Остроградского — необходимое звено в развитии науки. Ее вклад не поражает, но внушителен. Как своими достижениями, так и своей незавершенностью она подготавливала новую эпоху в науке. В этом деле механика последних десятилетий XIX в.— ее непосредственное продолжение».

И. Б. Погребысский[1]

В предыдущей главе мы отмечали, что наиболее распространенным методом получения законов сохранения в механике в середине и второй половине XIX в. стал лагранжев вариант взаимосвязи симметрия — сохранение. Но трудами Лагранжа, Гамильтона, Якоби и других к середине XIX в. были развиты новые методы и формализмы механики, как правило, эквивалентные между собой, но раскрывающие различные стороны ее математической структуры и являющиеся эффективным средством интегрирования уравнений движения.

Последовательное развитие каждого из этих формализмов должно было привести к установлению отвечающих этим формализмам вариантов взаимосвязи симметрия — сохранение. Так, вслед за лагранжевым вариантом, связанным с развитием механики на основе принципа Даламбера — Лагранжа, появились два гамильтоновых варианта, ассоциируемых с методом характеристической функции и концепцией гамильтонова действия, или принципом Гамильтона. Лиевский, или канонический, вариант взаимосвязи является формой взаимосвязи, характерной для канонического формализма механики.

Таким образом, в принципиальном отношении основные варианты взаимосвязи симметрия — сохранение в механике были разработаны к 70-м годам XIX в. Заметим, что с точки зрения современной терминологии второй гамильтонов вариант связан с лагранжевым формализмом, а лиевский (канонический) — с гамильтоновым формализмом. Оставались, однако, некоторые пробелы, прежде всего незамкнутость взаимосвязи $\mathcal{G}$-симметрия — сохранение и связанная с ней некоторая недооценка взаимосвязи как существенной закономерности механики, хотя С. Ли, очевидно, был ближе, чем кто-либо другой к правильному пониманию значения взаимосвязи. И несмотря на то, что названные пробелы в рамках механики дорелятивистской эпохи так и остались незаполненными, стихийное развитие взаимосвязи в рассматриваемый период происходило в значительной мере в направлении их устранения.

Это развитие было связано также с особенностями развития механики в целом в этот период. Для механики же последних десятилетий XIX в. были характерны: 1) установление более тесных контактов между механикой и собственно физикой, выражавшееся в некоторой физикализации механики, при условии, что последняя продолжала оставаться единственной фундаментальной теорией физики; 2) новая волна математизации механики, связанная с внедрением в нее теоретико-групповых и геометрических методов; 3) начало процесса высвобождения формализмов аналитической механики от механических предпосылок.

Что же нового это развитие внесло в разработку концепции взаимосвязи? В этой главе мы рассмотрим следующие результаты:

1) циклический вариант взаимосвязи, являющийся прямым следствием метода циклических координат;

2) «винтовой» вариант взаимосвязи — результат разработки винтового исчисления и применения его в механике;

3) соотношения Гюйгенса — Шютца, связанные с анализом галилей-ньютоновской инвариантности законов сохранения механики;

4) квазикоординатный вариант взаимосвязи, особенно существенный для неголономных систем;

5) теоремы Брунса и Пуанкаре, дающие дополнительные аргументы в пользу фундаментального значения десяти первых интегралов механики.

Мы попытаемся понять место и значение каждого из этих результатов в развитии взаимосвязи симметрия — сохранение в связи с особенностями развития механики в конце XIX в. Сразу подчеркнем, что в разросшейся механике конца XIX в. к концепции взаимосвязи близко примыкали некоторые другие, не рассматриваемые нами направления исследований. К числу их в первую очередь можно отнести методы подобия и размерности в механике сплошной среды, берущие начало в трудах Галилея, Ньютона и Фурье и развитые затем Стоксом, Гельмгольцем, Рэлеем, Рейнольдсом и др. [2]; проблему геометризации механики (Якоби, Бельтрами, Липшиц, Дарбу, Герц и др. [3]); теорию интегральных инвариантов (Пуанкаре, Картан, С. Ли и др. [4]); энергетические дискуссии, связанные с именами Оствальда, Больцмана, Гельма, Дюгема и др. [5] Однако в рамках этих направлений, как правило, взаимосвязь симметрия — сохранение не была еще явно сформулирована. Обсуждение же и историко-научный анализ большинства из этих проблем имеются в литературе [6]. Наконец, если достижения Лагранжа, Гамильтона и С. Ли в рассматриваемом отношении имели действительно принципиальное и общее значение, то перечисленные выше результаты последних десятилетий XIX в. носили уже существенно более частный характер. Можно сказать, что именно гамильтонов и особенно, лиевский варианты явились высшим достижением всего дорелятивистского периода развития концепции взаимосвязи. Тем не менее, в подготовке релятивистских вариантов взаимосвязи симметрия — сохранение, более глубокого понимания взаимосвязи как самостоятельной закономерности, в разработке ее теоретико-группового языка и применений для конкретных задач последние десятилетия XIX в. были весьма существенны.

Метод циклических координат

«Циклический» вариант взаимосвязи тесно связан с методом циклических координат, известным с середины XIX в. Правда, особого внимания на взаимосвязь симметрия — сохранение в этом методе не обращалось. История этого метода и связанных с ним вопросов изучена хорошо и обстоятельно изложена во многих работах [7]. Поэтому мы ограничимся лишь кратким рассмотрением вопроса, концентрируя основное внимание на интерпретации этого метода в духе рассматриваемой концепции.

Фактически уже Лагранж явно указал во втором издании «Аналитической механики», что «если некоторые из переменных (названные впоследствии «циклическими». — *В. В.*), входящие в состав функции T, не входят в V, а также в L, M, (здесь T — кинетическая энергия системы; V — потенциальная энергия, а $L = 0$, $M = 0$ и т. д. — уравнения связей.— *В. В*), то уравнения, относящиеся к этим переменным (т. е. соответствующие уравнениям Лагранжа второго рода, выведенные несколькими страницами ранее.— *В. В.*), будут содержать в себе лишь дифференциальные члены, и интегрирование этих уравнений будет очень легко осуществить, особенно если в T эти переменные будут входить только в дифференциальной форме» [8]. Таким образом, именно Лагранж был в действительности автором циклического варианта взаимосвязи, который с формальной стороны непосредственно вытекал из его уравнений второго рода. Действительно, если некоторая обобщенная координата q_i не входит в $\mathscr{L}$, то $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} = 0$, и соответствующее уравнение Лагранжа $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0$ может быть непосредственно проинтегрировано, т. е. получается, что $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i = \text{const}$. Интересно, что в качестве иллюстрации Лагранж приводит не закон сохранения импульса (или движения центра тяжести), а закон сохранения энергии: «Интеграл, который всегда имеет место, когда силы являются функциями расстояний, а функции T, V, L, M, ...— не содержат в конечном виде переменной t, это — интеграл, который дает принцип сохранения живых сил» [9].

Аналогичное замечание можно, например, встретить и в «Лекциях» Якоби. Записав уравнения Лагранжа в виде

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_s},$$

где $p_s = \frac{\partial T}{\partial q'_s}$, он указывает: «Благодаря форме этих уравнен[illegible] получается непосредственно следующий *замечательный* резул[illegible]тат: если можно выбрать новые переменные так, что одна из н[illegible] q_s не входит в силовую функцию и что в T не входит сама переме[illegible]ная q_s, а входит только ее производная q'_s, то из этого обстоятел[illegible]ства каждый раз получится интеграл данной системы диффере[illegible]циальных уравнений, а именно, $p_s = \mathrm{const}$, или, что то ж[illegible] $\frac{\partial T}{\partial q'_s} = \mathrm{const}$» [10].

Однако ни Лагранж, ни Якоби не использовали специально[illegible] термина для координат, которые впоследствии были названы «ц[illegible]клическими» («игнорируемыми», «отсутствующими», «кипостен[illegible]ческими», «скоростными» и т. д.), и не проанализировали тех след[illegible]ствий, к которым приводит исключение циклических переме[illegible]ных из лагранжиана или гамильтониана. Во второй половине XIX [illegible] метод циклических координат был тщательно изучен, прежд[illegible] всего, Раусом (1877), а затем Гельмгольцем, В. Томсоном и Тэтом[illegible] Дж. Дж. Томсоном (1879—1888) [11]. Разработанная на его осно[illegible] теория скрытых движений (Гельмгольц, В. Томсон и Тэт[illegible] Дж. Дж. Томсон, Больцман и Герц) позволяла механически ин[illegible]терпретировать лагранжианы весьма произвольного вида, суще[illegible]ственно отличающиеся от обычного лагранжиана механики и иг[illegible]рающие важную роль в теории теплоты и электродинамике [12][illegible]

Вместе с тем, упомянутые исследователи, как и Лагранж и Якоби, не обращали достаточного внимания на, так сказать, «нетеровский» аспект метода циклических координат. Ведь циклический характер некоторой координаты означает, что движение системы как целого, соответствующее этой координате, никак не сказывается на динамических свойствах системы. А это эквивалентно инвариантности системы (ее лагранжиана или гамильтониана) относительно преобразования, характеризующего «циклическое» движение.

Таким образом, устанавливается непосредстенная связь между симметриями типа однородности и изотропности пространства и однородности времени с законами сохранения импульса, момента импульса и энергии. Характер циклической координаты (трансляционный или вращательный) указывает и на тип сохраняющейся величины (импульс или момент импульса). Вместе с тем, циклический вариант взаимосвязи обладает значительно меньшей степенью общности по сравнению с лиевским, так как в нем идет речь о симметриях лишь определенного типа, выражающихся в отсутствии обобщенных координат в лагранжиане или гамильтониане системы, и, таким образом, о сохраняющихся величинах также строго определенного типа, а именно, обобщенных импульсах.

Правда, уже Лагранж, как мы видели, выводил закон сохранения энергии из цикличности координаты времени. Его вывод в несколько упрощенном виде выглядит следующим образом. Так как $\frac{d\mathscr{L}}{dt} = 0$, то

$$\frac{d\mathscr{L}}{dt} = \sum_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt},$$

а в силу уравнений Лагранжа,

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}.$$

Тогда

$$\frac{d\mathscr{L}}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}\right),$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\left(\mathscr{L} - \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0,$$

и, следовательно,

$$\mathscr{L} - \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} = -H = \mathrm{const}.$$

Таким образом, на основе циклического варианта можно вывести не только законы сохранения импульса и момента импульса, но и энергии, хотя процедура вывода и является несколько более сложной.

Если же конфигурационное пространство расширить до пространства событий $(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1} = t)$, а в качестве независимой переменной ввести некоторый параметр τ, то энергия естественным образом интерпретируется как обобщенный импульс, соответствующий $(n+1)$-й обобщенной координате t. В этом случае интеграл действия для склерономной или консервативной системы можно записать в виде

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{q_1'}{t'}, \ldots, \frac{q_n'}{t'}\right) t' d\tau,$$

где q', t' — это производные q и t по τ. Теперь, в согласии с циклическим вариантом взаимосвязи, циклической координате t соответствует сохраняющийся импульс:

$$p_t = \frac{\partial(\mathscr{L}t')}{\partial t'} = \mathscr{L} - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{q_i'}{t'^2}\right) t' = \mathscr{L} - \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i = -H\,[13].$$

Такое расширение циклического варианта стало использоватся лишь после построения специальной теории относительност. В циклическом варианте взаимосвязи условия симметрии формруются в неявной форме и весьма специальным образом в отличи от лагранжева, гамильтонова и особенно лиевского вариантов для которых характерна явная и общая формулировка требовани симметрии на языке бесконечно малых преобразований. Результаты, найденные с помощью циклического варианта, всегда можн получить посредством гамильтонова и лиевского вариантов, но н наоборот. Это обстоятельство существенно ограничивает область его применения. Вместе с тем, во многих практически важных случаях симметрии системы удается сформулировать на язык циклических переменных, что делает циклический вариант, в сил его простоты, весьма полезным. Исторически этот вариант бы связан, как мы упоминали, с теорией скрытых движений и распространением на ее основе лагранж-гамильтоновских методов н собственно физические процессы, что в конечном счете способствовало освобождению этих методов от их «механической скорлупы».

Винтовое исчисление

«Лекции о кватернионах» В. Р. Гамильтона (1853) [14] положили начало тому направлению векторного исчисления, которое в конце XIX и начале XX в. завершилось трудами А. П. Котельникова и Э. Штуди и получило название *винтового исчисления* [15]. Помимо геометрии и алгебры, оно нашло применение и в механике, особенно механике твердого тела, и теории механизмов [16]. Понятие *винта* было введено Р. Боллом в его исследованиях по механике [17]. Но за три года до этого В. К. Клиффорд ввел удобное векторное представление винта, сопоставив каждому винту вектор, координаты которого являются *дуальными числами*: $a + b\omega$, где $\omega^2 = 0$. Затем это представление было распространено и на неевклидовы пространства: на эллиптическое — им же, причем в этом случае $\omega^2 = 1$, т. е. $a + b\omega$ — двойные числа, и на гиперболическое — Коксом и Бухгеймом, причем $\omega^2 = -1$, т. е. $a + b\omega$ — обычные комплексные числа [18].

В механике понятие винта, а именно, силового и кинематического винтов, восходит к известной теореме Пуансо о приведении системы сил $\boldsymbol{f}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, приложенных к твердому телу, к главному вектору $\boldsymbol{f} = \sum\limits_i \boldsymbol{f}_i$ и главному моменту $\boldsymbol{m} = \sum\limits_i [\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{f}_i]$, где $\boldsymbol{r}_i$ — вектор, соединяющий точки приложения сил $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{f}_i$, а также к открытому им же параллелизму между силами и угловыми скоростями, с одной стороны, и моментами сил и поступательными скоростями, с другой [19]. Если считать, что векторы $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{m}$ приложены в одной точке O, то при переходе к другой точке O' $(OO' = \boldsymbol{p})$ вектор $\boldsymbol{f}$ не изменяется, а вектор $\boldsymbol{m}$ преобразуется по правилу:

$\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{m} - [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{f}]$. Именно это обстоятельство и позволяет ввести силовой винт $\{\boldsymbol{f}, \boldsymbol{m}\}$, а также его выражение в клиффордовской форме

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{m}\omega, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{f}$ — скользящий, а $\boldsymbol{m}$ — свободный векторы, $\omega^2 = 0$.

Аналогичным образом, в соответствии с кинематической теоремой Шаля, можно ввести кинематический винт:

$$\Omega = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{v}\omega, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости, $\boldsymbol{v}$ — вектор поступательной скорости.

Как раз работы Пуансо и Шаля были исходными для Болла, который и ввел понятия силового и кинематического винтов.

С начала 90-х годов эти идеи начинает разрабатывать А. П. Котельников, завершивший свои исследования обстоятельной монографией «Винтовое исчисление и некоторые его приложения к геометрии и механике» (1895) [20]. Опираясь на работы Гамильтона, Клиффорда, Болла и некоторых других исследователей, он систематически строит теорию винтов как исчисление. При этом он широко использует новые для того времени теоретико-групповые методы, прежде всего теорию групп Ли.

В третьей главе второй части своей книги он детально развивает теорию винтовых интегралов, основы которой были заложены итальянским механиком В. Черрути (1878). Впрочем, эта теория была развита Котельниковым независимо от Черрути [21]. Распространяя статические и кинематические «винтовые» представления на динамику, Черрути и Котельников вводят также понятие винта количества движения:

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{h}\omega, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{g} = \sum\limits_i \boldsymbol{g}_i$ и $\boldsymbol{h} = \sum\limits_i [\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{g}_i]$, а $\boldsymbol{g}_i = m_i \boldsymbol{v}_i$ — импульс i-й частицы. Используя лагранжев вариант взаимосвязи симметрия — сохранение, Котельников произвольным бесконечно малым кинематическим винтам сопоставляет некоторые интегралы движения, названные им винтовыми. Частными случаями интегралов этого рода являются интегралы импульса и момента импульса. Заметив, что, согласно Лагранжу, законы сохранения импульса и момента импульса связаны соответственно с трансляционной и вращательной симметрией пространства, он пишет: «Но оба этих перемещения (т. е. переносы и вращения.— *В. В.*) представляют лишь частные случаи самого общего, на которое способно твердое тело,— *перемещения винтового*, а потому весьма естественно задаться вопросом, что дает нам принцип Даламбера в соединении с принципом возможных перемещений (т. е. «общая формула динамики» Лагранжа.— *В. В.*), если связи позволяют сообщить системе во всяком ее положении винтовое перемещение. Этот вопрос приводит нас к винтовым интегралам» [22].

Рассмотрим вывод винтовых интегралов на основе использованного Котельниковым лагранжева варианта взаимосвязи. Возьмем в качестве возможных перемещений δx_i, δy_i, δz_i их выражения, отвечающие проекциям бесконечно малого винтового перемещения с «возможным кинематическим винтом» α_1 (p_1, q_1, r_1, a_1, b_1, c_1), где p_1, q_1, r_1 — компоненты угловой скорости Ω; a_1, b_1, c_1 — компоненты скорости поступательного движения v. Тогда:

$$\left.\begin{aligned} \delta x_i &= (a_1 + q_1 z_i - r_1 y_i)\,\varepsilon, \\ \delta y_i &= (b_1 + r_1 x_i - p_1 z_i)\,\varepsilon, \\ \delta z_i &= (c_1 + p_1 y_i - q_1 x_i)\,\varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где ($i = 1, 2, \ldots, n$); ε — бесконечно малый параметр. После подстановки в общую формулу динамики получаем следующее соотношение:

$$\frac{dS_1}{dt} = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + p_1 L + q_1 M + r_1 N, \tag{5}$$

где X, Y, Z, M, L, N — компоненты главного вектора и главного момента системы, т. е. координат силового винта;

$$\begin{aligned} S_1 = a_1 \sum mx' + b_1 \sum my' + c_1 \sum mz' + p_1 \sum m(yz' - zy') + \\ + q_1 \sum m(zx' - xz') + r_1 \sum m(xy' - yx'). \end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом, «если для системы возможен кинематический винт, то производная по времени от момента бивектора количества движения относительно возможного винта равняется моменту силового бивектора относительно того же винта» [23]. Под «моментом бивектора количества движения» и «моментом силового бивектора» Котельников понимает соответственно винт количества движения и силовой винт. И далее: «Если силовой винт будет взаимен с возможным винтом [т. е. правая часть уравнения (5) обращается в 0], то имеет место винтовой интеграл $S_1 = \mathrm{const}$» [24].

Если же винтовая симметрия характеризуется s-параметрической группой винтового движения, то аналогичным образом выводится существование s независимых винтовых интегралов; все остальные винтовые интегралы выражаются как линейные комбинации этих s интегралов. На этой основе раскрывается механический смысл винтовых интегралов, представимых в виде линейных комбинаций шести классических интегралов импульса и момента импульса. Эти результаты были получены как Котельниковым, так и В. Черрути [25]. Специфика винтового интеграла определяется типом соответствующей «группы винтов»; полная классификация этих групп была дана Котельниковым. Интегралы импульса и момента импульса являются частными случаями винтовых интегралов; если параметр винта $P\alpha_1$ бесконечно велик, т. е. угловая скорость бесконечно мала, то винтовая группа вырождается в группу пространственных переносов, а интеграл (6) сводится к интегралу импульса. Если же бесконечно мала скорость поступательного движения, то винтовая группа вырождается в группу вращения, и интеграл (6) переходит в интеграл момента импульса. Это особенно наглядно следует из выражения для S_1, если за ось α_1 принять, например, ось z:

$$S_1 = \sum m(xy' - yx') + P\alpha_1 \sum mz' = \text{const}. \tag{7}$$

Существенным результатом Котельникова было установление соответствия между формализмами винтового произведения и скобок Пуассона. Если в качестве винтового произведения двух винтов $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{p}_1\}$ и $\{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{p}_2\}$ определить винт: $\{[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2], [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{p}_2] + [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{a}_2]\}$, то винтовому произведению двух возможных винтов отвечает винтовой интеграл, определяемый скобками Пуассона, составленными из винтовых интегралов, которые отвечают исходным возможным винтам.

Несмотря на несомненную пользу и важность винтового исчисления для механики, «винтовой» вариант взаимосвязи симметрия — сохранение не давал новых независимых интегралов и оставался в рамках лагранжева варианта взаимосвязи для евклидовой группы. Поэтому он фактически не оказал какого-либо заметного влияния на дальнейшее развитие концепции взаимосвязи, хотя винтовое исчисление само по себе получило некоторое развитие не только в геометрии, но и в механике — в работах Штуди, Мизеса, Бляшке, Зейлигера и др. [26], а в последнее время и в кинематике механизмов[27]. Определенное значение винтовое исчисление и винтовой вариант взаимосвязи имели в связи с введением в механику методов теории групп Ли (за 7—10 лет до работ Пуанкаре и Гамеля) [28]. Историю развития винтового исчисления, а также его современное развитие и приложения можно найти в ряде работ советских и зарубежных авторов [29].

Соотношения Гюйгенса — Шютца

В главе I, рассматривая галилеевский принцип относительности и его блестящее применение Гюйгенсом в теории удара, мы уже упоминали о «концепции Гюйгенса — Шютца» [30]. Исходя из закона сохранения энергии и галилеевского принципа относительности, Гюйгенс построил теорию упругого удара. Тем самым он из инвариантности закона сохранения энергии относительно галилеевских преобразований вывел закон сохранения импульса. То, что в трудах Гюйгенса, по крайней мере неявно, содержалась эта конструкция, впервые было усмотрено Паули [31].

В более отчетливой форме она была восстановлена, по-видимому, независимо от Гюйгенса, через 200 лет после него немецким математиком И. Щютцем (1897). В своей работе, опубликованной в «Göttinger Nachr.» и названной «Принцип абсолютного сохранения энергии» он ясно показывает, что из этого «Принципа», т. е. закона сохранения энергии, рассматриваемого независимо от выбора инерциальной системы отсчета, можно вывести закон сохранения импульса [32]. Столь тесное объединение этих законов сохранения на основе принципа галилеевской симметрии уже в рамках классической механики несомненно предвосхищало релятивистское объединение энергии и импульса и соответствующих законов сохранения. Оно выдвигало на первый план принципы пространственно-временно́й симметрии, которые со времен Ньютона считались сами собой разумеющимися, в практическом отношении бесполезными и поэтому, как правило, игнорировались. В этом смысле работа Шютца является конкретным примером того, что «в классической механике в течение XIX в. созревало», чтобы затем «стать основой для релятивистской механики» [33]. Хотя прямого воздействия на работы Эйнштейна, Лоренца, Пуанкаре эта концепция, по-видимому, и не оказала, она была высоко оценена Минковским, Клейном и некоторыми другими исследователями сразу же после построения основ специальной теории относительности.

Так, в своем знаменитом докладе «Пространство и время» Минковский, дав 4-мерную формулировку релятивистского закона движения частицы и выписав выражение для энергии, замечает: «При этом становится весьма наглядной *зависимость энергии от координатной системы*. Но так как ось t может иметь направление любого времени-подобного вектора, то, с другой стороны, закон сохранения энергии, написанный для каждой возможной координатной системы, содержит уже всю систему уравнений движений. Этот факт при рассмотренном переходе к пределу при $c \to \infty$ сохраняет свое значение и для аксиоматического построения механики Ньютона и был в этом смысле истолкован уже Шютцем» [34].

Клейн во втором томе своих «Лекций», рассматривая эволюцию «якобиевского представления», вслед за Минковским подчеркнул значение «концепции Гюйгенса — Шютца», выражающей один из важных аспектов взаимосвязи симметрия — сохранение. Больше того, он расширил понимание этой концепции, показав, что из галилеевской инвариантности закона сохранения момента импульса следует закон сохранения движения центра тяжести [35].

Рассмотрим теперь конструкцию Шютца и последующее расширение ее Клейном. Во введении Шютц подчеркивает, что в связи с развитием электродинамики, теории теплоты и т. д., появилась потребность в замене ньютоновских аксиом механики принципами более общего типа, пригодными и в физических теориях немеханического типа. В конце XIX в. такого рода принципом был прежде всего принцип сохранения энергии, который успешно применялся, по существу, во всех разделах физики [36]. Вопрос о выводе основ ньютоновской механики из принципов энергетического характера обсуждался на известной конференции в Любеке (1895), на которой, кстати говоря, Оствальд выдвинул представление о массе, как «энергоемкости» [37]. Упомянув о дискуссиях, которые имели место на конференции по этому вопросу, Шютц замечает, что его работа, по-видимому, должна внести в него необходимую ясность. «Задача, которая ставится настоящей работой,— двойная. Во-первых, так сформулировать принцип сохранения энергии, чтобы он включал в себя принцип противодействия («das Gegenwirkungsprinzip», из дальнейшего изложения ясно, что Шютц считает его эквивалентным закону сохранения импульса.— *В. В.*). Во-вторых,— показать, что объединенные таким образом принципы сохранения энергии и противодействия в состоянии дать такое же общее обоснование механики, как и ньютоновские аксиомы» [38].

Основная идея Шютца глубока и нехарактерна для физики XIX в., в которой принципы симметрии играли второстепенную роль. До Шютца многие исследователи «энергетического» направления пытались в духе Оствальда на базе лишь принципа энергии вывести уравнения движения механики, но это, конечно, не могло иметь успеха, так как в рамках механики закон сохранения энергии является лишь одним из первых интегралов этих уравнений. Идея Шютца заключалась в объединении закона сохранения энергии с галилеевским принципом относительности.

В современной физике игнорирование релятивистского (теоретико-инвариантного) подхода совершенно невозможно, так как любые физические утверждения приобретают характер закона лишь в рамках того или иного принципа относительности [39]. Но эта точка зрения была чужда физике XIX в. Поэтому шютцевская формулировка принципа абсолютного сохранения энергии, т. е. закона сохранения, отнесенного ко всему классу инерциальных систем отсчета, или, другими словами, требование его галилеевской симметрии, возводило утверждение о сохранении энергии в закон в подлинном значении этого слова [40]. Сначала на простом примере центрального удара двух абсолютно упругих шаров, исходя из своего принципа «абсолютного сохранения энергии», Шютц выводит закон сохранения импульса. Действительно, принцип Шютца в данном случае можно записать в виде

$$\frac{m_1}{2}(v_1+\alpha)^2+\frac{m_2}{2}(v_2+\alpha)^2=\frac{m_1}{2}(v_3+\alpha)^2+\frac{m_2}{2}(v_4+\alpha)^2, \qquad (8)$$

где α — скорость некоторой инерциальной системы отсчета относительно «неподвижной» системы. Закон сохранения энергии в неподвижной системе записывается в виде

$$\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}=\frac{m_1v_3^2}{2}+\frac{m_2v_4^2}{2}, \qquad (9)$$

где v_1, v_2 — скорости шаров до удара; v_3, v_4 — скорости шаров после удара. Вычитая (9) из (8), Шютц получает: $m_1v_1\alpha + m_2v_2\alpha = m_1v_3\alpha + m_2v_4\alpha$, и, ввиду произвольного выбора α,

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_3 + m_2v_4, \tag{10}$$

т. е. закон сохранения импульса. Аналогичным образом затем Шютц выводит из несколько более общей формулировки своего принципа второй закон механики для материальной точки и системы материальных точек.

Рассмотрим этот вывод лишь для системы. Если U — потенциальная энергия системы, X_i, Y_i, Z_i — внешние силы, действующие на i-ю точку системы, то уравнение сохранения энергии можно записать в виде

$$0 = \frac{dU}{dt} + \sum_{i=1}^{n}\left[X_i\frac{dx_i}{dt} + Y_i\frac{dy_i}{dt} + Z_i\frac{dz_i}{dt}\right] + \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right] \tag{11}$$

Проводя аналогичное рассуждение для подкласса инерциальных систем координат, движущихся вдоль оси x, он немедленно получает уравнение

$$-\sum_i X_i + \frac{d}{dt}\sum_i m_i\frac{dx_i}{dt} = 0, \tag{12}$$

т. е. второй закон Ньютона (в проекции на ось x).

Таким образом, впервые после Гюйгенса было продемонстрировано глубокое эвристическое значение галилеевского принципа относительности, причем оказалось, что динамический закон может быть выведен из менее фундаментальных с классической точки зрения принципов симметрии и сохранения.

Обобщение схемы Гюйгенса — Шютца, произведенное Клейном во втором томе его «Лекций» заключалось в ее распространении на два других закона сохранения: а именно, на законы сохранения момента импульса и движения центра тяжести [41]. Рассмотрев галилеевскую инвариантность закона сохранения момента импульса, Клейн в соответствии с концепцией Гюйгенса — Шютца получает закон сохранения движения центра тяжести. Действительно, закон сохранения x-компоненты момента импульса

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i(y_i\dot{z}_i - z_i\dot{y}_i) = 0 \tag{13}$$

в «абсолютной», шютцевской, формулировке для подкласса инерциальных систем отсчета, движущихся, например, вдоль оси y, записывается так:

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i\,[(y_i+\beta t)\,\dot z_i - z_i\,(\dot y_i+\beta)] = 0. \tag{14}$$

Вычитая уравнение (13) из уравнения (14), получаем

$$\beta\,\frac{d}{dt}\sum_i m_i\,(z_i-\dot z_i t) = 0$$

или, ввиду произвола в выборе β,

$$\sum_i m_i z_i = t\sum_i m_i \dot z_i + B_3. \tag{15}$$

Итак, инвариантность закона сохранения x-компоненты момента импульса относительно y-галилеевских преобразований дает закон сохранения движения центра тяжести для z-координаты. Аналогичным образом получается закон сохранения движения центра тяжести для x- и y-координаты. В связи с изложенной концепцией возникают три следующих вопроса: 1) можно ли на основе схемы Гюйгенса-Шютца получить новые нетривиальные заключения о связи законов сохранения с принципами симметрии? 2) как можно интерпретировать гюйгенс-шютцевские соотношения? 3) как шютцевская схема связана с концепцией взаимосвязи симметрия — сохранение? Естественно, что ответы на эти вопросы, по-видимому, должны быть тесно связаны между собой. По существу, они отсутствуют не только у Шютца, но и у Клейна, хотя в упомянутой книге Клейна имеются некоторые намеки на разрешение этих вопросов.

Ключом к пониманию концепции Гюйгенса—Шютца являются исследования С. Ли и, прежде всего, лиевский вариант взаимосвязи симметрия — сохранение. Если бы в конце XIX в. представление о галилей-ньютоновской группе $\mathcal{G}$, как некоторой единой системе преобразований, действующей на пространственно-временно́м многообразии, было сформировавшимся, то названные вопросы на основе лиевского варианта можно было легко разрешить. В самом деле (здесь мы несколько забегаем вперед, так как взаимосвязь $\mathcal{G}$-симметрия — сохранение была установлена окончательно лишь после создания теории относительности не ранее 1916 г.) [42], следуя идее Гюйгенса — Шютца, надо было бы установить следствия инвариантности каждого из десяти основных законов сохранения относительно каждой же из десяти симметрий галилей-ньютоновской группы $\mathcal{G}$.

Несложные вычисления [43] приводят к следующей картине (обозначения для сохраняющихся величин приняты, в силу лиевского варианта взаимосвязи, совпадающими с производящими функциями, отвечающими генераторам $\mathcal{G}$-группы).

Таблица 1

Сохранение	Симметрия			
	M_β	p_β	p_0	U_β
M_α	$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} M_\gamma$	$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} p_\gamma$	—	$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} U_\gamma$
p_α	$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} p_\gamma$	—	—	—
p_0	—	—	—	p_β
U_α	$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} U_\gamma$	—	p_α	—

Здесь α, $\beta = 1, 2, 3$; M_α — α-я компонента момента импульса (и, соответственно, оператор бесконечно малого вращения вокруг α-оси); p_α — α-я компонента импульса (и соответственно оператор сдвига вдоль α-оси); $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ выбираются так: $|\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}| = 1$ при $\alpha \neq \beta \neq \gamma$; $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 0$ для остальных α, β, γ; p_0 — энергия (и оператор бесконечно малого временнóго смещения); U_α — α-компонента константы закона сохранения движения центра тяжести (и одновременно — производящая функция оператора бесконечно малого галилеевского преобразования вдоль оси α). Прочерк означает, что в данном случае гюйгенс-шютцевская процедура не приводит ни к какому закону сохранения. Сразу же видно, что если M_α, p_α, p_0 и U_α отождествить с генераторами $\mathscr{G}$-группы, то таблица дает полный набор коммутационных соотношений группы. Конечно, это совпадение не случайно, оно является прямым следствием лиевского варианта взаимосвязи, позволяющего дать таблице одну из трех возможных интерпретаций. Первая (концепция Гюйгенса — Шютца): вертикальный ряд M_α, p_α, p_0, U_α — сохраняющиеся величины, горизонтальный — производящие функции соответствующих инфинитезимальных преобразований $\mathscr{G}$-группы (симметрии), таблица — сохраняющиеся величины. Вторая — (на основе теоремы Пуассона — Якоби): оба ряда и таблица — сохраняющиеся величины (величины, стоящие в таблице, получаются посредством взятия соответствующих скобок Пуассона). Третья (на основе коммутационных соотношений группы): оба ряда — генераторы преобразований (симметрии), таблица — коммутаторы. Тем самым получен ответ на поставленные выше три вопроса о смысле концепции Гюйгенса-Шютца и ее отношении к взаимосвязи симметрия — сохранение. Таблица дает ответ на первый вопрос, например, инвариантность x-компоненты момента импульса относительно смещения вдоль оси y влечет за собой сохранение z-компоненты импульса или инвариантность закона сохранения x-компоненты импульса относительно вращения вокруг y-оси дает сохранение z-компоненты импульса и т. д. Объединение трех названных интерпретаций дает ответ на второй вопрос: оказывается, что концепция Гюйгенса — Шютца — это, с одной стороны, способ получения законов сохранения посредством теоремы Пуассона — Якоби, а с другой — полный набор коммутационных соотношений группы симметрии. Оба эти истолкования — непосредственный результат лиевского варианта взаимосвязи симметрия—сохранение, что и дает ответ на третий вопрос. В разделе, посвященном С. Ли, мы уже говорили о том, какую роль теория интегрирования уравнений механики и, соответственно, теория контактных преобразований играли в возникновении и развитии общего понятия непрерывной группы. При этом теорема Пуассона — Якоби в сочетании с лиевским вариантом взаимосвязи непосредственно вела к установлению коммутаторов группы, определяющих ее структуру.

Возвращаясь, однако, к концу XIX в., заметим, что лиевский вариант взаимосвязи был сформулирован Ли в весьма абстрактной форме, и так как четкого представления о $\mathcal{G}$-симметрии как фундаментальной группе механики еще не было, то отсутствие ответов на обсуждаемые вопросы было оправданным. Какую же роль могла сыграть концепция Гюйгенса—Шютца в развитии взаимосвязи симметрия — сохранение, в частности, в установлении взаимосвязи $\mathcal{G}$-симметрия—сохранение? Приведенная выше таблица, к составлению которой никаких затруднений принципиального характера не было, могла привести и к формированию представления о $\mathcal{G}$-группе и установлению для нее взаимосвязи симметрия — сохранение (возможно, на основе расширения лиевского варианта в духе Энгеля) [44].

Однако эти возможности оказались нереализованными в дорелятивистский период по указанным выше причинам. И лишь после построения специальной теории относительности, когда особенно в работах Минковского и Клейна оформилось понятие о $\mathcal{G}$-группе как предельном случае $\mathcal{P}$-группы и затем была установлена взаимосвязь $\mathcal{P}$-симметрия—сохранение, Клейн поставил вопрос об установлении взаимосвязи $\mathcal{G}$-симметрия—сохранение непосредственно на основе лиевского варианта взаимосвязи (1915—1916) [45].

Несмотря на всю глубину и эвристичность, концепция Гюйгенса – Шютца не оказала существенного влияния на развитие взаимосвязи симметрия—сохранение. Правда, она оказала некоторое воздействие на теоретико-групповые аксиоматические исследования классической механики, вызванные успехами специальной теории относительности и работами по ее аксиоматике. Речь идет прежде всего об известных работах Франка, Роте, Игнатовского (1909—1912) [46] и более поздней работе Кнезера (1918), который, отдавая должное работе Шютца, писал: «Шютц был первым, кто простым, но важным замечанием указал на значение галилеевского принципа относительности, т. е. некоторого требования инвариантности, для построения механики» [47]. Сам Кнезер и его ученица Гертруда Вейль, следуя Шютцу, выводили основы механики из $\mathcal{G}$-инвариантного принципа действия [48].

Метод квазикоординат

Приблизительно за год до появления решающих работ Эйнште на и Пуанкаре по теории относительности появились две работ известного механика Гамеля, посвященные разработке нового м тода исследования механических систем, который оказывал особенно эффективным при наличии неголономных связе В рамках этого метода был сформулирован новый вариант взаим связи симметрия—сохранение, в котором требования симметр формулировались на языке теории групп Ли, причем специфиче кие теоретико-групповые конструкции использовались непосре ственно и нетривиально.

Конечно, уже в работах самого Ли по интегрированию уравн ний механики с помощью теории контактных преобразований бы ли заложены основы теоретико-группового подхода к механик Но, как мы отмечали, лиевская теория интегрирования и контак ных преобразований сама была, в известном смысле, исходной дл разработки основных понятий теории непрерывных групп. Специ фические групповые методы были развиты затем уже вне механик И хотя связь теории канонических преобразований с интегриров нием уравнений механики, в центре которой находился лиевски вариант взаимосвязи симметрия—сохранение, была фундаментал ной и несомненно была, по выражению Стройка, «ключом ко все гамильтоновой динамике, как части теории групп» [49], новые мет ды теории групп Ли в работах самого Ли еще не нашли заметно применения к механике. Именно в этом смысле следует понимат следующие высказывания Гамеля: «Каким образом Ли сам думал применении своих идей в механике, я не мог ясно узнать» [50]. Приводя далее замечание Ли, взятое им из предисловия к третье части лиевской «Теории групп преобразований» [51]: «Принципы ме ханики имеют теоретико-групповую природу», Гамель указывае «Однако смысл этой фразы остается загадкой для читателя. Я поч ти уверен, что Ли имел в виду лишь теорию интегрирования урав нений механики, взаимосвязь канонических преобразований с своими контактными преобразованиями и расширение теории гео дезических линий» [52].

Изучение неголономных систем привело Гамеля к разработк метода «квазикоординат», которые он называл «скоростными пара метрами». Следует заметить, что этот метод несколько ранее Гам ля применяли Больцман (1902) и П. В. Воронец (1903) [53]. Правда как указывает Гамель в предисловии к своей статье, исследов ние Больцмана стало ему известно, когда его работа была уже печати, а с вышедшей в 1903 г. в Киеве книгой П. В. Воронца он по-видимому, не был знаком.

Работы Гамеля, Больцмана и П. В. Воронца весьма близки все они связаны с проблемами механики неголономных систем и основе их лежит следующая постановка вопроса: какие уравнени будут эквивалентны лагранжевским уравнениям второго рода, е ли вместо обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ ввести некоторые их линейные комбинации с коэффициентами a_{ij}, зависящими от обобщенных координат:

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_j? \qquad (16)$$ [54]

Но интересующая нас проблема взаимосвязи наиболее отчетливо выражена в работе Гамеля, который формулировал ее на языке теории групп Ли. Вместе с тем, нельзя в этой связи не упомянуть о краткой заметке Пуанкаре в «Comptes Rendus» (1901) [55], которая, вероятно, осталась неизвестной для Гамеля. Именно в этой работе Пуанкаре за три года до Гамеля в очень сжатой форме наметил, по существу говоря, и метод «квазикоординат», и то теоретико-групповое направление в механике, которое затем получило развитие в работах Гамеля.

Характерно, что и Пуанкаре пришел к этим методам из конкретных задач неголономного типа: «Занимаясь вращательным движением твердого тела, пустота которого наполнена жидкостью, я привел общие уравнения механики к следующей форме, которую считаю новой и интересной» [56]. Внимательное рассмотрение этой работы показывает, что формализм, использованный Пуанкаре, принципиально эквивалентен гамелевскому. Полученная им «новая форма уравнений механики» есть не что иное, как уравнения Лагранжа — Эйлера, найденные затем Гамелем. Но Пуанкаре не сформулировал в явном виде соответствующий вариант взаимосвязи симметрия — сохранение.

Рассмотрим прежде всего ту часть работы Гамеля, где он устанавливает квазикоординатный вариант взаимосвязи. Это не означает недооценку нами пионерской работы Пуанкаре, которая содержала одно из первых нетривиальных применений теории Ли в механике и основы «квазикоординатного» метода [57].

Итак, если вместо обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ ввести в рассмотрение упомянутые линейные формы этих $\dot{q}_i$ с коэффициентами, зависящими от обобщенных координат q_i:

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_j,$$

то решение большого числа задач механики, особенно для систем с неголономными связями, вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_j = 0 \qquad (17)$$

существенно упрощается [в случае неголономных связей вида (17) уравнения связей принимают форму $\omega_i = 0$]. Величины ω_i называются квазискоростями, а если (16) переписать в форме дифференциалов:

$$d\vartheta_i = \sum_j a_{ij} dq_j, \tag{18}$$

то величины $d\vartheta_i$ могут быть названы дифференциалами квазикоординат. Так как соотношения (16)—(18), вообще говоря, неинтегрируемы, то величины ϑ_i, т. е. квазикоординаты, не существуют как функции обобщенных координат. Поэтому сам термин «квазикоордината» имеет условный смысл. Если же указанные соотношения интегрируемы, то квазикоординатное представление вырождается и соотношения (16) означают просто переход к новым обобщенным координатам. Как известно, для обобщенных координат q_i операторы d и δ перестановочны [58], т. е.

$$d\delta q_i - \delta d q_i = 0. \tag{19}$$

Для квазикоординат ϑ_i эта разность оказывается отличной от 0, т. е.:

$$d\delta\vartheta_\rho - \delta d\vartheta_\rho = \sum_{\mu,\ \nu} \beta_{\mu\nu\rho} \delta\vartheta_\mu d\vartheta_\nu. \tag{20}$$

Далее, рассматривая переход от квазикоординат к обобщенным координатам

$$\delta q_\lambda = \sum_\rho \xi_{\rho\lambda} \delta\vartheta_\rho \tag{21}$$

[соотношение, обратное (18)] как инфинитезимальное преобразование в смысле теории групп Ли, Гамель показывает, что преобразования (21) порождают группу Ли, структурные константы которой совпадают с коэффициентами $\beta_{\mu\nu\rho}$ в соотношении (20). Таким образом, в конфигурационном пространстве квазикоординат естественно возникает группа Ли. Исследуя центральное уравнение Лагранжа [59] в квазикоординатной записи

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_\lambda I_\lambda \delta\vartheta_\lambda\right) = \sum_\lambda Q_\lambda \delta\vartheta_\lambda + \delta T, \tag{22}$$

где T — кинетическая энергия; $I_\lambda = dT/d\omega_\lambda$; Q_λ — обобщенные силы, Гамель после несложных преобразований приходит к лагранж-эйлеровским уравнениям, являющимся квазикоординатным аналогом уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{dI_\lambda}{dt} + \left[\sum_{\mu,\ \rho} \beta_{\lambda\mu\rho} \omega_\mu I_\rho - \frac{\partial T}{\partial\vartheta_\lambda}\right] = Q_\lambda. \tag{23}$$

Далее он формулирует квазикоординатный вариант взаимосвязи.

Если кинетическая энергия системы T допускает ν инфинитезимальных преобразований вида

$$X_\rho f = \sum_\lambda \xi_{\rho\lambda} \frac{\partial f}{\partial q_\lambda} \tag{24}$$

(т. е. если T инвариантна относительно ν-параметрической группы Ли, заданной инфинитезимальными операторами $\xi_{\rho\lambda}$), то подходящим выбором $\xi_{\rho\lambda}$ можно всегда перейти к таким квазискоростям ω_ρ, что лагранж-эйлеровские уравнения примут вид

$$\frac{dI_\rho}{dt} = Q_\rho. \tag{25}$$

Тогда, если все $Q_\rho = 0$, то

$$\frac{dI_\rho}{dt} = 0, \tag{26}$$

откуда вытекает существование ν первых интегралов:

$$I_\rho = \frac{\partial T}{\partial \omega_\rho} = \text{const}. \tag{27}$$

В самом деле, если T инвариантна относительно операторов X_ρ из соотношений (24), то $X_\rho T = 0$, что эквивалентно соотношению

$$\sum_\sigma \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} \xi_{\rho\sigma} \delta\vartheta_\rho + \sum_\sigma \frac{\partial T}{\partial \omega_\sigma} \delta_\rho \omega_\sigma = 0. \tag{28}$$

Далее, согласно теории групп Ли, следует положить $\delta\vartheta_\rho = \text{const}$; тогда, используя (20), получаем

$$\delta_\rho \omega_\sigma = -\sum_{\mu\rho} \beta_{\rho\mu\sigma} \omega_\mu \delta\vartheta_\rho. \tag{29}$$

Подставляя (29) в (28), получим

$$\sum_\sigma \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} \xi_{\rho\sigma} - \sum_{\sigma\mu} \frac{\partial T}{\partial \omega_\sigma} \beta_{\rho\mu\sigma} \omega_\mu = 0, \tag{30}$$

что приводит к исчезновению члена, заключенного в квадратные скобки в соотношении (28), и лагранж-эйлеровские уравнения (23) переходят в «импульсные уравнения» (26) [60]. Таким образом, устанавливается взаимосвязь между однопараметрическими группами Ли, действующими в квазикоординатном пространстве и оставляющими инвариантной кинетическую энергию системы, и законами сохранения обобщенных квазиимпульсов, т. е. величин $I_\lambda = \dfrac{\partial T}{\partial \omega_\lambda}$. Согласно Гамелю, квазискорости, которые соответствуют сохраняющимся квазиимпульсам, могут быть названы циклическими, что дает определенную аналогию с циклическим вариантом взаимосвязи.

Теперь сделаем несколько замечаний об упомянутой выше работе Пуанкаре [61]. Если Гамель показывает, что группа Ли с ненулевыми структурными константами естественным образом связана с неперестановочностью символов d и δ для квазикоординат, то Пуанкаре вводит такую группу формально. В его рассуждениях тем не менее также фигурируют квазикоординаты, точнее квазискорости — в обозначениях Пуанкаре η_i. Пуанкаревский аналог лагранж-эйлеровских уравнений выводится непосредственно из вариационного принципа путем перехода к «квазискоростным» переменным. Если T — кинетическая энергия, U — потенциальная энергия, c_{ski} — структурные константы группы и переход к квазикоординатному представлению позволяет записать

$$\sum_i \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{\partial U}{\partial x_i}\right)\delta x_i = \sum \Omega_j \omega_j, \tag{31}$$

где ω_j — эквиваленты гамелевских $\delta\vartheta_j$; Ω_j — «квазиобобщенные силы», то аналог гамелевских уравнений (23) будет, согласно Пуанкаре, иметь вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_s} = \sum_{i,\,k} c_{ski}\frac{\partial T}{\partial \eta_i}\eta_k + \Omega_s. \tag{32}$$

Выводом этих уравнений и заканчивается статья Пуанкаре.

Возвращаясь к варианту взаимосвязи, сформулированному Гамелем, подчеркнем следующее. Во-первых, наряду с работой Пуанкаре, исследование Гамеля явилось новым значительным шагом вперед в развитии теоретико-групповых методов в механике, причем в гамелевском аналоге взаимосвязи требования симметрии впервые явно выражены в терминах теории групп Ли, необходимость использования которой была связана с неперестановочностью символов d и δ в пространстве квазикоординат. Во-вторых, по своей структуре квазикоординатный вариант близок к циклическому, но отличается от него более глубокой и явной формулировкой требований симметрии. В-третьих, он специально приспособлен к неголономным задачам и может быть назван также «неголономным» аналогом взаимосвязи.

Для физики (теория поля, квантовая механика), где неголономные связи играют второстепенную роль, квазикоординатный вариант взаимосвязи поэтому не представлял большого интереса и не оказал заметного влияния на развитие рассматриваемой концепции в релятивистский период. Впрочем, ссылка на Гамеля в связи с обсуждаемой закономерностью имеется в работе Э. Нетер, которая, подчеркнув, что ее теоремы основываются «на объединении методов формального вариационного исчисления с методами теории групп Ли», замечает, что «для специальных групп и вариациных задач это объединение не ново: я упомяну Гамеля и Герглотца, занимавшихся специальными конечными группами»[62].

Квазикоординатный вариант взаимосвязи, установленный Гамелем, несмотря на то, что о нем (как мы увидим) не упоминают ни Герглотц, ни Энгель, ни Клейн[63], все-таки сыграл определенную роль в генезисе нетеровских теорем как один из частных случаев, предшествующих их установлению.

Теоремы Брунса и Пуанкаре

Успехи аналитической механики в конце XIX в. были тесно связаны с весьма интенсивным развитием в этот период небесной механики, которое стало возможным после выдающихся исследований Гамильтона и Якоби. В этом отношении особенно показательны исследования Ляпунова, Пуанкаре, Леви-Чивиты и др.[64] В частности, весьма существенными результатами этого рода, значение которых выходит за рамки небесной механики, были знаменитые теоремы Брунса и Пуанкаре. Сначала обе эти теоремы были доказаны лишь для задачи трех тел небесной механики (теорема Брунса — в 1887 г., теорема Пуанкаре — в 1889 г.)[65]. Пенлеве распространил доказательство этих теорем на задачу n тел (Брунса — в 1898 г., Пуанкаре — в 1900 г.)[66]. Сформулируем обе теоремы и обсудим их значение для развития рассматриваемой взаимосвязи.

Десять законов сохранения механики, имеющих место для проблем трех или n тел, обычно называются *«классическими»* интегралами. Нетрудно заметить, что все они обладают простой математической структурой — все десять классических интегралов являются *алгебраическими* функциями q_i, p_i и t[67]. Было сделано немало попыток продвинуться в этом направлении дальше и найти, помимо десяти классических, и другие алгебраические интегралы, независимые от этих десяти. Замечательный результат Брунса гласил, что это невозможно, т. е. *единственными независимыми алгебраическими интегралами задачи трех тел являются десять классических интегралов*[68].

Пуанкаре существенно усилил это утверждение, доказав сначала для ограниченной задачи трех тел (1889), а затем и для общей задачи трех тел (1892) следующую теорему: *единственными однозначными аналитическими интегралами задачи трех тел являются десять классических интегралов*[69]. Как заметил известный советский специалист по небесной механике Г. Н. Дубошин, «это доказательство (т. е. теоремы Пуанкаре.— *В. В.*), вместе с доказательством Брунса несуществования алгебраических интегралов, положило конец попыткам нахождения новых интегралов и направило внимание ученых на другие области»[70].

Мы не имеем возможности в настоящей работе обсуждать подробно применение этих теорем в небесной механике, несколько противоречивые оценки их важности и некоторые тонкости, связанные с условиями их применимости [71].

В последнее десятилетие теорема Пуанкаре нашла неожиданное применение в работах Бриллюэна и Борна, посвященных критике лапласовского детерминизма в классической механике [72]. Бриллюэн называет теорему Пуанкаре даже «великой», придавая ей ключевое значение для понимания «фундаментальной неопределенности», содержащейся и в классической механике. Не рассматривая подробно эти замечательные исследования, заметим лишь, что суть дела заключается в следующем: так как сколь угодно точная фиксация начальных условий невозможна, а, согласно теореме Пуанкаре, неклассические интегралы, будучи неаналитическими функциями, могут изменяться скачкообразно при достаточно малых изменениях этих условий движения, то в общем случае решения уравнений движения могут оказаться неустойчивыми, а поведение системы непредсказуемым (по крайней мере, в смысле лапласовского детерминизма) [73].

Таким образом, эти теоремы, особенно теорема Пуанкаре, выделяют из $(2n - 1)$ интегралов системы, где n — число степеней свободы, 10 исключительных, обладающих «хорошими» свойствами и, так сказать, организующих порядок в движении механических систем. Возникает естественный вопрос, случайным ли является совпадение этих десяти «хороших» интегралов с теми, которые являются следствием пространственно-временны́х симметрий?

Пуанкаре в своей популярной книге «Наука и гипотеза» (1902) писал, что все $(2n - 1)$ интегралов системы в известном смысле равноправны: «трудно было бы даже сказать, которому из этих интегралов должно принадлежать имя Энергии (и, добавим, «имена» остальных классических интегралов.— *В. В.*)» [74]. «Почему, — спрашивает Бриллюэн,— Пуанкаре не захотел упомянуть об этой великой теореме (т. е. теореме Пуанкаре, явно выделяющей классические интегралы.— *В. В.*) в своей последней книге? Причина, должно быть, в том, что в «Науке и гипотезе» он имел в виду рассмотреть значительно более общую задачу и поведение любой произвольной *физической* системы (но его теорема была верна лишь для классической механики —*В. В.*)» [75]. Во всяком случае, благодаря исключительной роли классических интегралов в механике, теоремы Брунса и Пуанкаре могли повлиять на выработку понимания важности проблемы взаимосвязи симметрия — сохранение и установление этой взаимосвязи для $\mathcal{G}$-группы.

Глава IV

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

> «В то время как важность законов сохранения была полностью понята, их тесная связь с законами симметрии не была *вполне* установлена вплоть до начала XX века».
>
> Ч. Янг[1]

Как мы видели, дорелятивистский период развития взаимосвязи симметрия — сохранение был, по существу говоря, механическим. Это объяснялось тем, что механика в XVIII и XIX вв. была единственно возможной теоретической основой физики: именно она формировала наиболее строгие представления о пространстве и времени, движении, причинности и т. д.

Но возникновение термодинамики и теории электромагнитного поля во второй половине XIX в. неизбежно приводило к выходу за рамки механики. Преодоление трудностей электродинамики движущихся сред, связанных с механическими представлениями, привело к построению специальной теории относительности и, таким образом, к утверждению новой более широкой фундаментальной группы физики.

Уже классическая электродинамика выявила существенно локальный характер основных законов сохранения, которые выводились как первые интегралы в результате непосредственного интегрирования уравнений Максвелла, без явного использования их связи с принципами пространственно-временной симметрии. Теория относительности распространила это свойство (локальность) на законы сохранения всех $\mathscr{P}$-инвариантных теорий. Одновременно она привела к их более тесному объединению. Широкое использование вариационных принципов в электродинамике и, особенно, в теории относительности могло привести к установлению взаимосвязи $\mathscr{P}$-симметрия — сохранение уже в 1905—1907 гг. Этого, однако, не произошло, так как законы сохранения в большинстве случаев были либо уже известны, либо могли быть сформулированы без применения принципов симметрии. Принципиального же значения самой взаимосвязи еще не придавалось, и основные интересы физиков были сосредоточены на релятивистской перестройке всей физики.

Именно на этом пути и произошло впервые установление взаимосвязи $\mathscr{P}$-симметрия — сохранение, что было сделано Г. Герглотцем (1911) при разработке релятивистской механики сплошных сред. Понимание важности и универсальности этой взаимосвязи было достигнуто несколько позже, главным образом благодаря Ф. Клейну, обратившему внимание на работу Герглотца и поставившему вопрос об установлении взаимосвязи $\mathcal{G}$-симметрия — сохранение, который был решен в 1916 г. Ф. Энгелем.

Таким образом, открытие специальной теории относительности в развитии взаимосвязи симметрия — сохранение имело принципиальное значение: оно не только привело к установлению взаимосвязи $\mathcal{P}$-симметрия — сохранение и «замыканию» взаимосвязи $\mathcal{G}$-симметрия — сохранение, но и положило начало рассмотрению взаимосвязи как самостоятельной и универсальной закономерности физических теорий.

В этой главе мы сосредоточим основное внимание на развитии взаимосвязи симметрия — сохранение со времени открытия специальной теории относительности до 1916 г., когда произошел указанный перелом в оценке значения рассматриваемой взаимосвязи.

Дорелятивистская электродинамика

> «Толчком и истинным поводом к принятию группы $\mathcal{G}_c$ (т. е. $\mathcal{P}$-группы.— *В. В.*) послужило то обстоятельство, что дифференциальное уравнение для распространения световых волн в пустоте обладает этой группой $\mathcal{G}_c$».
>
> Г. Минковск

В ньютоновских «Началах» были заложены основы пространственно-временны́х представлений всей классической физики вплоть до возникновения специальной теории относительности. Поэтому, хотя электродинамика и не вмещалась в схему механики, ее пространственно-временны́е представления, по существу говоря, оставались ньютоновскими, т. е. фундаментальной группой электродинамики продолжала оставаться $\mathcal{G}$-группа. Это прежде всего выражалось в многочисленных попытках построения электродинамики как механики некоторого «эфира». Но все эти механические модели были весьма искусственны и обладали противоречивыми свойствами, а главное — ни с одной из них не удавалось согласовать результаты экспериментов по оптике и электродинамике движущихся сред [3].

Уравнения Максвелла сами по себе относились лишь к неподвижным средам и не объясняли результаты таких опытов, как опыты Роуланда, Рентгена, Физо, Майкельсона и др. Наиболее значительную попытку построения $\mathcal{G}$-инвариантной электродинамики движущихся сред предпринял Герц (1890) [4]. В отличие от большинства современников, он не разработал каких-либо механических конструкций эфира. «Сам характер постановки вопроса у Герца очень интересен и предвосхищает его постановку в теории относительности» [5]. Правда, Герц заранее отказывается от рассмотрения оптических явлений, хотя сам был одним из основоположников электромагнитной теории света. Главное предположение его заключалось, по существу, в полном увлечении эфира движущимися телами, при этом для неподвижной среды искомые уравнения (уравнения Герца) должны были переходить в уравнения Максвелла. Гипотеза полного увлечения естественно приводила к $\mathscr{G}$-инвариантности, и «хотя сами они (т. е. Максвелл и Герц. — *В. В.*) этого не говорят, несомненно сделали это (т. е. приняли гипотезу полного увлечения — *В. В.*) с желанием удовлетворить принципу относительности механики»[6]. Благодаря этой «гипотезе увлечения» уравнения Герца на самом деле даже более, чем $\mathscr{G}$-инвариантны; они инвариантны, очевидно, относительно любого ускоренного движения системы отсчета как твердого тела.

Вместе с тем теория Герца явно противоречила ряду экспериментов не только оптических, но и электродинамических. Таким образом, и герцовское $\mathscr{G}$-инвариантное обобщение электродинамики оказалось неверным[7]. Впоследствии Ф. Франк показал, что требования $\mathscr{G}$-инвариантности уравнений электродинамики движущихся сред и их перехода в максвелловские для покоящихся сред необходимо приводят к уравнениям Герца[8]. Итак, попытки построения $\mathscr{G}$-инвариантной электродинамики оказались безуспешными не только в смысле механического («эфирного») обоснования уравнений Максвелла, логическая неудовлетворительность которого особенно ясно была подчеркнута А. Пуанкаре[9], но и в плане $\mathscr{G}$-инвариантного обобщения электродинамики на движущиеся среды. Все это подготавливало почву для отказа от $\mathscr{G}$-симметрии в электродинамике.

История установления $\mathscr{P}$-симметрии в электродинамике, связанная с работами Фохта, Лоренца, Пуанкаре, Лармора и других, хорошо известна[10]. Поэтому мы ограничимся несколькими замечаниями. Первым явным намеком на существование новой симметрии была работа Фохта (1887)[11], показавшего, что принцип Доплера с математической точки зрения может рассматриваться как следствие такого преобразования пространственно-временны́х координат, которое оставляет инвариантным волновое уравнение для упругой несжимаемой среды. Особенностью преобразования Фохта была линейная зависимость времени от пространственных координат, которая лишала его абсолютного характера, присущего временно́й координате в схеме $\mathscr{G}$-симметрии. Впрочем, работа Фохта осталась незамеченной, и началом той линии, которая привела к преобразованиям Лоренца, явились работы Лоренца по электронной теории и электродинамике движущихся сред, основанные на концепции неподвижного («неувлекаемого») эфира.

Лоренц, пытаясь построить более реалистическую электродинамику движущихся сред, был вынужден отказаться от принципа относительности, но сохранил требование приближенной относительности, заключающееся в том, чтобы равномерное движение тел не сказывалось на электромагнитных и оптических эффектах с точностью лишь до первого порядка v/c. Одновременно он разрабатывает электронную теорию и на ее основе, используя «приближенный» принцип относительности, получает уравнения электродинамики движущихся сред (1895) [12]. Основные электродинамические и оптические опыты первого порядка получали в этой теории естественное объяснение. Что же касается опыта Майкельсона и других опытов второго порядка, то положение отчасти спасала «гипотеза сокращения», высказанная первоначально Фитцджеральдом (1891) и независимо от него — Лоренцом (1892) [13], но лишь отчасти, так как эта гипотеза не только была очень искусственной, но и встречалась с рядом трудностей, а главное — противоречила принципу относительности, выделяя систему отсчета, связанную с «эфиром».

Пожалуй, Пуанкаре лучше других современников понимал недостатки теории Лоренца и необходимость единого теоретического принципа, объясняющего отсутствие эффектов как первого, так и второго порядков (работы и доклады Пуанкаре 1895, 1900, 1901 гг.) [14]. Именно в принципиальной невозможности зарегистрировать абсолютное равномерное движение, т. е. в «постулате относительности» видел он выход. Однако в этот период (1895—1900) Пуанкаре ограничивался главным образом критикой идей Лоренца, и правильная симметрия электродинамики оставалась скрытой.

Идея «сокращения» вытекала также как следствие из теории, развитой в 1900 г. Лармором, который, исходя из формального требования инвариантности уравнений Максвелла, впервые получил преобразования Лоренца [15]. Итак, к концу XIX в. и началу XX в. выяснилась невозможность построения $\mathcal{G}$-инвариантной электродинамики и появились признаки существования новой, более глубокой симметрии, истинный смысл которой выяснился лишь в фундаментальных работах Лоренца, Пуанкаре и Эйнштейна (1904—1905).

Во второй половине XIX в. было признано общефизическое значение закона сохранения энергии. Корректная форма этого закона в теории электромагнитного поля была получена Пойнтингом (1884). Впрочем, еще раньше (1874) основные задачи, связанные с его формулировкой, были решены Умовым, который впервые в общем виде развил учение о локализации и движении энергии [16]. Эксперименты Лебедева по световому давлению неизбежно приводили к мысли о существовании понятия импульса для электромагнитного поля, на необходимость введения которого впервые указал Пуанкаре (1900). Несколько позже (1903) Абрагам показал, что это естественно приводит к закону сохранения импульса полной электромеханической системы, если импульс поля определять по формуле

$$p = \int \frac{s}{c^2}\, dv,$$

где $\boldsymbol{s}$ — вектор Умова—Пойнтинга. Аналогично можно было ввести и понятие момента импульса и соответствующий закон сохранения

$$M = \int_v [\boldsymbol{r}, \ \boldsymbol{p}]\, dv,$$

где $\boldsymbol{p}$ — плотность импульса [17].

Что же касается закона сохранения движения центра тяжести, то ясно, что после введения импульса поля и соответствующего закона сохранения первый также мог быть естественно введен. Однако в случае электромеханических систем это едва ли могло быть сделано до открытия соотношения $E = mc^2$, которое, как показал впоследствии Эйнштейн (1906), является необходимым и достаточным условием существования закона сохранения движения центра тяжести для таких систем [18]. Существенно отметить, что законы сохранения получались в результате непосредственного интегрирования уравнений электродинамики (иногда — при помощи аналогии с механикой). Таким образом, основные законы электродинамики, включая закон сохранения заряда, в общем были известны к началу XX в. Существенной особенностью этих законов была возможность их локальной формулировки, связанной с концепцией поля. Связь законов сохранения с принципами пространственно-временной симметрии оставалась скрытой.

Обнаружение законов сохранения, аналогичных соответствующим законам механики, а также выяснение возможности вывода уравнений Максвелла из вариационного принципа свидетельствовали о принципиальной общности структур механики и электродинамики. А так как законы сохранения импульса и момента импульса в механике связывались с евклидовой группой, которая в силу векторной формы уравнений Максвелла была также и группой симметрии электродинамики, то и соответствующие аналоги этих законов в электродинамике можно было естественно ассоциировать с этой симметрией. Это относилось и к закону сохранения энергии, связь которого с однородностью времени и в механике оставалась несколько завуалированной. Итак, взаимосвязь $\mathscr{M}$-симметрия — сохранение, где $\mathscr{M}$ — евклидова группа, и $\mathscr{T}_0$-симметрия — сохранение, где $\mathscr{T}_0$ — группа временны́х переносов, распространялись естественным образом, хотя и неявно, на электродинамику.

Несколько замечаний о вариационных принципах электродинамики [19]. Уже Максвелл использовал лагранжевы уравнения для некоторых частных случаев электродинамики. Непосредственный вывод уравнений поля из вариационного принципа без каких-либо дополнительных предположений о механической структуре «эфира», по-видимому, впервые был дан Лармором, хотя еще раньше и Гельмгольц, и Больцман применяли его к различным вопросам электродинамики. Важный результат был получен Шварцшильдом (1903), который сформулировал принцип действия в такой форме, что из него следовали не только уравнения поля, но и уравнения движения зарядов. Сюда же относятся и работы Лоренца (1903). Причем, если вначале применимость вариационных методов, и вообще — методов аналитической механики, к электродинамике многие, в частности Гельмгольц, рассматривали как указание на возможность ее механического обоснования, то впоследствии благодаря Больцману, Герцу и особенно Пуанкаре и Планку эта точка зрения была отвергнута [20].

Вместе с тем общность математических структур механики и электродинамики нельзя было отрицать (выводимость уравнений из вариационного принципа, евклидова симметрия и наличие аналогичных законов сохранения). И это, по крайней мере в 1900—1905 гг., могло, конечно, привести к явному установлению взаимосвязи $\mathscr{M}$- и $\mathscr{T}_0$-симметрия — сохранение также и в электродинамике. Но в математических структурах механики и электродинамики обнаруживалось и существенное различие: невозможность построения $\mathscr{G}$-инвариантной электродинамики и наличие достаточно основательных доводов в пользу существования новой более глубокой симметрии, которой не было в механике. Таким образом, взаимосвязь симметрия — сохранение в электродинамике до окончательного выяснения ее истинной симметрии не могла быть установлена [21].

Группы Пуанкаре ($\mathscr{P}$) и Галилея — Ньютона ($\mathscr{G}$)

> «То, что современные физики называют теорией относительности, есть теория инвариантов четырехмерной области пространства — времени x, y, z, t („мир" Минковского) по отношению к некоторой определенной группе коллинеаций, именно „лоренцовой группе"».
>
> Ф. Клейн [22]

> «Если вникнуть в суть дела, то выражение „теория относительности" следует понимать с учетом положенной в основу группы...».
>
> Ф. Клейн [23]

Истории открытия специальной теории относительности посвящено большое число работ [24]. И хотя эти работы часто взаимно противоречивы и некоторые проблемы истории релятивизма до сих пор остаются нерешенными [25], мы здесь не будем рассматривать сколько-нибудь подробно генезис теории относительности. Ограничимся лишь несколькими замечаниями, перейдя затем к нашей основной теме — развитию взаимосвязи симметрия — сохранение в релятивистский период. Решающий прогресс в генезисе релятивизма был достигнут в 1904 —1905 гг., когда Лоренц, Пуанкаре и Эйнштейн заложили основы специальной теории относительности. Вклад каждого из названных исследователей действительно велик и хорошо известен (несмотря на существенные расхождения в оценке значения их работ) [26]. Однако работа Эйнштейна [27] выделяется своей оригинальностью, глубоким физическим подходом и классической законченностью.

Эйнштейн, в отличие от Лоренца и Пуанкаре, вскрыл физическую сущность новой симметрии, обосновав тем самым ее фундаментальный характер. Работа Пуанкаре [28], уступая эйнштейновской в глубине и «физичности», чрезвычайно интересна и значительна в математическом отношении. По сравнению с известной Пуанкаре работой Лоренца (1904) [29] она представляла и физический прогресс. Прежде всего принцип относительности был высказан им в весьма категорической форме, хотя некоторые сомнения в его справедливости, по-видимому, у Пуанкаре оставались; далее, была достигнута полная инвариантность уравнений электронной теории благодаря открытию правильного закона преобразования для плотностей заряда и тока. Пуанкаре ввел и широко использовал теоретико-групповой язык, а также подчеркнул основную роль инвариантов преобразований Лоренца, групповые свойства которых также обнаружил впервые именно он. Несомненно, что он по праву может считаться главным предшественником Минковского (понимание того, что группа Пуанкаре может рассматриваться как группа движений 4-мерного псевдоевклидова пространства — времени, систематическое вычисление и применение инвариантов группы и т. д.)

Для нас особенно существенно то, что Пуанкаре вплотную подошел к установлению взаимосвязи $\mathcal{P}$-симметрия — сохранение, так как он сформулировал $\mathcal{P}$-инвариантный вариационный принцип для электродинамики (по существу, в 4-мерной форме) и установил Ли-групповой характер преобразований Лоренца. Блестяще владея, кроме того, методами теории групп Ли и наиболее современными методами аналитической механики, Пуанкаре на основе доказанной им $\mathcal{P}$-инвариантности электродинамического действия имел все необходимое, чтобы установить взаимосвязь $\mathcal{P}$-симметрия — сохранение. Этого не произошло, по-видимому, по той причине, что взаимосвязи симметрия — сохранение в этот период (1900—1910) еще не приписывалась существенная роль в структуре физической теории, и внимание физиков было главным образом приковано к разрешению множества новых, более актуальных и конкретных задач, возникших с открытием новой симметрии.

Открытие специальной теории относительности создало необходимые предпосылки для выдвижения на первый план теоретико-инвариантного подхода в физике, при котором наиболее фундаментальную роль играют положенные в основу физической теории те или иные принципы инвариантности. Иначе говоря, «Эрлангенская программа» Ф. Клейна [30], составившая эпоху в развитии геометрии, с открытием теории относительности неизбежно вводилась и в физику. Точка над «и» была поставлена работами Г. Минковского и Ф. Клейна [31], в которых классическая и релятивистская физика были сформулированы в духе «Эрлангенской программы» как теории инвариантов соответственно групп Пуанкаре и Галилея — Ньютона, действующих на пространственно-временном многообразии. Не рассматривая здесь детально историю введения «Эрлангенской программы» в физику [32], приведем только некоторые высказывания Минковского и Клейна, иллюстрирующие сказанное, и перечислим основные результаты, полученные ими на этом пути

Минковский. «Речь идет о том, что, выражаясь возможно короче, ... мир в пространстве и времени в известном смысле есть 4-мерное неевклидово (мы бы сейчас сказали — псевдоевклидово. — *В. В.*) многообразие» [33]. «Я хочу здесь эту симметрию (по существу говоря, $\mathcal{P}$-симметрию. — *В. В.*) ввести с самого начала, чего названными авторами (т. е. Эйнштейном, Лоренцом, Планком. — *В. В.*), даже Пуанкаре сделано не было» [34].

Ф. Клейн. «Таким образом, старая и новая механика (т. е. классическая и релятивистская физика. — *В. В.*) одинаково введены в схему проективного мероопределения для переменных x, y, z, t (иначе говоря, в рамки «эрлангенской» концепции. — *В. В.*)» [35].

«... Классическая механика, как и новая механика, является теорией относительности по отношению к некоторой группе с десятью параметрами (т. е. галилей-ньютоновской группе. — *В. В*)» [36].

Итак, Минковский в своих работах 1907—1908 гг. и Ф. Клейн в докладе 1910 г. развили теоретико-инвариантный, «эрлангенский» подход к классической и релятивистской физике; выяснили геометрический смысл, структуру и взаимное отношение соответствующих фундаментальных групп: Пуанкаре и Галилея — Ньютона. Благодаря этому были не только введены тензоры электромагнитного поля и энергии-импульса, развиты релятивистская электродинамика движущихся сред и 4-мерная формулировка релятивистской механики и т. д. (Минковский), но в значительной мере был намечен также путь дальнейшего расширения $\mathcal{P}$-группы (Ф. Клейн) [37]. Если Лоренц впервые обнаружил новую симметрию, Пуанкаре привлек теоретико-групповой аппарат, а Эйнштейн дал глубокое физическое обоснование новой симметрии и показал тем самым ее универсальное значение, то Минковский (и отчасти Клейн) впервые в истории физики реализовали метод «Эрлангенской программы», что имело далеко идущие последствия в физике XX в. [38] К 1910 г. $\mathcal{P}$- и $\mathcal{G}$-группы были тщательно изучены и включены в схему «эрлангенской» концепции. Структура и свойства связности этих групп были, таким образом, выяснены [39].

Структура групп $\mathcal{P}$ и $\mathcal{G}$ может быть описана следующим образом: $\mathcal{P} = \mathcal{L}\cdot\mathcal{T}$, $\mathcal{G} = (\mathcal{R}\cdot\mathcal{T}_0)\cdot\mathcal{H}$, где $\mathcal{L}$ — однородная группа Лоренца; $\mathcal{T}$ — группа пространственно-временны́х переносов; $\mathcal{R}$ — 3-параметрическая группа вращений; $\mathcal{T}_0$ — группа временны́х переносов; $\mathcal{H} = \mathcal{T}_\alpha \times \mathcal{U}$; $\mathcal{T}_\alpha$ — группа пространственных переносов; $\mathscr{U}$ — группа «галилеевских» преобразований; $\times$ — знак прямого произведения групп; — знак полупрямого произведения групп, связывающего нормальный делитель группы с ее простой подгруппой (нормальный делитель $\mathscr{P}$-группы — $\mathscr{T}$-группа, $\mathscr{T}$ простая, нормальный делитель $\mathscr{G}$-группы — $\mathscr{H}$-группа, но $\mathscr{G}/\mathscr{H} = \mathscr{R} \cdot \mathscr{T}_0$ — еще не простая, простой является лишь $\mathscr{G}/\mathscr{H}/\mathscr{T}_0 = \mathscr{R}$-группа)[40]. Более детальное описание $\mathscr{P}$- и $\mathscr{G}$-групп увело бы нас в сторону, да в этом и нет необходимости, поскольку имеется соответствующая обширная и доступная литература[41].

Что касается законов сохранения в релятивистской физике, то все они были получены сразу же после открытия теории относительности либо путем непосредственного интегрирования соответствующих релятивистски-инвариантных уравнений движения или поля, либо при помощи аналогий с нерелятивистской механикой. Явная связь их с $\mathscr{P}$-симметрией оставалась скрытой, хотя, конечно, все необходимое для установления взаимосвязи $\mathscr{P}$-симметрия — сохранение было подготовлено.

Специальная теория относительности существенно изменила и углубила понимание законов сохранения в физике. Не входя в детальное описание этого процесса[42], мы лишь перечислим наиболее важные результаты: установление локального характера законов сохранения всякой $\mathscr{P}$-инвариантной теории; установление тензорной природы сохраняющихся величин; в частности, слияние законов сохранения энергии и импульса в один закон сохранения тензора энергии-импульса, а также слияние законов сохранения момента импульса и движения центра масс в один закон сохранения тензора момента импульса; открытие соотношения $E = mc^2$ и связанной с ним релятивистской формулировки закона сохранения движения центра масс и т. д.

Вариационные формулировки релятивистских теорий были развиты сразу же после открытия теории относительности (1905—1909) в работах М. Планка, Г. Минковского, М. Борна и др.[43], причем, как мы уже отмечали, $\mathscr{P}$-инвариантные принципы действия в электродинамике и электронной теории были открыты и использованы еще Лармором (1900), Лоренцом (1903), Шварцшильдом (1903), А. Пуанкаре (1906)[44].

Таким образом, уже в самом начале возникновения специальной теории относительности три основные компоненты взаимосвязи симметрия — сохранение (симметрия, вариационность, сохранение) были установлены. Но понимание ее как общей закономерности физических теорий отсутствовало. Законы сохранения же получали непосредственным интегрированием уравнений движения, а также при помощи аналогии с механикой или различных искусственных приемов. Поэтому наиболее вероятной была возможность установления взаимосвязи $\mathscr{P}$-симметрия — сохранение при систематической релятивизации еще нерелятивизованных физических теорий в виде некоторого формально-вычислительного способа получения законов сохранения.

Взаимосвязь $\mathscr{P}$- и $\mathscr{G}$-симметрия — сохранение

«В нашем последнем обсуждении Вы обратили мое внимание на работу Герглотца. Он рассматривает механическую задачу, которая допускает десятичленную группу Лоренца, и совершенно в смысле Ли из десяти инфинитезимальных преобразований получает десять известных интегралов задачи. Вы заметили тогда, что из этих интегралов получаются десять обычных интегралов проблемы *n* тел, если перейти к пределу, устремив скорость света к бесконечности. Вы хотели бы теперь выяснить, как получить эти интегралы на основе теории Ли (in Sinne von Lie)».

Из письма Ф. Энгеля Ф. Клейну[45]

Взаимосвязь $\mathscr{P}$-симметрия — сохранение была впервые установлена при релятивизации механики сплошной среды. Систематическое развитие этой теории требовало формулировки соответствующих законов сохранения. Так как классическая и релятивистская теории различаются лишь группой симметрии, то наиболее прямой путь для решения этой задачи состоял в релятивистском обобщении известного для механики сплошной среды вариационного принципа и использовании на его основе намеченного Гамильтоном варианта взаимосвязи симметрия — сохранение [46]. Эта программа была реализована в 1911 г. известным немецким математиком и механиком Г. Герглотцем в его работе, посвященной релятивистской механике сплошной среды [47]. Используя, по существу говоря, аналог гамильтонова варианта взаимосвязи, Герглотц не ссылается на Гамильтона. Не ссылается он и на другие источники (Лагранж, С. Ли), откуда он мог заимствовать идею связи законов сохранения с пространственно-временно́й симметрией. Это говорит о том, что взаимосвязи симметрия — сохранение он не придает значения самостоятельной физической закономерности, тем более что какие-либо комментарии, несмотря на новизну метода, в работе Герглотца совершенно отсутствуют.

Первый, кто обратил внимание именно на эту сторону работы Герглотца (хотя она была хорошо известна физикам и механикам того времени [48]), был Ф. Клейн. Он показал, что полученный Герглотцем результат — однозначное алгоритмическое соответствие законов сохранения генераторам фундаментальной группы — может быть распространен и на нерелятивистскую теорию, например, посредством известного предельного перехода при $c \to \infty$ [49]. Это, очевидно, привело его к мысли, что столь замечательное соответствие — вообще характерная особенность всякой физической теории, в частности, одной из наиболее фундаментальных теорий — классической механики системы. А раз так, то обсуждаемая взаимосвязь в механике может и должна быть установлена независимо от метода Герглотца, который был развит в рамках механики сплошной среды для группы Пуанкаре. И в 1916 г. или несколько ранее Клейн посылает письмо Ф. Энгелю, сотруднику

С. Ли и весьма крупному специалисту по теории непрерывных групп, в котором он ставит задачу установления взаимосвязи $\mathcal{G}$-симметрия — сохранение для механической проблемы n тел при помощи методов С. Ли. Ф. Энгель решает задачу, поставленную Ф. Клейном [50], используя непосредственно лиевский (канонический) вариант взаимосвязи или, точнее, *расширенный* канонический вариант, в котором временна́я координата приобретает статус канонической переменной. Тем самым осуществляется, наконец, замыкание взаимосвязи $\mathcal{G}$-симметрия — сохранение в том смысле, что не только генераторам евклидовой подгруппы и подгруппы временны́х переносов были поставлены в соответствие некоторые законы сохранения, но также и генераторам подгруппы галилеевских преобразований [51].

Релятивистский период развития взаимосвязи, связанный с открытием и последующей разработкой специальной теории относительности, характеризуется, таким образом, следующим:

1) установлением взаимосвязи $\mathcal{P}$-симметрия — сохранение;

2) возникновением нового понимания этой взаимосвязи как весьма общей и существенной черты физических теорий;

3) установлением («замыканием») взаимосвязи $\mathcal{G}$-симметрия — сохранение.

Вернемся к работе Герглотца, которая носила название «Механика деформируемой среды с точки зрения теории относительности» [52].

«Релятивистская теория упругости исторически возникла из попытки сделать пригодным и в теории относительности понятие твердого тела» [53]. Действительно, последовательное построение релятивистской механики сплошной среды требовало $\mathcal{P}$-инвариантного определения твердого тела. Соответствующее определение было дано в 1909 г. М. Борном [54].

Условие Борна выражается особенно просто, если ввести лагранжево представление. Тогда координаты частиц среды x^k $(k = 1, 2, 3, 4)$ рассматриваются как функции начальных координат ξ^α $(\alpha = 1, 2, 3)$ и собственного времени $\xi^4 = ic\tau$; $x^k = x^k(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$. Поэтому расстояние между двумя бесконечно близкими мировыми точками можно записать так:

$$ds^2 = A_{ij} d\xi^i d\xi^j.$$

Если обозначить $dx_i/d\xi_j = a_{ij}$, то

$$A_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{3} a_{\alpha i} a_{\alpha j} - a_{4i} a_{4j}. \tag{1}$$

Так как следует рассматривать только те мировые точки, которые одновременны с точки зрения системы отсчета, сопутствующей данному элементу объема в данный момент времени, то

$$\dot{u}_i dx^i = u_i \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} d\xi^k = 0.$$

Поэтому ds^2 выражается лишь через пространственные дифференциалы $d\xi_\alpha$:

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta}^{3} P_{\alpha\beta} d\xi_\alpha d\xi_\beta.$$

Деформация элемента объема характеризуется, таким образом, отклонением $P_{\alpha\beta}$ от их начальных значений, т. е. в случае твердого тела

$$\partial P_{\alpha\beta}/\partial \xi_4 = 0$$

(условие Борна) [55].

Последующие исследования Эренфеста, Ф. Нетера [56], Герглотца, М. Борна, Планка, Игнатовского и т. д. (1909—1910) [57] «породили сильное сомнение в возможности введения в релятивистскую механику понятия твердого тела» [58], определенного согласно условию Борна. По общему признанию, сомнение перешло в уверенность после работы Лауэ (1911) [59]. Разумным же обобщением твердого тела в релятивистской механике явилось понятие *твердого движения*, при котором выполнено условие Борна. Нарушение же твердости, т. е. нарушение условия Борна, означало деформацию тела, и путь к построению релятивистской теории упругости был открыт.

Так как возможность вывода уравнений механики сплошной среды из вариационного принципа была хорошо известна с середины XIX в. [60], то и при построении релятивистского аналога теории следовало ее использовать. Герглотц поэтому начинает с $\mathscr{P}$-инвариантного принципа действия в лагранжевом представлении с лагранжианом Φ, зависящим от $a_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$:

$$\int \Phi(a_{ij})\, d^4\xi = 0, \qquad (2)$$

где $d^4\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4$. Здесь x_i — зависимые переменные; ξ_j — независимые переменные; лагранжиан Φ предполагается функцией лишь производных $\dfrac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = a_{ij}$ [61].

Лагранжиан Φ строится, исходя из двух условий:

1) в случае покоя Φ переходит в обычный лагранжиан нерелятивистской теории, зависящий от $P_{\alpha\beta}$ или тензора деформации $e_{\alpha\beta}$ [62] и энтропии ε;

2) лагранжиан $\Phi(a_{ij})$ должен быть $\mathscr{P}$-инвариантной величиной.

С учетом внешних сил (2) можно переписать в виде

$$\delta\int\limits_{\Omega}\Phi d^4\xi+\int\limits_{\Omega}(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z+T\delta t+E\delta\varepsilon)\,d^4\xi=0, \tag{3}$$

где X, Y, Z — компоненты единичных внешних сил, умноженные на a_{44}; T/a_{44} — сумма работ и подводимого тепла в единицу времени к единице объема; E/a_{44} — соответствующая температура. Используя, по существу, формулу для вариации действия с переменными пределами интегрирования, выведенную для функционала (2), Герглотц получает после перехода к эйлеровскому представлению дивергентное соотношение, позволяющее десяти генераторам $\mathscr{P}$ группы сопоставить непосредственно десять законов сохранения. Обозначая $d^4\xi=d\omega$ и $\Phi_{ij}=\dfrac{\partial\Phi}{\partial a_{ij}}$ и используя соотношение $\delta a_{ij}=\delta\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial\xi_j}\right)=\dfrac{\partial}{\partial\xi_j}\,(\delta x_i)$, а также интегрирование по частям, уравнения Лагранжа и теорему Гаусса, Герглотц получает следующее соотношение:

$$\delta\int\limits_{\Omega}\Phi\,(a_{ij})\,d\omega=\int\limits_{\Omega}\frac{\partial\Phi}{\partial a_{ij}}\,\delta a_{ij}d\omega=\int\limits_{\Omega}\frac{\partial\,(\Phi_{ij}\delta x_i)}{\partial\xi_j}\,d\omega-$$
$$-\int\limits_{\Omega}\frac{\partial\Phi_{ij}}{\partial\xi_j}\,\delta x_i d\omega=\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\,(\Phi_{ij}\delta x_i)\,d\omega=\int\limits_{S}\Phi_{ij}\delta x_i d\omega_j, \tag{4}$$

где Ω — объем 4-цилиндра; S — его поверхность, а $d\omega_j$ — проекции элемента этой поверхности. Для вариационного принципа (2) в случае адибатического движения ($\delta\varepsilon=0$) можно записать:

$$\int\limits_{S}\Phi_{ij}\delta x_i d\omega_j=\int\limits_{\Omega}(X_i\delta x_i)\,d\omega, \tag{5}$$

где $X_i=(X,\,Y,\,Z,\,T)$. Учитывая далее, что интеграл по боковой поверхности цилиндра аннулируется в силу граничного условия на поверхности среды (тела) и то, что на основаниях цилиндра $d\omega_1=d\omega_2=d\omega_3=0$, $d\omega_4=d^3\xi$, можно записать

$$\int\limits_{S}\Phi_{i4}\delta x_i d^3\xi\,\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}=\int\limits_{\Omega}(X_i\delta x_i)\,d\omega. \tag{6}$$

В эйлеровском представлении (6) можно переписать в виде [63]

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V}F_{i4}\delta x_i dV=\int\limits_{V}\mathscr{X}_i\delta x_i dV, \tag{7}$$

где

$$X_i=\sum_j a_{ij}\mathscr{X}_j;\qquad \Phi_{ij}=\sum_k a_{ik}F_{ik};\qquad dV=d^3x.$$

Соотношение (7) дает возможность непосредственно десяти генераторам $\mathcal{P}$-группы сопоставить 10 первых интегралов, аналогичных известным законам сохранения нерелятивистской механики.

Выпишем десять генераторов $\mathcal{P}$-группы:

4 генератора пространственно-временных переносов:

$$\delta x_i = \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, 3, 4); \tag{8}$$

3 генератора пространственных вращений вокруг осей x_1, x_2, x_3:

$$\left.\begin{array}{l}\delta x_2 = -\varepsilon_1 x_3,\\ \delta x_3 = \varepsilon_1 x_2,\\ \delta x_1 = 0,\end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l}\delta x_3 = -\varepsilon_2 x_1,\\ \delta x_1 = \varepsilon_2 x_3,\\ \delta x_2 = 0,\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l}\delta x_1 = -\varepsilon_3 x_2,\\ \delta x_2 = \varepsilon_3 x_1,\\ \delta x_3 = 0,\end{array}\right\},$$

или

$$\left.\begin{array}{l}\delta x_\alpha = -\varepsilon_\gamma x_\beta,\\ \delta x_\beta = \varepsilon_\gamma x_\alpha,\\ \delta x_\gamma = 0,\end{array}\right\}, \tag{9}$$

где α, β, γ = 1, 2, 3; 3, 1, 2; 2,3,1;

3 генератора лоренцовых преобразований

$$\begin{aligned}&\delta x_\alpha = \varepsilon_\alpha x_4,\\ &\delta x_4 = -\varepsilon_\alpha x_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3).\end{aligned} \tag{10}$$

Подставляя в (7) попеременно (8), (9), (10), получаем в отсутствие внешних сил соответственно

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V F_{i4}\varepsilon_i dV = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}\int\limits_V F_{i4} dV = 0 \tag{11}$$

— закон сохранения энергии-импульса (i = 1, 2, 3, 4);

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V (F_{\alpha4}\delta x_\alpha + F_{\beta4}\delta x_\beta)\, dV = \frac{d}{dt}\int\limits_V \varepsilon_\gamma(-F_{\alpha4}x_\beta + F_{\beta4}x_\alpha)\, dV = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V (x_\alpha F_{\beta4} - x_\beta F_{\alpha4})\, dV = 0 \tag{12}$$

— закон сохранения момента импульса (α, β = 1,2; 3,1; 2,3);

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V (F_{\alpha4}\delta x_\alpha + F_{44}\delta x_4)\, dV = \frac{d}{dt}\int\limits_V \varepsilon_\alpha(F_{\alpha4}x_4 - F_{44}x_\alpha)\, dV = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V (x_4 F_{x4} - x_\alpha F_{44})\, dV = 0 \tag{13}$$

закон сохранения движения центра тяжести ($\alpha = 1,2,3$).

Закон сохранения движения центра тяжести можно записать в привычной форме:

$$\int\limits_V F_{x4} dV = \frac{d}{dt}\int\limits_V x_\alpha F_{44} dV. \tag{14}$$

Таким образом, Герглотц воспроизводит, по существу говоря, характерную для обобщенного гамильтонова варианта взаимосвязи вариационную процедуру, которая впоследствии в значительно более общей ситуации была проделана Э. Нетер. Принципиальное значение работы Герглотца заключалось не только в том, что в ней впервые в истории физики все законы сохранения систематическим путем выводились из симметрий фундаментальной группы, в то время как в дорелятивистской механике взаимосвязь $\mathscr{G}$-симметрия — сохранение так и осталась незамкнутой, но и в том, что это был первый вариант взаимосвязи квазиполевого характера. Кроме того, установление взаимосвязи $\mathscr{P}$-симметрия — сохранение автоматически означало установление соответствующей взаимосвязи и для $\mathscr{G}$-группы (в рамках нерелятивистской механики сплошной среды). Взаимосвязь $\mathscr{G}$-симметрия — сохранение устанавливалась естественным образом посредством предельного перехода при $c \to \infty$ во всех соотношениях, полученных в релятивистском случае [64].

Квазиполевой характер всей конструкции давал также возможность распространения ее на электродинамику. Впрочем, ни то, ни другое не было сделано Герглотцем, не была указана даже возможность этого. Вообще, какие-либо комментарии Герглотца в связи с установленной им взаимосвязью отсутствовали. Отсутствовали и какие-либо ссылки на Гамильтона, Якоби, Ли и т. д. в связи с используемой Герглотцем идеей связи законов сохранения с принципами симметрии. Все это в совокупности позволяет сделать вывод, что Герглотц, поглощенный конкретной проблематикой, не обратил внимания на самостоятельное значение установленной им взаимосвязи, которая в его изложении носила характер формально-вычислительного приема для вывода законов сохранения.

Разумеется, и здесь можно поставить два основных историко-научных вопроса: почему именно в 1911 г. и почему именно Герглотц установил взаимосвязь $\mathscr{P}$-симметрия — сохранение? Вообще говоря, эта взаимосвязь могла быть установлена в любой год с 1905 по 1911, например в рамках электродинамики. Но так как установление обсуждаемой взаимосвязи было связано с релятивистской механикой сплошной среды, а последнюю можно было систематически развить, выяснив вопрос о существовании твердого тела в теории относительности, то 1911 год определялся, по существу говоря, тем, что именно к этому времени указанный вопрос был после интенсивной дискуссии (1909—1911 гг.) наконец разрешен.

С другой стороны, обсуждаемая взаимосвязь могла быть установлена, помимо Герглотца, которому принадлежит важная работа о твердом теле [65], также Эренфестом, Планком, Борном, Лауэ, Ф. Нетером, Игнатовским, также плодотворно занимавшимися проблемой твердого тела [66]. Возможно, не последнюю роль в том, что взаимосвязь $\mathscr{P}$-симметрия — сохранение была установлена все-таки Герглотцем, сыграло следующее: Герглотц был в большей степени математик и работал в это время в Геттингене [67], где Клейн, Гильберт, Минковский и другие создали благоприятную атмосферу синтеза абстрактных математических исследований с прикладными задачами и принципиальными проблемами теоретической физики [68].

Все-таки, как мы уже заметили, установленная взаимосвязь не была вполне осознана и служила только средством для получения законов сохранения. Дело было не в отсутствии особой проницательности у Герглотца, но в общем уровне развития взаимосвязи в это время, для которого была характерна оценка ее как формально-математической конструкции [69]. Аналогичная оценка взаимосвязи была характерна и для дорелятивистской механики [70]; пожалуй, единственным исключением был С. Ли, который, как мы видели, придавал взаимосвязи симметрия — сохранение особенное значение. Уместно, однако, в этой связи процитировать Ф. Клейна: «Не следует умалять значение того преимущества, которое дает хорошо выработанный формальный аппарат для дальнейших исследований тем, что *он до известной степени опережает мысль*. Правда, мы должны придерживаться того взгляда, что математический аппарат нельзя считать еще окончательно разработанным, пока он не стал логически очевидным. Проникновение с помощью формального аппарата является только первым, но уже важным шагом» [71]. Аналогичная ситуация неоднократно встречалась в истории физики. Достаточно вспомнить историю открытий преобразований Лоренца, связанную с именами Фохта, самого Лоренца и других, а также планковской формулы, положившей начало развитию квантовой теории, и очень многих важных закономерностей квантовой механики. Работа Герглотца была одним лишь из первых шагов к установлению рассматриваемой взаимосвязи как фундаментальной закономерности теоретической физики вообще.

Первым, кто обратил внимание на использованный Герглотцем метод, указал на его значение и поставил в связи с этим ряд важных вопросов, свидетельствующих о возникновении нового понимания взаимосвязи как *общей закономерности*, был Ф. Клейн. Это подтверждается его письмом к Ф. Энгелю [72], где он, в частности, указал на возможность непосредственного получения взаимосвязи симметрия — сохранение для $\mathscr{G}$-группы посредством предельного перехода при $c \to \infty$ во всех соотношениях, полученных для группы, а также поставил вопрос о независимом установлении этой взаимосвязи с помощью методов Ли. Тем самым он как бы перекидывал мост между аналитической механикой, прежде всего лиевским вариантом взаимосвязи, и релятивистской физикой, в частности герглотцевским вариантом взаимосвязи. Именно эта задача, поставленная Клейном и решенная Энгелем, явилась основным свидетельством в пользу высказанного нами утверждения о возникновении в это время нового, более глубокого понимания взаимосвязи симметрия — сохранение в физике.

Хорошо известно, что Клейн вел обширную научную переписку со многими математиками и физиками. Некоторые письма, как свои, так и своих коллег, в которых, по мнению Клейна, содержались интересные и новые результаты, он докладывал на заседаниях Геттингенского математического общества и затем публиковал в «Göttinger Nachrichten». Во второй тетради «Göttinger Nachrichten» за 1916 г. и было опубликовано письмо Энгеля, предварительно доложенное Клейном на одном из заседаний Геттингенского математического общества. Начало письма Энгеля мы процитировали в качестве эпиграфа к настоящей главе. Из этих слов следует, что Клейн, по крайней мере, в 1916 г., а возможно, и раньше, например в 1914—1915 гг., обратил внимание как раз на ту часть работы Герглотца, в которой была установлена связь законов сохранения с генераторами $\mathscr{P}$-группы. При этом он заметил, что эта взаимосвязь остается в силе и для $\mathscr{G}$-группы и может быть получена в результате предельного перехода при $c \to \infty$. Наконец, и это, вероятно, наиболее существенно, Клейн задается вопросом и ставит его перед Энгелем: каким образом, независимо от метода Герглотца и упомянутого предельного перехода, можно установить взаимосвязь $\mathscr{G}$-симметрия — сохранение на базе лиевских представлений, органически присущих классической механике?

Разумеется, такая постановка задачи представлялась, на первый взгляд, несколько искусственной, так как, с одной стороны, после релятивизации физики и механики возврат к $\mathscr{G}$-группе едва ли мог представить интерес для решения насущных задач физики, а с другой стороны, заранее было известно, что взаимосвязь $\mathscr{G}$-симметрия — сохранение имеет место и может быть получена посредством уже упомянутого предельного перехода. Но именно эта искусственность больше всего подтверждает утверждение о возникновении нового, более глубокого понимания рассматриваемой взаимосвязи, достигнутого благодаря Клейну. Клейн, по-видимому, понимал, что установленная Герглотцем взаимосвязь должна иметь принципиальное значение, что она выходит за рамки формального метода ввиду фундаментальной роли принципов симметрии и законов сохранения. Поэтому представлялось весьма важным и следовать эту взаимосвязь в различных аспектах, рассмотреть иные возможные способы ее установления как в $\mathscr{P}$-инвариантных, так и в $\mathscr{G}$-инвариантных теориях.

Как уже упоминалось, в примечаниях к своей «Эрлангенской программе» Клейн писал в 1893 г., что «математический аппарат еще нельзя считать окончательно разработанным, пока он не стал логически очевидным» [73]. Эта логическая очевидность нередко достигается в результате нахождения нескольких эквивалентных формулировок. Как заметил Фейнман в своей нобелевской лекции: «Возможно, вещь по-настоящему проста, если можно достаточно полно описать ее несколькими различными способами, не ощущая непосредственно, что вы описываете одно и то же» [74]. Поэтому стремление Клейна найти эквивалентную форму рассматриваемой закономерности в рамках наиболее адекватного описания классической механики — канонического лиевского формализма — свидетельствует о его стремлении к достижению «логической очевидности» в понимании закономерности, к выявлению ее сущности.

Об этом свидетельствует не только его переписка с Энгелем, но и лекции Клейна о развитии математики в XIX в., читанные им с 1914 по 1919 г., прежде всего тот материал, который содержался в § 2 А второй главы второго тома лекций, изданного Шпрингером в 1927 г. [75] Курант и Кон-Фоссен в предисловии отмечали, что эта часть лекций была читана Клейном с 1915 по 1917 г. [76] Причем уже в 1917 г., а возможно, и раньше, лекции были широко распространены в многочисленных копиях, отпечатанных на пишущей машинке. Так, например, Бессель-Хаген в статье 1921 г. ссылается на машинописный экземпляр «Лекций» Клейна, отпечатанных в 1917 г. (более точное название лекций «Seminarvorträge über die Entwicklung der Mathematik ...») [77]. Что же содержалось в этих лекциях в отношении взаимосвязи симметрия — сохранение? По-видимому, то же самое, что и в издании 1927 г., так как Бессель-Хаган ссылается на лекции Клейна именно в связи с тем, что в них, как он говорит, содержится «обобщающее изложение» вопроса о связи первых интегралов механики с генераторами $\mathcal{G}$-группы [78].

Кратко рассмотрим упомянутый параграф «Лекций» Клейна. Он называется «О десяти всеобщих интегралах проблемы n тел классической механики». Клейн ссылается на Якоби как на основоположника концепции обсуждаемой взаимосвязи, который впервые установил связь генераторов евклидовой группы с интегралами импульса и момента импульса (в известных «Лекциях по динамике», читанных в Кенингсберге в 1842—1843 гг. и изданных Клебшем в 1866 г. [79]). Он называет эту взаимосвязь «якобиевским представлением». Как было показано во второй главе, «якобиевское представление» открыто в действительности Лагранжем не менее чем за 60—70 лет до Якоби; другой вариант этой взаимосвязи был сформулирован Гамильтоном в 1834 г. [80] Клейн далее кратко поясняет метод Лагранжа — Якоби, подчеркнув, что законы сохранения энергии и движения центра тяжести в рамках классической механики на основе этого варианта взаимосвязи не были получены (что опять-таки не вполне верно, по крайней мере, в отношении закона сохранения энергии [81]). Поэтому принципиальное значение, по его мнению, имела как раз работа Герглотца, которая выявила взаимосвязь этих законов сохранения с однородностью времени и «чистой» лоренцовой симметрией (или при предельном переходе — «чистой» галилеевской симметрией).

Далее Клейн упоминает как раз работу Энгеля, который, по его словам, «непосредственным образом проделал это (т. е. установил взаимосвязь $\mathcal{G}$-симметрия — сохранение. — *В. В.*) в соответствии с моим пожеланием»[82]. При этом он, ввиду сложности работы Энгеля, полностью опускает ее изложение. В заключение параграфа Клейн кратко рассматривает сущность концепции Гюйгенса — Шютца, подчеркивая, что принцип относительности, связанный с $\mathcal{P}$-или $\mathcal{G}$-группой, объединяет не только законы сохранения энергии и импульса, что показал еще сам Шютц, и в известном смысле даже Гюйгенс, но и законы сохранения момента импульса и движения центра тяжести[83].

Итак, можно заключить, что Клейн к 1915—1916 гг. приходит к выводу об универсальности и принципиальной роли взаимосвязи симметрия — сохранение. Непосредственным поводом для этого послужила, таким образом, упомянутая работа Герглотца, в которой эта взаимосвязь использовалась лишь как метод для вывода законов сохранения. Теперь мы попытаемся ответить на два историко-научных вопроса о том, почему именно в 1915—1916 гг. возникает перелом в понимании взаимосвязи симметрия-сохранение и почему именно Ф. Клейн играет в этом определяющую роль.

Основная причина упомянутого перелома и того, что он произошел именно в 1915—1916 гг., заключалась в постепенной выработке нового отношения к принципам симметрии и законам—сохранения после открытия теории относительности. В теории относительности со всей силой проявилась эвристическая и систематизирующая роль принципа симметрии, связанного с $\mathcal{P}$-группой, открытой в физике. Но и математика была к этому подготовленной: в середине и конце XIX в. создан и значительно развит математический аппарат, который позволил не только углубить основы теории относительности и сделать прозрачной и «логически очевидной» ее математическую структуру, но и существенно развить ее, подготовив специальную теорию относительности к новым фундаментальным обобщениям. Речь идет прежде всего об «Эрлангенской программе» Клейна в геометрии, теории непрерывных групп (С. Ли, Клейн и др.), о связанных с ними теорией алгебраических инвариантов и дифференциально-геометрическими исследованиями и т. д. Ф. Клейн предполагал написать математическую предысторию теории относительности, но сделал это лишь отчасти.[84] Специальная теория относительности, ставшая к 1910—1911 гг., по существу, законченной системой, привела к более глубокому пониманию и классической физики на основе характерной для нее фундаментальной группы $\mathcal{G}$, основные свойства и структура которой выяснились лишь в результате анализа $\mathcal{P}$-группы. Кроме того, успехи релятивизма вызвали естественные попытки расширения $\mathcal{P}$-группы для достижения еще более общего и глубокого понимания природы. И действительно, в 1910 г. была открыта конформная симметрия уравнений Максвелла, а в 1915 г. завершилось построение основ общей теории относительности.

Таким образом, если в XIX в. принципы симметрии в явном виде не выступали и не играли заметной роли, то создание теории относительности выдвинуло их на первый план развития физической теории в XX в. Уже первые успехи общерелятивистской эйнштейновской программы (1913—1915) еще раз с огромной силой подчеркнули их значение. Ф. Клейн, показавший еще в 1910 г. связь специальной теории относительности со своей «Эрлангенской программой [85], и в общей теории относительности увидел дальнейшее развитие и приложение своей фундаментальной концепции [86]. Несомненно, семинар Клейна по математическим вопросам теории относительности, материалы которого и составили второй том его «Лекций о развитии математики в XIX в.» [87], начавший свою работу в 1915 г., был вызван вновь вспыхнувшим интересом Клейна к теории относительности.

С другой стороны, уже в середине XIX в. возникает и более глубокое понимание законов сохранения. Как мы уже отмечали [88], законы сохранения проделали весьма интересную эволюцию: до Ньютона они рассматривались главным образом как постулаты (Галилей, Декарт, Гюйгенс, Лейбниц и др.); затем благодаря Ньютону на первом плане оказались дифференциальные уравнения механики, а законы сохранения приобрели значение простых следствий этих уравнений (Ньютон, Эйлер и др.). Аналитическая механика Лагранжа, исходившая из вариационной формы динамического закона, также рассматривала утверждения о законах сохранения как теоремы, доказываемые единообразно на основе пространственно-временнóй симметрии, присущей классической механике систем. Эта точка зрения на законы сохранения как на первые интегралы уравнений движения сохранялась в аналитической механике и впоследствии.

Изучение тепловых и других физических явлений в начале и середине XIX в. привело к «физикализации» основного закона сохранения механики — закона сохранения энергии [89]. Правда, тогда многим казалось, что в основе тепловых явлений, как, впрочем, и всей физики, лежит механика, и тогда выяснение механизма всех физических процессов должно привести к сведéнию физического закона сохранения энергии к одному из первых интегралов механики как теоретической основы физики. Но дальнейшее развитие физики не только не приводило к обнаружению упомянутого «механизма», но, напротив, демонстрировало все больший ее отход от механики. Значение же закона сохранения энергии продолжало возрастать, особенно как эвристического принципа при исследовании новых физических явлений [90]. Эти особенности закона сохранения энергии напоминают постулативный характер законов сохранения доньютоновской механики.

Правда, классическая физика при исследовании новых явлений лишь на первом этапе ограничивалась законами сохранения, а дальнейшее развитие теории приводило к дифференциальным уравнениям физических систем, в результате чего законы сохранения снова переходили в разряд теорем или первых интегралов этих уравнений. Тем не менее успешное применение закона сохранения энергии к совершенно новым неисследованным областям физики приводило к мысли о весьма большой общности этого закона, возможно, выходящего далеко за рамки тех или иных конкретных физических схем. Эта общность распространялась и на другие законы сохранения, так как теория относительности показала, что во всех релятивистских теориях закон сохранения импульса обладает той же степенью общности, что и закон сохранения энергии. А при более внимательном рассмотрении, даже без непосредственного привлечения взаимосвязи симметрия — сохранение, столь же необходимыми оказываются и законы сохранения движения центра тяжести и момента импульса [91].

Обстановка в физике в начале XX в., связанная с обнаружением ряда новых физических явлений, выходящих за рамки общепризнанных теорий, способствовала развитию взгляда на законы сохранения как на фундаментальные принципы, обладающие большей степенью общности, чем те или иные дифференциальные уравнения. Развитие современной физики элементарных частиц в сочетании с квантовомеханическим подходом приводит многих физиков к мысли, что в основе будущей теории могут оказаться не законы типа уравнений движения, а утверждения типа законов сохранения [92].

Так или иначе, но в первой четверти XX в. возникает и оформляется новое, более глубокое понимание как принципов симметрии, так и законов сохранения; резко повышается их роль в развитии физики. Это и было основной объективной причиной возникновения определенного перелома в понимании взаимосвязи симметрия — сохранение, началом которого послужили сначала работы Клейна и Энгеля, а затем Гильберта, Э. Нетер и других. Действительно, именно трудности с понятием энергии и законами сохранения в общей теории относительности, с самого начала присущие этой теории, в значительной мере стимулировали интерес физиков к этой проблематике [93] (работы Клейна, Гильберта, Э. Нетер, Эйнштейна, Вейля, Лоренца и др.— см. главу V). Переход концепции симметрия — сохранение из сферы аналитической механики в физику и связанное с ним более глубокое понимание этой закономерности в известной степени были детерминированы всем ходом развития физики.

Слова «в известной степени» следует понимать здесь в том смысле, что немалое значение имел и субъективный элемент. Остановимся несколько подробнее на этом вопросе: почему именно Клейн сыграл в этом переломе основную роль? Основной причиной этого является, по-видимому, то, что Клейн был творцом «Эрлангенской программы» в геометрии, вобравшей в себя ряд фундаменталь концепций математики [94]. Причем основная идея «Программ заключавшаяся во взгляде на любую геометрию, как на теор инвариантов некоторой непрерывной группы преобразований, яв лась стержневой идеей всего творчества Клейна. По своей сути форме концепция взаимосвязи симметрия — сохранение весь аналогична клейновской «Программе» и тесно связана с ней. Н если бы Клейн был «чистым» математиком, не интересующим проблемами теоретического естествознания, то он и не обратил бы к приложению «эрлангенской» концепции к физике и механик Как известно, физикой он интересовался с юношеских лет и в дал нейшем в своем творчестве нередко обращался к физическим пр блемам. Он всегда считал, что математика и физика неразрыв связаны и взаимно обогащают друг друга. Не случайно его наз вают иногда создателем «физической математики», которая в о личие от математической физики заключается не в использован математического аппарата для решения задач физики, а в нахожд нии физических интерпретаций весьма абстрактных математич ских теорий, в придании отвлечённым математическим структ рам и теоремам иногда весьма неожиданного, но глубокого физи ческого смысла [95]. Как заметил в этой связи ученик Клейна Зо мерфельд, согласно Клейну, «не только математика стоит на служ бе физических интересов и проблем, но также и физика ведет и у коряет математическую мысль» [96]. В этом отношении он особенн близок был к Риману. Как и Риман, он внес значительный вклад в собственно математическую физику [97]. Наибольший интерес дл нас представляют несколько работ Клейна, посвященных прим нению и развитию «Эрлангенской программы» в механике и фи зике [98].

В первой работе этого цикла им рассмотрена механика твердо го тела с точки зрения «Эрлангенской программы», причем в это случае в основу положена евклидова группа движений 3-мерно пространства [99]. Вторая работа, упоминавшаяся нами в начал этой главы, посвящена развитию идей Минковского и представлял собой, по существу говоря, введение «Эрлангенской программы» физику [100]. Последующие работы посвящены проблеме энергии законам сохранения энергии-импульса в только что возникшей об щей теории относительности (1917—1918), которая, согласно Клей ну, также находилась в рамках «Эрлангенской программы» ка теория инвариантов бесконечной непрерывной группы, завися щей от четырех произвольных непрерывных функций [101]. Теори относительности придала «Эрлангенской программе» новое физи ческое звучание и вывела ее за пределы собственно геометрии С другой стороны, она явилась исходной точкой неформального тео ретико-группового или «эрлангенского» подхода к физике [102] Итак, в Ф. Клейне соединились основоположник «Эрлангенско программы» в математике, выдающийся математический физик «физический математик», замечательный историк науки, один и основателей геттингенской школы математиков и физиков, для которой было характерно сочетание «подъема на высоты абстракции с яркой образностью геометрического и физического мышления» [103]. В свете сказанного не является неожиданным то, что именно Клейн сделал решающий шаг к достижению настоящего понимания концепции взаимосвязи как некоторой принципиальной и общей черты физических теорий.

Теперь, наконец, обратимся к анализу статьи-письма Энгеля, явившейся основным свидетельством того перелома в оценке обсуждаемой взаимосвязи, который мы связали прежде всего с именем Клейна. Сначала несколько слов о самом Энгеле. Почему Клейн с вопросом об установлении взаимосвязи $\mathscr{G}$-симметрия — сохранение обратился именно к нему?

Ф. Энгель был одним из наиболее крупных сотрудников С. Ли. Мировой известностью пользуется трехтомная «Теория групп преобразований», написанная С. Ли в соавторстве с Энгелем [104]. Помимо ряда важных работ по теории непрерывных групп, опубликованных еще в XIX в. [105], ему в соавторстве с К. Фабером принадлежит монография «Die Liesche Theorie der partiellen der Differentialgleichungen erster Ordnung» (Teubner, Leipzig, 1932). Важной работой Энгеля была подготовка к изданию «Собрания сочинений С. Ли» в шести томах [106]. Особенно ценными представляются примечания и комментарии Энгеля, изданные отдельными книгами к каждому тому «Собрания» С. Ли, в которых содержится также переписка С. Ли с А. Майером, также внесшим известный вклад в теорию непрерывных групп преобразований. Работ, посвященных специально механическим вопросам, у Энгеля нет, если не считать как раз тех двух статей о взаимосвязи симметрия — сохранение в классической механике, которые были им написаны непосредственно в результате переписки с Ф. Клейном [107].

Обращение Клейна именно к Энгелю в связи с установлением взаимосвязи $\mathscr{G}$-симметрия — сохранение непосредственно лиевскими методами было естественным. Может возникнуть вопрос, почему Клейн этого не сделал сам? Это объясняется, вероятно, прежде всего тем, что принципиально вопрос был ясен; возможность получения этой взаимосвязи в рамках канонического формализма, должно быть, не вызывала сомнения у Клейна и рассматривалась им как частная задача, хотя и весьма важная. Кроме того, известно, что после нервного переутомления и болезни, связанной с ним (1882), Клейн уже не мог столь же напряженно разрабатывать новые математические проблемы; в известной степени он утратил способность доводить исследование до его логического конца, его все меньше интересовали важные для работающего математика вопросы математической техники. Как заметил Курант, его как бы перестал интересовать вопрос: «Wie beweise ich?» [108]. Но при этом он сохранил необыкновенную способность интуитивно угадывать и глубоко понимать самую суть той или иной теории или идеи и «в силу этого до самого последнего часа своей жизни для науки был неувядаемым источником *новаторских идей синтетического характера»* [109].

В чем же заключалась трудность получения взаимосвязи $\mathscr{G}$-симметрия — сохранение в схеме канонического формализма? Группа канонических преобразований является группой Ли, конкретное выражение которой определяется заданием тех или иных производящих функций. Время t при этом рассматривается как непрерывно изменяющийся параметр группы, но не как каноническая переменная. Как и всякая группа Ли, каноническая группа может быть задана своими бесконечно малыми преобразованиями. Причем, в отличие от произвольного канонического преобразования, бесконечно малое преобразование всегда может быть записано в явном виде, что и позволяет, как мы видели, получить первые интегралы механики, которые совпадают с производящими функциями тех бесконечно малых канонических преобразований, которые оставляют инвариантным гамильтониан системы. Переменная времени в этом формализме, таким образом, играет особую роль по сравнению, например, с пространственными координатами, которые в отличие от нее всегда можно рассматривать как канонические координаты. Поэтому в рамках обычного канонического метода и соответственно лиевского варианта взаимосвязи можно установить эту взаимосвязь лишь для таких групп преобразований пространственных и временных координат, которые, не будучи явно связаны с изменением переменной времени (например, евклидова группа), являются, по существу говоря, подгруппами группы канонических преобразований, но нельзя получить указанную взаимосвязь для групп типа галилей-ньютоновской, в которых координата времени играет такую же роль, как и пространственные переменные.

Таким образом, главная трудность заключается в разработке такого расширенного канонического формализма, в котором временная координата приобрела бы характер канонической переменной, а $\mathscr{G}$-группа могла рассматриваться как подгруппа канонической группы. Сделав несколько вводных замечаний о лиевском варианте взаимосвязи в схеме обычного канонического метода, Энгель переходит к рассмотрению механической проблемы n тел, характеризующейся уравнениями

$$m_i \frac{d\dot{x}_i}{dt} = U_{x_i}, \quad m_i \frac{d\dot{y}_i}{dt} = U_{y_i}, \quad m_i \frac{d\dot{z}_i}{dt} = U_{z_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

где U — известная потенциальная функция, зависящая от разностей координат $(x_i - x_k,\ y_i - y_k,\ z_i - z_k)$. Уравнения (15) известной процедурой приводятся к канонической форме

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= H_{p_i}; \quad \frac{dy_i}{dt} = H_{q_i}; \quad \frac{dz_i}{dt} = H_{r_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -H_{x_i}; \quad \frac{dq_i}{dt} = -H_{y_i}; \quad \frac{dr_i}{dt} = -H_{z_i}, \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$H = \frac{1}{2}\sum_i \frac{p_i^2 + q_i^2 + r_i^2}{m_i} - U.$$

Здесь p_i, q_i, r_i — импульсы, сопряженные координатам x_i, y_i, z_i. Далее Энгель выписывает десять генераторов $\mathcal{G}$-группы, оставляющей инвариантными уравнения (16), чтобы подчеркнуть, что временная переменная, входящая в четыре из десяти генераторов $\mathcal{G}$-группы, в обычном каноническом формализме играет особую роль. Для устранения этого координата времени t заменяется другой вспомогательной переменной τ, которая определяется из соотношения

$$\frac{dt}{d\tau} = 1. \tag{17}$$

Координата времени t приобретает при этом характер канонической переменной, если ей поставить в соответствие канонически сопряженную переменную — «импульс» P. Это формальное расширение приводит систему канонических уравнений (16) к виду

$$\frac{dx_i}{d\tau} = H_{p_i}; \quad \frac{dy_i}{d\tau} = H_{q_i}; \quad \frac{dz_i}{d\tau} = H_{r_i}; \quad \frac{dt}{d\tau} = 1,$$
$$\frac{dp_i}{d\tau} = -H_{x_i}; \quad \frac{dq_i}{d\tau} = -H_{y_i}, \quad \frac{dr_i}{d\tau} = -H_{z_i}; \quad \frac{dP}{d\tau} = 0. \tag{18}$$

Если предположить, что H не зависит явно от времени, то полученная система сохраняет свою каноничность, только роль гамильтониана должна играть функция $H + P$[110]. Если в обычном каноническом формализме бесконечно малое изменение некоторой функции $f(p_i, x_i)$ под действием бесконечно малого канонического преобразования может быть записано, согласно Ли, в виде

$$\delta f = (\Phi, f) = \sum_{i=1}^{n}\left(\Phi_{p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \Phi_{x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right), \tag{19}$$

то в расширенном формализме δf можно выразить так:

$$\delta f = (\Phi, f) = \sum_{i=1}^{n}\left(\Phi_{p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \Phi_{q_i}\frac{\partial f}{\partial y_i} + \Phi_{r_i}\frac{\partial f}{\partial z_i}\right) +$$
$$+ \Phi_P\frac{\partial f}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n}\left(\Phi_{x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} + \Phi_{y_i}\frac{\partial f}{\partial q_i} + \Phi_{z_i}\frac{\partial f}{\partial r_i}\right) - \Phi_t\frac{\partial f}{\partial P}, \tag{20}$$

где Φ — производящая функция бесконечно малого канонического преобразования, зависящая от переменных x_i, y_i, z_i, p_i, q_i, r_i, t, P.

Чтобы использовать теперь лиевский вариант взаимосвязи, необходимо в соответствии с генераторами $\mathcal{G}$-группы, задающими преобразования лишь пространственно-временных переменных x_i, y_i, z_i, t, вычислить также связанные с ними бесконечно малые преобразования p_i, q_i, r_i, P. При этом удобно воспользоваться выражением

$$\delta p_i = m_i \frac{dt \cdot d\delta x_i - dx_i d\delta t}{dt^2} = m_i \frac{d\delta x_i}{dt} - p_i \frac{d\delta t}{dt}, \tag{21}$$

вытекающим из соотношения $p_i = m_i \dfrac{dx_i}{dt}$. Для определения δP естественно использовать уравнение для вариации нового гамильтониана

$$\delta (H + P) = 0. \tag{22}$$

Выразив затем найденные вариации через частные производные производящей функции, которую Энгель, как и С. Ли, называет характеристической, можно легко вычислить и сами производящие функции, которые, согласно лиевскому варианту взаимосвязи, совпадают с первыми интегралами проблемы n тел. Так как вычисление для шести генераторов евклидовой группы было проделано ранее [111], то представляет интерес лишь вычисление производящих функций, соответствующих трем «чистым» галилеевским преобразованиям и временнóй трансляции. Следуя Энгелю, определим сначала для них δp_i, δq_i, δr_i, δP. Для генератора, соответствующего временнóй трансляции, получим

$$\delta x_i = \delta y_i = \delta z_i = 0; \qquad \delta p_i = \delta q_i = \delta r_i = 0; \qquad \delta t = \varepsilon; \qquad \delta P = 0. \tag{23}$$

Здесь использованы соотношения (21) и (22); действительно:

$$\delta P = -\delta H = -\delta \left(\sum_i \frac{p_i^2 + q_i^2 + r_i^2}{2m_i} - U \right) = 0$$

Для одного из трех генераторов «чистых» галилеевских преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} &\delta x_i = t\varepsilon; \qquad \delta y_i = \delta z_i = \delta t = 0, \\ &\delta p_i = m_i \varepsilon; \qquad \delta q_i = \delta r_i = 0, \\ &\delta P = -\delta H = -\sum_i \frac{p_i \delta p_i}{m_i} = -\sum_i p_i \varepsilon. \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

Теперь выразим (23) и (24) через частные производные производящих функций, отвечающих этим преобразованиям. Для этого примем во внимание явные выражения бесконечно малых канонических преобразований через частные производные соответствующих производящих функций:

$$\left.\begin{aligned} \delta p_i &= -\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \qquad \delta x_i = \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}, \\ \delta P &= -\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \qquad \delta t = \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial P}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Учитывая, что $\Phi = \Phi\,(x_i, y_i, z_i, t, p_i, q_i, r_i, P)$,

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt + \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} dp_i + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial P} dP \tag{26}$$

и что для временно́й трансляции, ввиду (23) и (25), $\frac{\partial \Phi}{\partial P} = 1$ (остальные производные Φ равны 0), получаем: $d\Phi = dP$, откуда $\Phi = P$ (с точностью до const), или

$$\Phi = H. \tag{27}$$

Для «галилеевских» преобразований (24) с учетом (25) получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{-\delta p_i}{\varepsilon} = m_i; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = \frac{\delta x_i}{\varepsilon} = t;$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{-\delta P}{\varepsilon} = \sum_i p_i; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial P} = 0.$$

Тогда

$$d\Phi = -\sum_i m_i dx_i + \sum_i t\, dp_i + \sum_i p_i dt, \tag{28}$$

откуда функция Φ, с точностью до константы, будет

$$\Phi = -\sum_i m_i x_i + t \sum_i p_i. \tag{29}$$

Таким образом, с бесконечно малым преобразованием, соответствующим временно́й трансляции (23), ассоциируется, как это и следовало ожидать, интеграл энергии $H = \text{const}$. А с бесконечно малым галилеевским преобразованием (24) связывается интеграл движения центра тяжести, который с учетом закона сохранения импульса $\sum_i p_i = \text{const}$ может быть записан в форме

$$\sum_i m_i x_i = C_1 t + C_2 \quad \text{или} \quad \sum_i m_i x_i - \sum_i p_i t = C_2, \tag{30}$$

где

$$C_1 = \sum_i p_i; \qquad C_2 = \text{const}.$$

Далее Энгель отмечает, что в свете полученных взаимосвязей становится понятным вывод Шютца о том, что закон сохранения энергии в сочетании с галилеевским принципом относительности влечет за собой закон сохранения импульса. Действительно, для производящей функции Φ, отвечающей галилеевскому преобразованию (24), скобки Пуассона дают [112]

$$(H, \Phi) = -\sum_i p_i. \tag{31}$$

В заключение Энгель отмечает, что благодаря произведенному им расширению канонического формализма удалось выяснить теоретико-групповой смысл не только законов сохранения импульса и момента импульса, но и законов сохранения энергии и особенно движения центра тяжести, которые «пока ограничивались евклидовой группой ..., казались с лиевской точки зрения как бы упавшими с неба» [113]. Установление взаимосвязи $\mathcal{G}$-симметрия — сохранение произошло, следовательно, через пять лет после установления взаимосвязи $\mathcal{P}$-симметрия — сохранение, и физика, таким образом, проделала в этом вопросе «окольный путь через группу Лоренца» [114].

Глава V

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

«Для специальных групп и вариационных задач это объединение (т. е. объединение методов вариационного исчисления с методами теории групп Ли, ведущее к теоремам Нетер.— *В. В.*) не ново; я упомяну Гамеля и Герглотца, занимавшихся специальными конечными группами, Лоренца и его учеников (например, Фоккера), Вейля и Клейна, занимавшихся специальными бесконечными группами (прежде всего группой, зависящей от четырех произвольных непрерывных функций пространства — времени.— *В. В.*)».

Э. Нетер [1]

Основная статья Э. Нетер, в которой были установлены две общие теоремы, носящие ее имя, и которая в известном смысле явилась итогом длительного развития концепции взаимосвязи симметрия — сохранение, была непосредственно стимулирована проблемой сохранения энергии-импульса в общей теории относительности. Эта проблема была поставлена уже в первых работах Эйнштейна по общей теории относительности (1913—1915). Но общерелятивистский аналог взаимосвязи $\mathscr{E}$-симметрия — сохранение впервые (здесь $\mathscr{E}$ — фундаментальная группа общей теории относительности, т. е. бесконечная непрерывная группа преобразований, зависящая от четырех произвольных непрерывных функций пространства — времени) был сформулирован в работе Д. Гильберта (1915). Вместе с тем сформулированная теорема не была им доказана, но еще более существенный пробел заключался в том, что связь этой теоремы с проблемой сохранения энергии-импульса оставалась невыясненной. Потребовалось примерно два с половиной года (1916—1918), чтобы заполнить названные пробелы. Вслед за Эйнштейном и Гильбертом основной вклад в это дело внесли Ф. Клейн, Г. А. Лоренц, Г. Вейль, Э. Нетер и некоторые другие исследователи, усилия которых увенчались разъяснением проблемы сохранения энергии-импульса в общей теории относительности и установлением общих теорем о взаимосвязи симметрия — сохранение, известных под названием теорем Нетер.

Если первоначально (работы Эйнштейна, Гильберта, Лоренца и др.) исследование проблемы сохранения в общей теории относительности не связывалось с той линией развития взаимосвязи симметрия — сохранение, которой посвящены предыдущие главы, то в последующих работах, особенно Клейна, Гильберта и Э. Нетер (1917—1918), обе линии развития соединились. Таким образом, теоремы Нетер явились действительно результатом, с одной стороны, более чем полуторавековой истории развития концепции взаимосвязи в классической механике и специальной теории относительности и, с другой,— весьма короткого, но интенсивного развития проблемы сохранения энергии-импульса в общей теории относительности.

Этому сравнительно небольшому периоду развития взаимосвязи симметрия — сохранение, который можно было бы назвать общерелятивистским, посвящены настоящая и последующая главы. В этой главе мы сосредоточиваем основное внимание на развитии проблемы сохранения в общей теории относительности от первых работ Эйнштейна (1913—1916) и Гильберта (1915) вплоть до установления теорем Нетер (1918). Центральную роль в этом развитии играла «геттингенская цепочка»: Гильберт — Клейн — Э. Нетер, которая наиболее непосредственно была связана с генезисом нетеровских теорем.

В следующей главе исследуется в первую очередь основная работа Э. Нетер, в которой и были доказаны ее знаменитые теоремы.

Эйнштейн (1913—1916)

> «Грандиозные задачи, поставленные Эйнштейном, а также разработанные для их решения методы, его глубоко идущие мысли и образование оригинальных понятий ... открыли для исследований по основаниям физики новые пути».
>
> Д. Гильберт [2]

Впервые идея применения римановой геометрии и тензорного исчисления к теории тяготения, понимание тензорного характера гравитационного потенциала, отождествленного с метрическим тензором пространства — времени, отождествление уравнений гравитационного поля с тензорным аналогом уравнения Пуассона и ряд других важных элементов общей теории относительности были высказаны в совместной работе Эйнштейна и М. Гроссмана «Проект обобщенной теории относительности и теории тяготения» [3]. Она состояла из двух частей: первая, «физическая», была написана Эйнштейном, вторая, «математическая», — М. Гроссманом, который помог Эйнштейну освоить методы тензорного исчисления и римановой геометрии, основы которых были заложены в работах Римана, Кристоффеля, Риччи, Леви-Чивиты. Мы остановимся в основном на вопросах, относящихся к проблеме сохранения энергии-импульса. Переход к произвольным криволинейным координатам, и, соответственно, общему тензорному анализу имел нетривиальный характер, так как непосредственно связывался с отождествлением потенциалов гравитационного поля с компонентами метрики на основе принципа эквивалентности. При этом

Эйнштейн с самого начала стремился к общековариантной формулировке по возможности наибольшего количества утверждений. Вполне корректно удалось это сделать для уравнений движения материальной точки и системы материальных точек, электромагнитного поля и, что для нас наиболее существенно, для закона сохранения энергии-импульса «материи»,[4] в присутствии гравитационного поля, уравнения которого в этой работе еще не удалось сделать общековариантными.

В примечании к физической части Эйнштейн приводит некоторое время казавшуюся ему убедительной ошибочную аргументацию несовместимости требования общей ковариантности уравнений гравитационного поля с принципом причинности. Суть ее заключалась в том, что общековариантные уравнения не могут однозначно определять гравитационные потенциалы g_{ik} в зависимости от распределения «материи» в пространстве — времени. Впоследствии Гильберт исчерпывающе разъяснил это обстоятельство, показав, что неоднозначность g_{ik}, вызванная общей ковариантностью уравнений, не является физической, и противоречия с принципом причинности не возникает [5].

Вернемся к закону сохранения энергии-импульса «материи» в присутствии гравитационного поля. В § 4 обсуждаемой работы рассматривается движение непрерывно распределенных несвязанных масс в произвольном поле тяготения. Используя уравнения движения материальной точки, полученные в § 3 из вариационного принципа, после несложных преобразований авторы получают выражение для закона сохранения энергии-импульса рассматриваемой системы в следующем виде (дифференциальная форма) [6]:

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sqrt{-g}\, g_{\sigma\mu}\theta_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\,\theta_{\mu\nu} = 0 \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4), \tag{1}$$

где $\theta_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса «материи». В математической части (§ 4, п. 1) дано простое доказательство общей ковариантности этого уравнения. Конечно, уравнение (1) справедливо не только для случая движения системы непрерывно распределенных несвязанных масс — «это соотношение выражает вообще энергетический баланс между гравитационным полем и любой материальной системой; необходимо лишь придать $\theta_{\mu\nu}$ то значение, которое соответствует тензору энергии натяжения (т. е. энергии-импульса.— *В. В.*) рассматриваемой системы» [7]. Второй член при этом может быть естественно отождествлен с воздействием гравитационного поля на «материю». Уравнение (1) аналогично дифференциальной форме закона сохранения энергии-импульса в специальной теории относительности:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} T_{\sigma\nu} = 0, \tag{2}$$

которое в результате интегрирования по пространственным координатам приводит к интегральной форме законов сохранения

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} T_{\sigma 4}\, d\tau = 0. \qquad (3)$$

В присутствии же гравитационного поля как раз второй член уравнения (1), означающий воздействие гравитации на материю, не дает возможности, ввиду его недивергентного характера, перейти к интегральной форме типа (3). Из уравнения (1), таким образом, следует, что при наличии гравитационного поля компоненты тензора энергии-импульса одной лишь «материи» никаким законам сохранения не удовлетворяют. Чтобы получить некоторое подобие уравнения (3) и в присутствии гравитационного поля, уравнения (1) следует привести к дивергентной форме типа (2), например, к виду:

$$\sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\sqrt{-g}\, g_{\sigma\mu}(\theta_{\mu\nu}+\vartheta_{\mu\nu}) = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4). \qquad (4)$$

Тогда объект $\vartheta_{\mu\nu}$ (желательно, чтобы это был тензор относительно группы $\mathscr{E}$) можно отождествить с компонентами энергии-импульса гравитационного поля. Уверенность в существовании закона сохранения энергии-импульса системы «материя» + гравитация в форме, аналогичной (4), служила для Эйнштейна важным эвристическим началом при выводе уравнений гравитационного поля, рассматриваемых в этой работе как обобщение уравнения Пуассона:

$$\Delta\varphi = 4\pi\varkappa\rho. \qquad (5)$$

В качестве такого обобщения авторы взяли простейшее уравнение:

$$\varkappa\theta_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}, \qquad (6)$$

где величина $\Gamma_{\mu\nu}$ — должна быть тензором второго ранга, образованным из производных метрического тензора. Будучи обобщением (5), уравнение (6) должно быть уравнением второго порядка, т. е. содержать производные g_{ik} второго порядка.

Вместе с тем авторы, как мы уже отмечали, ошибочно полагали принципиальную неприемлемость общей ковариантности уравнений (6), ограничиваясь для начала лишь требованием инвариантности относительно группы аффинных преобразований. При этом и $\Gamma_{\mu\nu}$ должен быть лишь аффинным тензором. Впрочем, авторы допускали возможность расширения аффинной группы, но только конечнопараметрическое, т. е. до более широкой, но конечнопараметрической группы Ли. Названные условия на $\Gamma_{\mu\nu}$ еще не ограничивали его однозначно. Последнее удалось сделать, лишь потребовав выполнимость закона сохранения энергии-импульса для системы «материя» + гравитационное поле в форме (4), который также должен был выполняться только аффинно-инвариантным образом. Эти требования привели к следующему выражению для $\Gamma_{\mu\nu}$:

$$\Gamma_{\mu\nu} = \Delta_{\mu\nu} - \varkappa\vartheta_{\mu\nu}, \tag{7}$$

где $\Delta_{\mu\nu}$ — некоторое выражение, зависящее от величин $g_{\mu\nu}$, $\gamma_{\mu\nu}$ и их производных до второго порядка включительно [формула (15) обсуждаемой работы], причем $\gamma_{\mu\nu}$ представляют собой миноры $g_{\mu\nu}$, деленные на определитель $|g_{\mu\nu}| = g$. Определенный интерес представляет выражение для $\vartheta_{\mu\nu}$, образующее контрвариантный аффинный тензор второго ранга и являющееся тензором (аффинным) энергии-импульса гравитационного поля:

$$\vartheta_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\varkappa}\sum_{\alpha,\beta,\tau,\rho}\left(\gamma_{\alpha\mu}\gamma_{\beta\nu}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\right). \tag{8}$$

Легко получить отсюда соответствующие ковариантные ($t_{\mu\nu}$) и смешанные ($\sqrt{-g}g_{\sigma\mu}\vartheta_{\mu\nu}$) аналоги тензора $\vartheta_{\mu\nu}$. Тогда уравнения гравитационного поля записываются в виде

$$\Delta_{\mu\nu}(\gamma) = \varkappa(\theta_{\mu\nu} + \vartheta_{\mu\nu}). \tag{6'}$$

Наряду с уравнениями поля получаются и уравнения сохранения в форме (4), так как уравнения (6′) были выведены исходя из требования выполнения закона сохранения в форме (4). В силу лишь аффинной ковариантности уравнений (6), (6′) закон сохранения (4) определяется только аффинно-ковариантным образом, причем $\vartheta_{\mu\nu}$ — также только аффинный тензор, в настоящее время известный как «псевдотензор» энергии-импульса гравитационного поля [8]. Забегая вперед, заметим, что если в окончательном варианте общей теории относительности закон сохранения энергии-импульса в форме (4), как и уравнения поля (6) и (6′), приобрели общековариантный характер, то «псевдотензор» энергии-импульса гравитационного поля, сохранив, по существу, форму (8), так и остался аффинным тензором, почему и был назван «псевдотензором».

Оба закона сохранения, как в форме (1), так и в форме (4), были выведены без явного учета их взаимосвязи с принципами симметрии в том или ином виде. Действительно, закон сохранения (1) был получен путем некоторых формальных преобразований, а закон сохранения (4) — на основе соображений соответствия уравнений (5) и (6) посредством также некоторых преобразований.

Любопытно, что в этой работе авторы были близки к построению основ правильной общековариантной теории тяготения. Так, в «Математическом дополнении» они указывают, что требования общей ковариантности весьма жестко ограничивают выбор тензора, эквивалентного $\Gamma_{\mu\nu}$: по существу говоря, единственным таким тензором второго ранга и второго порядка является свернутый по двум индексам тензор кривизны R_{ik} (в обозначениях Эйнштейна и Гроссмана — G_{ik}). Но ошибочный вывод об отсутствии соответствия между R_{ik} и $\Delta\varphi$ в слабых статических полях, а также соображения общего характера, выдвинутые Эйнштейном против общей ковариантности уравнений гравитационного поля, отодвинули решение проблемы, по крайней мере, еще на два с лишним года.

К рассмотренной здесь фундаментальной работе непосредственно примыкают две работы обзорного характера [9]. В первой из них Эйнштейн привел дополнительные аргументы в пользу того, что $\vartheta_{\mu\nu}$ следует рассматривать как компоненты энергии-импульса гравитационного поля: он показал, что для замкнутых систем величины

$$J_\sigma = \int \sqrt{-g}\, g_{\sigma\mu}(\theta_{\mu4} + \vartheta_{\mu4})\, dv,$$

образованные из уравнения (4), являются компонентами 4-вектора, причем четвертая компонента совпадает с полной энергией замкнутой системы. В другой работе Эйнштейн несколько видоизменяет аргументацию отказа от требования общей ковариантности уравнений гравитационного поля, на чем мы не будем останавливаться.

Последней большой работой этого цикла, т. е. в то время, когда Эйнштейн еще отказывался от общей ковариантности уравнений гравитационного поля, была работа 1914 г. «Формальные основы общей теории относительности» [10]. В ней был более детально развит и усовершенствован математический аппарат, а также впервые обсуждены два экспериментально проверяемых следствия. Для нас существенно, что Эйнштейн в этой работе систематически использовал вариационный принцип для вывода уравнений гравитационного поля с лагранжианом, инвариантным относительно аффинных преобразований:

$$H = \sum_{\mu\rho\tau\tau'} g^{\tau\tau'} \Gamma^{\rho}_{\mu\tau} \Gamma^{\mu}_{\rho\tau'}. \tag{9}$$

Для систем с обращением в нуль вариаций Δx_μ и $\frac{\partial(\Delta x_\nu)}{\partial x_\sigma}$ на границе области интегрирования Эйнштейн посредством формальных преобразований получает закон сохранения энергии-импульса в форме

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(g^{\nu\tau} \frac{\partial H \sqrt{-g}}{\partial g^{\sigma\tau}_{\alpha}} \right) = 0, \tag{10}$$

совпадающий с законом сохранения в форме (4) с тем же самым выражением для $\vartheta_{\mu\nu}$.

Таким образом, начало применению вариационных принципов для вывода уравнений гравитационного поля и законов сохраненою также положил Эйнштейн. Правда, выражение для псевдотензора $\vartheta_{\mu\nu}$, найденное в работах 1913—1914 гг., сохранилось и в окончательной общековариантной теории. В одной из последующих статей 1914 г. Эйнштейн опять-таки совместно с Гроссманом сделал попытку выйти за рамки аффинной инвариантности, сохранив, однако, конечнопараметрический характер группы симметрии [11]. Это приводило к неоправданному усложнению теории.

Наконец, в статье, поступившей в редакцию 11 ноября 1915 г., Эйнштейн находит путь, который через три недели привел его к правильным уравнениям тяготения и затем — к систематическому построению общей теории относительности [12]. В этой работе Эйнштейн возвращается к идее, лишь намеченной в «Проекте» [13], согласно которой обобщением лапласиана Δ должен являться свернутый по двум индексам тензор кривизны G_{ik} (или линейная комбинация G_{ik}, $g_{ik}G$, g_{ik}) как единственно возможный и естественно построенный общековариантный тензор второго ранга и второго порядка по производным g_{ik}. Очевидно, от аргументов, связанных с мнимым нарушением причинности, рассматриваемым как неизбежное следствие общей ковариантности уравнений поля, Эйнштейн отказался, хотя об этом явно в статье не упоминается. Простейшие формальные уравнения гравитационного поля, согласно требованию общей ковариантности (11), выглядят следующим образом:

$$G_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu}. \tag{11}$$

Далее, Эйнштейн для простоты накладывает дополнительное ограничение $\sqrt{-g} = 1$, что приводит к использованию лишь, так сказать, половины тензора кривизны. Это, конечно, является еще некоторым ограничением требования общей ковариантности, так как ограничение $\sqrt{-g} = 1$ неразрывно связано с «бесследностью» тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$. Эйнштейн показывает также возможность вывода уравнений (11) из вариационного принципа:

$$\delta \int \Big(\mathscr{L} - \varkappa \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}\Big)\, d\tau = 0 \tag{12}$$

с лагранжианом

$$\mathscr{L} = \Sigma g^{\sigma\tau} \Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta} \Gamma^{\beta}_{\tau\alpha}.$$

Для нас существенно, как выводится здесь закон сохранения энергии-импульса. Используя закон сохранения энергии-импульса «материи» в форме (1) и уравнения поля в виде (11), совпадающие с уравнениями Лагранжа — Эйлера вариационной задачи (12)

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = \varkappa T_{\mu\nu}, \tag{12'}$$

Эйнштейн путем формальных преобразований получает закон сохранения энергии-импульса системы «материя» + гравитационное поле типа (4):

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} (T_{\sigma}^{\lambda} + t_{\sigma}^{\lambda}) = 0,$$

где

$$t_{\sigma}^{\lambda} = \frac{1}{2\varkappa} \left(\mathscr{L}\delta_{\sigma}^{\lambda} - \Sigma g_{\sigma}^{\mu\nu} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\lambda}^{\mu\nu}} \right) \tag{13}$$

— тензор относительно линейных преобразований, который совпадает с ранее полученным псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля (8). Вопросы же о трансформационных свойствах $\mathscr{L}$, о специфических особенностях законов сохранения в общековариантных теориях, о переходе к интегральной форме законов сохранения, а главное, о взаимосвязи симметрия —сохранение в этой работе фактически не рассматриваются.

В следующей работе, поступившей в редакцию 18 ноября 1915 г., Эйнштейн пытается получить действительно общековариантные уравнения гравитационного поля посредством введения дополнительного предположения в духе Г. Ми о структуре T_{ik}, заключающегося в том, что материя должна сводиться к электромагнитному полю, т. е.

$$\Sigma T_{\mu\mu} = 0.$$

После этого выбор $\sqrt{-g} = 1$ уже не был принципиальным ограничением общей ковариантности. Однако это достигалось слишком дорогой ценой. Окончательное решение проблемы Эйнштейн нашел в статье, поступившей в печать 2 декабря 1915 г., в которой он, отказываясь от гипотезы бесследности T_{ik}, в отличие от уравнения (11), рассматривает уравнение поля в виде

$$G_{im} = -\varkappa \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right) \tag{14}$$

или эквивалентное ему

$$G_{im} - \frac{1}{2} g_{im} G = -\varkappa T_{im}, \tag{14'}$$

такое, что ковариантная дивергенция T_{im} тождественно обращается в нуль, так как ковариантная дивергенция левой части аннулируется в силу тождества Бьянки [17].

Таким образом, закон сохранения энергии-импульса «материи» сыграл важную эвристическую роль, позволив скорректировать уравнения поля и достичь их общей ковариантности. Разумеется, весьма существенным было также установление тождественного характера закона сохранения энергии-импульса «материи», что свидетельствовало о важных различиях между законами сохранения в теориях типа классической механики и специальной теории относительности, с одной стороны, и общей теории относительности, с другой.

Прежде чем перейти к анализу работы Гильберта 1915 г. [18], рассмотрим большую работу Эйнштейна, обобщающую и систематизирующую все полученные ранее результаты Эйнштейна и опубликованную в марте 1916 г. [19] Заметим, что упомянутая работа Гильберта едва ли существенно повлияла на обсуждаемую работу Эйнштейна. По существу говоря, основные идеи общей теории относительности с их подробным обоснованием и большинство важнейших результатов были впервые систематически изложены именно в этой статье.

Не будем останавливаться на ряде конкретных результатов, полученных в этой работе. Упомянем лишь о некоторых из них, связанных с проблемой сохранения и взаимосвязи симметрия-сохранение. Прежде всего в работе развита более детально аргументация в пользу требования общей ковариантности теории, включая уравнения гравитационного поля («Так как все наши физические опытные данные можно в конце концов свести к пространственно-временны́м совпадениям, то заранее нет никакого основания отдавать предпочтение какой-либо одной координатной системе перед другими, т. е. мы приходим к требованию общей ковариантности» [20]). Хотя Эйнштейн по-прежнему принимает условие $\sqrt{-g}=1$, теперь это не означает ограничения общей ковариантности: сначала устанавливается общековариантный характер утверждений теории, а затем производится упрощающий выбор систем координат; обратный переход к общековариантной записи в каждом случае легко осуществим [21].

Как и в более ранних работах [22], Эйнштейн показывает возможность вывода уравнений гравитационного поля из вариационного принципа с лагранжианом типа (9) и получает аналогичное же выражение для псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля. Выбор указанного псевдотензора в качестве компонент энергии-импульса гравитационного поля оправдывается главным образом возможностью естественного перехода от дифференциальной к интегральной форме закона сохранения. Однако вопрос об этом переходе и трансформационных свойствах интегрального вектора энергии-импульса не обсуждается. Не обсуждаются также трудности, связанные с нетензорным характером «псевдотензора» энергии-импульса и невозможностью установления общековариантного и физически удовлетворительного смысла локального распределения энергии-импульса поля тяготения.

Закон сохранения «материи» в (дифференциальной форме) типа (1) получается посредством несложных преобразований уравнений поля с использованием закона сохранения энергии-импульса в форме (4). Эти уравнения имеют тождественный характер и соответствуют четырем условиям, накладываемым уравнениями гравитации на уравнения «материальных» процессов. Именно в этом месте Эйнштейн ссылается на работу Гильберта 1915 г., который впервые разъяснил это обстоятельство на основе сформулированного им общерелятивистского аналога взаимосвязи симметрия — сохранение.

Таким образом, хотя в упомянутых работах Эйнштейна и были заложены основы общей теории относительности и в значительной мере выяснена известная специфичность закона сохранения энергии-импульса, связанная прежде всего с псевдотензорным характером компонент энергии-импульса гравитационного поля, а также эффективно использовались и вариационные принципы — достаточно полного анализа проблемы сохранения проведено не было, а главное, взаимосвязь симметрия — сохранение в явном виде не использовалась и не обсуждалась.

Гильберт (1915)

> «Эта теорема ... содержит в качестве существенного ядра одно математическое утверждение, которое было для меня лейтмотивом при построении теории ... Общее доказательство этого утверждения дала Э. Нетер...»
>
> Д. Гильберт[2]

> «... Теорема Гильберта о том, что между уравнениями поля теории относительности имеют место четыре соотношения, также находит свое обобщение, полученное фрл. Нетер».
>
> Ф. Клейн[23а]

Рассмотрим статью Гильберта 1915 г. [24], которая явилась первым звеном в «геттингенской цепочке» работ, приведших к установлению теорем Нетер. Значение основоположных исследований Эйнштейна одним из первых по достоинству оценил именно Гильберт, который в принципе общей относительности увидел реальную возможность аксиоматического построения единой полевой теории. В то время как многие известные исследователи, по крайней мере, в 1913—1916 гг. были весьма скептически настроены по отношению к общей теории относительности (Планк, Абрагам, Ми, Нордстрем, Кречман и др.) [25], считая, что корректная теория тяготения может быть построена только в рамках специальной теории относительности, Гильберт уже в 1915 г. понял фундаментальное значение принципа общей ковариантности и на пути к построению единой теории поля на этой основе независимо от эйнштейновских работ 1915 г. нашел (фактически одновременно с Эйнштейном) правильные общековариантные уравнения гравитационного поля. В упомянутой работе, кроме того, содержался глубокий анализ проблемы сохранения в общей теории относительности и ее связи с общей ковариантностью.

В начале 1916 г. к разработке некоторых математических вопросов, поставленных работой Гильберта, подключается Э. Нетер, только что приехавшая в Геттинген по приглашению Гильберта. Под впечатлением гильбертовской работы и в результате бесед с Э. Нетер к исследованию проблемы сохранения присоединяется и Ф. Клейн, увидевший в общей теории относительности своеобразную физическую реализацию «Эрлангенской программы». Именно эти исследования Клейна и Э. Нетер, непосредственно связанные с работой Гильберта, и привели к обстоятельному разъяснению проблемы сохранения в общей теории относительности и теоремам Нетер.

Как мы уже упоминали, Гильберт был математиком чрезвычайно широкого диапазона, включающего не только почти все разделы математики, но и многие разделы математической и теоретической физики. Заметной чертой его исследований был постоянный интерес к проблемам аксиоматики. По-видимому, он был одним из основателей современного аксиоматического подхода не только в математике, но и в теоретической физике. Известны его блестящие работы по аксиоматике геометрии, арифметики, математической логики, анализа [26]. В своем знаменитом докладе «Математические проблемы» (1900) в качестве одной из фундаментальных проблем он называет задачу аксиоматического построения физики (проблема № 6) [27].

Проблема аксиоматического обоснования физики всегда была связана с концепцией «единства» физической теории (Гильберт называет ее «Einheitsideal») [28]. Ньютоновские аксиомы механики были основой для единого механистического описания и понимания физики в целом вплоть до конца XIX и начала XX в. (механистический «Einheitsideal»). Однако уже максвелловская электродинамика и в особенности специальная теория относительности привели к падению механистического «идеала единства» и укрепили полевую концепцию. Но в максвелл-лоренцовской теории поля, даже с учетом релятивизма, вещество и поле рассматривались как принципиально различные объекты. Заслуга Г. Ми заключалась в провозглашении теоретико-полевого «идеала единства», на основе которого элементарные частицы (т. е. электрон и протон) могли бы рассматриваться как следствия полевых уравнений (1912) [29]. Иными словами, Ми впервые поставил задачу такого обобщения уравнений поля, чтобы кулоновские силы отталкивания внутри элементарных частиц уравновешивались другими силами, но также электромагнитного происхождения, и чтобы за пределами частиц отклонения от максвелл-лоренцовской теории были бы пренебрежимо малы. Реализация этой идеи была основана, по существу говоря, на аксиоматическом подходе, причем за основу принимался вариационный принцип с чисто полевым лагранжианом, инвариантным относительно $\mathscr{P}$-группы и сконструированным из напряженностей F_{ik} и 4-потенциала φ_i, явно входящего в теорию Ми. Теория Ми в настоящее время, несмотря на ее явную ошибочность, хорошо известна и описана более или менее подробно в ряде книг [30]. Поэтому мы не будем останавливаться на ней, отметив лишь, что ее несостоятельность заключается прежде всего в калибровочной неинвариантности теории, которая с физической точки зрения означает невозможность существования заряженных частиц даже в постоянном внешнем потенциальном поле [31]. Несмотря на это, программа Ми и способ ее реализации были глубоки и несомненно должны были привлечь внимание теоретиков, интересующихся проблемами единой теории поля и аксиоматизации физики.

Гильберт высоко оценивал работу Ми: «Г. Ми первым указал путь, на котором этот вновь возникший теоретико-полевой «идеал единства», как я назвал бы его, может оказаться достаточным для общей математической разработки» [32]. Однако уже после начала общерелятивистских исследований Эйнштейна 1912—1914 гг. выяснилась невозможность включения гравитации в лоренц-ковариантную теорию поля [33]. Эйнштейн с самого начала при построении теории тяготения стремился к достижению общей ковариантности уравнений физики, но неизбежность требования общей ковариантности также и уравнений гравитационного поля он понял лишь в ноябре 1915 г. [34]. Гильберт независимо от ноябрьских-декабрьских работ Эйнштейна, основываясь, по-видимому, лишь на его работах 1913—1914 гг., сразу понял фундаментальное и всеобщее значение требования общей ковариантности. Именно в объединенном ми-эйнштейновском подходе он увидел возможность аксиоматического построения единой физической теории на основе теоретико-полевого «идеала единства», чему и была посвящена его статья «Основания физики», доложенная на заседании Геттингенского математического общества 20 ноября 1915 г. и затем опубликованная в последней тетради «Gött. Nachrichten» за 1915 г. [35] Одна из главных идей Гильберта, на которой была основана реализация теоретико-полевого «идеала единства», заключалась в использовании утверждения, представляющего собой в действительности общерелятивистский аналог взаимосвязи симметрия — сохранение (теорема I Гильберта) [36].

Гильберт начинает с введения многообразия переменных, однозначно определяющих «мировые точки», в которых происходят «физические события». «Мировая точка» определяется четверкой «наиболее общих пространственно-временны́х координат» («мировые параметры» w_s $(s = 1, 2, 3, 4)$). Величны, характеризующие «физическое событие» в «мировой точке» w_s, следующие: 1) десять гравитационных потенциалов $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$, образующих симметричный тензор второго ранга относительно произвольных преобразований w_s, точнее, преобразований $\mathscr{E}$-группы; 2) четыре электродинамических потенциала q_s, образующих 4-вектор.

Далее вводятся две фундаментальные аксиомы, существенно ограничивающие произвол «физических событий».

Аксиома I (аксиома Ми): «Закон физического события определяется мировой функцией H, которая зависит от следующих аргументов:

$$g_{\mu\nu},\ g_{\mu\nu l} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial w_l},\qquad g_{\mu\nu lk} = \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial w_l \partial w_k}\qquad (k, l = 1, 2, 3, 4), \tag{15}$$

$$q_s,\ q_{sl}. \tag{15'}$$

Вариация интеграла

$$\int H \sqrt{g}\, d\omega, \tag{16}$$

где $g = |g_{\mu\nu}|$, $d\omega = dw_1 dw_2 dw_3 dw_4$, должна быть равна нулю для любого из 14 потенциалов $g_{\mu\nu}$, q_s [37]». (Заметим, что для удобства можно вместо $g_{\mu\nu}$ рассматривать $g^{\mu\nu} = \frac{(\text{минор } g)_{\mu\nu}}{g}$ соответственно $g_l^{\mu\nu}$, $g_{lk}^{\mu\nu}$, что в дальнейшем и делает Гильберт.)

Аксиома II (аксиома об общей инвариантности). «Мировая функция H инвариантна по отношению к любому преобразованию мировых параметров w^s» [38].

В первой аксиоме постулируется, по существу, вариационная структура теории (т. е. выводимость основных уравнений поля и движения из принципа действия) и тот набор переменных, от которых зависит лагранжиан, т. е. мировая функция H. Вторая аксиома в достаточной степени сильно ограничивает выбор H и, по существу, означает, что «связь потенциалов $g_{\mu\nu}$, q_s сама по себе совершенно не зависит от способа, которым установлено соответствие между мировыми точками и мировыми координатами» [39]. В примечании к этим аксиомам Гильберт указывает, что Ми аналогичным образом строил свою теорию на базе лишь $\mathcal{P}$-инвариантности. Что же касается аксиомы II, то в ней «основная мысль Эйнштейна об общей инвариантности находит свое простейшее выражение» [40]. Однако «у Эйнштейна принцип Гамильтона играет только второстепенную роль, и его функции H никоим образом не являются общими инвариантами и не содержат электрических потенциалов» [41]. Действительно, в работах Эйнштейна 1913—1914 гг., если и применялись вариационные принципы, то лагранжианы были лишь аффинно инвариантными. В качестве основного положения, объединяющего гравитацию и электромагнетизм на базе сформулированных аксиом, Гильберт выдвигает теорему I, которая и представляет собой фактически общерелятивистский аналог взаимосвязи симметрия — сохранение, т. е. частный случай второй теоремы Нетер, примененный к бесконечной непрерывной группе, зависящей от четырех произвольных непрерывных функций [42]. Сразу же подчеркнем, что теорема I дана без доказательства, которое для более общего случая было дано лишь в основной статье Э. Нетер [43]; кроме того, и это весьма важно, связь этой теоремы с проблемой сохранения в рассматриваемой работе явно еще не обнаруживается.

Приведем формулировку этой теоремы.

«Основой для построения моей теории служит математическое предложение, доказательство которого я изложу в другом месте.

Теорема I. Если выражение I инвариантно по отношению к любым преобразованиям и содержит n величин и их производных и если из условия $\delta \int I \sqrt{g}\, d\omega = 0$ составить n лагранжевых вариационных уравнений для n величин, то в этой инвариантной системе n дифференциальных уравнений *четыре* всегда являются следствием $(n - 4)$ остальных, в том смысле, что всегда четыре независящие одна от другой линейные комбинации этих уравнений и их полных производных тождественно удовлетворяются»[41].

Аксиома I в соответствии с десятью гравитационными потенциалами $g_{\mu\nu}$ позволяет получить десять уравнений Лагранжа — Эйлера («уравнения тяготения»):

$$\frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial g^{\mu\nu}} - \sum_k \frac{\partial}{\partial w_k} \frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial g_k^{\mu\nu}} + \sum_{kl} \frac{\partial^2}{\partial w_k \partial w_l} \frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} = 0,$$

$$(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4), \tag{17}$$

а в соответствии с четырьмя электродинамическими потенциалами q_s — четыре уравнения (обобщенные уравнения Максвелла):

$$\frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial q_h} - \sum_k \frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial q_{hk}} = 0 \qquad (h = 1, 2, 3, 4). \tag{18}$$

Уравнения (17) и (18) в дальнейшем для краткости обозначены:

$$(17) \equiv [\sqrt{g}H]_{\mu\nu}, \qquad (18) \equiv [\sqrt{g}H]_h.$$

Далее, на основании теоремы I Гильберт заключает, что *четыре* уравнения (18) можно рассматривать как следствие уравнений (17), т. е. «что в указанном смысле электродинамические явления суть следствия тяготения»[45]. Таким образом, требование общей ковариантности приводит к числу основных уравнений, меньшему числа основных переменных. В работах 1913—1914 гг. Эйнштейн это обстоятельство, как мы видели, использовал для аргументации отказа от принципа общей ковариантности уравнений гравитационного поля, считая, что такая неопределенность в решении противоречит принципу причинности. Впоследствии он, по-видимому, понял ошибочность этого вывода, о чем свидетельствует его основная статья 1916 г.[46] Не лишним будет заметить, что Э. Мах, сыгравший известную роль в подготовке идей теории относительности[47], исходя из общих соображений релятивистского характера, еще в 1872 г. пришел к выводу, что число уравнений, определяющих физические явления, должно быть меньше числа переменных, описывающих эти явления[48].

Приведем одно высказывание Маха в этой связи:

«Закон причинности тождествен с предположением, что между явлениями природы α, β, ..., ω существуют известные уравнения. В каком числе и в какой форме эти уравнения существуют, закон причинности ничего нам не говорит. Установить это — задача позитивного естествознания. Но ясно следующее. Если бы число уравнений было больше или равно числу явлений α, β, ..., ω, то именно поэтому все явления были бы чрезмерно или, по крайней мере, совершенно определены. Факт изменения природы доказывает, следовательно, что число уравнений меньше числа явлений α, β,..., ω» [49].

Суть дела, которая была наиболее исчерпывающе разъяснена Гильбертом во втором сообщении «Основания физики» (1917) [50], но уже ясно намечена и в обсуждаемой статье 1915 г., заключается в том, что общее решение общековариантных уравнений поля должно содержать четыре произвольные функции в силу произвола в выборе систем координат. Поэтому среди десяти уравнений для десяти неизвестных g_{ik} должны иметь место четыре тождества и потому лишь шесть независимых уравнений, что и гарантируется *теоремой* I. При этом никакого противоречия с принципом причинности в действительности не возникает, так как все возможные решения полевых уравнений остаются *физически* совершенно эквивалентными, отличаясь друг от друга лишь формально.

Разумеется, вывод, что электродинамика может рассматриваться как следствие тяготения, основанный на вполне корректной, как показали последующие исследования Э. Нетер, теореме I, неразрывно связан с той частью аксиомы Ми, в которой постулируется зависимость H от электродинамических потенциалов наравне с гравитационными $g_{\mu\nu}$. Но уже Эйнштейн в «Основах общей теории относительности» (март 1916 г.) указал, ссылаясь, кстати говоря, на рассматриваемую статью Гильберта, что «уравнения гравитационного поля содержат *четыре* условия, которым должны удовлетворять *материальные* процессы» [51] и которые Эйнштейн записывает в виде закона энергии-импульса «материи»:

$$\frac{\partial T_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\,T_{\mu\nu} = 0 \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4). \tag{19}$$

Только в том случае, когда «материальный» процесс описывается четырьмя независимыми друг от друга дифференциальными уравнениями, четыре тождества, вытекающие из теоремы I, могут быть квалифицированы как уравнения «материи», в частности, в случае принятия гипотезы Ми, как «обобщенные уравнения Максвелла». Эйнштейн, однако, воздерживался от такой интерпретации четырех тождеств, являющихся следствием общей ковариантности вариационного функционала, предпочитая их толковать как условия на «материальный» процесс, в частности, как уравнения сохранения энергии-импульса «материи» [52].

Таким образом, сама *теорема* I Гильберта не связана с интерпретацией четырех тождеств как уравнений электродинамики. Сразу же после теоремы I формулируются две чисто математические теоремы (теоремы II и III), позволяющие, с одной стороны, конкретизировать характер взаимосвязи гравитации и электромагнетизма, а с другой — сделать некоторые заключения о форме закона сохранения энергии-импульса в общей теории относительности.

Опуская доказательства названных теорем [53], мы только сформулируем и покажем их место в получении важных физических выводов, касающихся прежде всего проблемы сохранения. Теорема II может быть сформулирована так: если J — инвариант относительно преобразований $\mathscr{E}$-группы, то верно тождество

$$\sum_s \frac{\partial J}{\partial w_s} p^s = PJ, \tag{20}$$

где приняты следующие обозначения: p^s — произвольный контравариантный вектор, который можно отождествить с бесконечно малым приращением «мировых координат»:

$$p^s = \delta w^s = \overline{w}^s - w^s;$$

$P = P_g + P_q$ — дифференциальный оператор;

$$P_g = \sum_{\mu\nu lk} \left(p^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} + p_l^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial g_l^{\mu\nu}} + p_{lk}^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial g_{lk}^{\mu\nu}} \right),$$

$$P_q = \sum_{lk} \left(p_l \frac{\partial}{\partial q_l} + p_{lk} \frac{\partial}{\partial q_{lk}} \right),$$

$$p^{\mu\nu} = \delta g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(w) - \bar{g}^{\mu\nu}(\overline{w}).$$

Как показывает несложное вычисление [54]:

$$p^{\mu\nu} = \sum_s (g_s^{\mu\nu} p^s - g^{\mu s} p_s^\nu - g^{\nu s} p_s^\mu); \qquad p_s^j = \frac{\partial p^j}{\partial w_s};$$

$$p_i = \sum_s (q_{is} p^s + q_s p_i^s); \qquad p_k^{\mu\nu} = \frac{\partial p^{\mu\nu}}{\partial w_k};$$

$$p_{kl}^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 p^{\mu\nu}}{\partial w_k \partial w_l}; \qquad p_{lk} = \frac{\partial p_l}{\partial w_k}$$

Особенно важной представляется теорема III, по существу говоря, тесно связанная с теоремой I. Теорема III формулируется следующим образом: если J — инвариант относительно $\mathscr{E}$-группы, зависящий только от $g^{\mu\nu}$ и их производных, то верно тождество

$$i_s = \sum_l \frac{\partial i_s^l}{\partial w_l}, \tag{21}$$

где

$$i_s = \sum_{\mu\nu} [\sqrt{g}J]_{\mu\nu} g_s^{\mu\nu}, \qquad i_s^l = -2\sum [\sqrt{g}J]_{\mu s} g^{\mu l}.$$

Ниже мы увидим, что как раз эти тождества (21) и приводят к четырем тождествам, о которых упоминалось в теореме I. В 1924 г. Гильберт, несколько упростив работу 1915 г. (первое сообщение) и объединив ее со вторым сообщением на эту тему 1917 г. [55], опубликовал работу также под названием «Основания физики», которую он включил в третий том «Собрания сочинений» [56]. В примечании к теореме III, которая фигурирует там как теорема II, Гильберт указывает: «Эта теорема II содержит в качестве существенного ядра одно общее математическое утверждение, которое было для меня лейтмотивом при построении рассматриваемой теории» [57]. Этим «общим математическим утверждением» и являлась теорема I первого сообщения, которую в изложение 1924 г. Гильберт не включил, ограничившись теоремой III и только упомянув о теореме I в примечании. Далее, там же он подчеркнул, что обобщение теоремы I было доказано вполне строгим и общим образом Э. Нетер в 1918 г.

Доказательство теоремы III основано на теореме II и стандартных преобразованиях, характерных для вариационного исчисления [58]. С помощью этих теорем Гильберту удается получить важные выводы о характере взаимодействия гравитационного и электромагнитного полей и законе сохранения энергии-импульса. При этом он опирается еще на одну аксиому, которая в работе 1924 г. фигурировала как аксиома III (аксиома гравитации и электромагнетизма): мировая функция H имеет вид: $H = K + L$, где $K = \Sigma g^{\mu\nu} K_{\mu\nu}$ — инвариант тензора Римана — Кристоффеля, а L — лагранжиан электромагнитного поля, зависящий только от $g^{\mu\nu}$, q_s, q_{sk}. Попутно при этом Гильберт на основании трех аксиом непосредственно получает уравнения гравитации в форме, найденной Эйнштейном в работе, поступившей в печать только 2 декабря 1915 г. [59] Гильберт их записывает в форме

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g}\, L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0, \tag{22}$$

где $[\sqrt{g}K]_{\mu\nu}$ легко приводится к виду

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} = \sqrt{g}\left(K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} K g_{\mu\nu}\right).$$

Прежде чем выяснить смысл величины $\partial\sqrt{g}\, L/\partial g^{\mu\nu}$, которая, очевидно, должна совпасть с тензором энергии-импульса «материи», в данном случае — электромагнитного поля, мы рассмотрим, каким образом Гильберт строит свой «вектор энергии» и соответственно закон сохранения энергии-импульса.

На основании аксиом I и II он весьма формальным образом конструирует упомянутый «вектор энергии» e^l. В результате преобразований, эквивалентных вычислению вариации δJ и ряду формальных операций типа интегрирования по частям, используя уравнения (17) и (18), а также теоремы II и III, Гильберт устанавливает «вектор энергии» в следующем виде:

$$e^l = Hp^l - a^l - b^l - c^l - d^l, \tag{23}$$

являющийся контравариантным вектором, линейно зависящим от p^l и тождественно, при любом p^l, удовлетворяющим инвариантному «уравнению энергии»

$$\sum \frac{\partial \sqrt{g}\, e^l}{\partial w^l} = 0. \tag{24}$$

Сконструированные a^l, b^l, c^l, d^l линейно зависят от p^s, $p^{\mu s}$, $p_k^{\mu s}$, от величин $\frac{\partial H}{\partial g_k^{\mu\nu}}$, $\frac{\partial H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}}$, $\frac{\partial H}{\partial q_{lk}}$ и их первых производных по мировым параметрам w_l.

Выпишем, например, вклад в «вектор энергии» от электромагнитного поля, к которому в теории Гильберта сводится вся «материя»:

$$e^l_{\text{эм}} = Lp^l - c^l_{\text{эм}} - d^l_{\text{эм}} \tag{25}$$

$$c^l = \sum_k (\partial H/\partial q_{kl})\, p_k; \qquad c^l_{\text{эм}} = \sum_k (\partial L/\partial q_{kl})\, p_k, \tag{26}$$

аналогично:

$$d^l_{\text{эм}} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \sum \frac{\partial}{\partial w_s} \left\{ \left(\frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial q_{lk}} - \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial q_{kl}} \right) p^s q_s \right\} \tag{27}$$

Члены a^l и b^l дают вклад только от гравитационного поля.

Построение вектора e^l формально и недостаточно обоснованно, явная связь его с принципами симметрии ($\mathscr{E}$-группой или ее однопараметрическими подгруппами, зависящими от произвольных векторных полей) не выражена достаточно отчетливо, физический смысл полученного выражения не обсуждается [60].

И все-таки гильбертовский вектор e^l и соответствующее уравнение сохранения, как это впоследствии отчетливо показал Клейн [61], отражают существенные особенности закона сохранения энергии-импульса в общей теории относительности. Гильбертовский вектор энергии действительно связан с бесконечно малыми преобразованиями мировых параметров w_s, ассоциированными с однопараметрическими подгруппами группы $\mathscr{E}$, зависящими от произвольных векторных полей. Но в кратком и формальном изложении Гильберта эта связь не выражена достаточно ясно. Чем же оправдывается гильбертовская конструкция «вектора энергии»? Согласно Гильберту, она оправдывается следующими тремя обстоятельствами: 1) электромагнитная часть $e^l_{эм}$ в пределе при $g_{\mu\nu} = 0$, $\mu \neq \nu$; $g_{\mu\nu} = 1$, $\mu = \nu$, как мы увидим несколько ниже, совпадает с обычным вектором энергии-импульса электромагнитного поля, умноженным на p^s; 2) e^l образует вектор относительно $\mathcal{E}$-группы, хотя и зависящий от произвольного вектора p^s; 3) e^l удовлетворяет закону сохранения в дивергентной форме: $\frac{\partial \sqrt{g}\, e^l}{\partial w^l} = 0$, причем тождественно при любом p. Названные особенности выявляют специфический характер закона сохранения и самого понятия энергии общей теории относительности. Физический смысл гильбертовского закона сохранения, его связь с аналогичными выражениями Эйнштейна, Лоренца и других, его отношение к законам сохранения в механике и специальной теории относительности были разъяснены впоследствии в результате переписки Гильберта и Клейна и особенно благодаря статье Клейна «О дифференциальной форме законов сохранения импульса и энергии общей теории относительности и теории тяготения» (1918) [62], которые будут рассмотрены ниже.

Возвращаясь к уравнениям гравитационного поля (22), заметим, что величины $\partial\sqrt{g}L/\partial g^{\mu\nu}$ естественно отождествляются с тензором энергии-импульса «материи» (в данном случае — электромагнитного поля), а уравнения (22) — с эйнштейновскими. Действительно, применяя теорему II к L, Гильберт приходит к выводу, что производные электродинамических потенциалов входят в L только в кососимметрической комбинации: $M_{ks} = q_{sk} - q_{ks}$, что, разумеется, существенно ограничивает характер уравнений электродинамики. Этот вывод, основанный на теореме II, фактически является следствием второй аксиомы, т. е. общей ковариантности. Далее, на основании этой же теоремы и выражений (25)—(27), а также уравнений электродинамики (18) Гильберт находит

$$\sum_{sk}\left(L\delta^l_s - \frac{\partial L}{\partial M_{lk}} M_{sk} - \frac{\partial L}{\partial q_l} q_s\right) p^s = -\frac{2}{\sqrt{g}} \sum_{\mu s} \frac{\partial \sqrt{g}\, L}{\partial g^{\mu s}} g^{\mu l} p^s, \quad (28)$$

откуда видно, что $\frac{\partial \sqrt{g}\, L}{\partial g^{\mu s}}$ действительно можно отождествить с тензором энергии-импульса «материи». Этот результат является, несмотря на некоторую формальность его получения, весьма глубоким. Он показывает, что тензор энергии-импульса «материи» очень просто связан с действием системы, точнее, с ее «материальной» частью, и получается посредством варьирования гравитационных потенциалов в этом действии. Впоследствии этот результат был более наглядно получен Лоренцом [63], Вейлем [64] и Клейном [65]. Как мы уже подчеркивали, установленный результат является также существенным аргументом в пользу гильбертовской конструкции вектора энергии.

В заключение работы Гильберт явно вычисляет четыре тождественные независимые линейные комбинации лагранжевых выражений, о которых упоминалось в теореме I. Вычисления основаны главным образом на теореме III и тождестве (21), примененном к $H = K + L$, а также на использовании некоторых следствий теоремы II — тождества (20) и уравнений гравитационного поля (22). В итоге после некоторых преобразований он получает следующие четыре тождества:

$$\sum_m \left(M_{m\nu} [\sqrt{g} L]_m + q_\nu \frac{\partial}{\partial w_m} [\sqrt{g} L]_m \right) = 0, \tag{29}$$

которые, согласно Гильберту, дают «точное математическое выражение высказанного ранее утверждения о характере электродинамики как следствия тяготения» [66].

Работа заканчивается словами, в которых автор выражает надежду на то, что развитый им подход позволит построить единую теорию поля, основанную на нескольких простых аксиомах (I—III): «Как я убежден, при помощи составленных здесь уравнений будут разъяснены сокровеннейшие, до сих пор скрытые явления внутри атома, и на их основе должно оказаться возможным свести все физические постоянные к математическим постоянным. Таким путем мы приближаемся к возможности превратить в принципе физику в науку, подобную геометрии, которая составляет, несомненно, прекраснейший образец аксиоматического метода, пользующегося в данном случае услугами мощных инструментов математического анализа, а именно вариационного исчисления и теории инвариантов» [67].

По существу, эта точка зрения сохранилась в модернизированном изложении первых двух сообщений (1924) [68], хотя попытки в этом направлении, предпринятые Вейлем, Эйнштейном, Эддингтоном и другими, при всем своем изяществе успеха не имели. Разработка квантовой механики и квантовой теории поля и последующее открытие ряда новых элементарных частиц выявили новые фундаментальные части физической картины мира, которые явно не вмещались в аксиомы Гильберта. Разумеется, это не означало полную бесплодность аксиоматического подхода и попыток построения единых теорий поля. Даже в тех случаях, когда аксиоматические исследования не достигали в полной мере своей цели, они способствовали выяснению логической взаимосвязи основных понятий и положений теории, а также пределов ее применимости.

Возвращаясь к проблеме взаимосвязи симметрия—сохранение, подчеркнем в связи с анализом работы Гильберта следующее.

1. Теоремы I и III Гильберта, как было вполне строго выяснено лишь в работе Э. Нетер (1918), являются аналогами взаимосвязи симметрия — сохранение для $\mathscr{E}$-группы. В случае приня-

ния аксиом I—III уравнения (29) как раз и представляют собой упомянутые в теореме I зависимости между лагранжевыми выражениями и их производными.

2. Вместе с тем общее доказательство теоремы I отсутствовало, главное, едва ли была осознана связь этой теоремы с законом сохранения энергии-импульса. Ведь Гильберт использовал ее в основном с целью доказательства утверждения, что электродинамика — следствие тяготения, и выяснения характера этой зависимости.

3. Что же касается гильбертовского вектора энергии и соответствующего закона сохранения, то в работе Гильберта он не был непосредственно связан с теоремой I, хотя последовательный анализ позволяет усмотреть его связь с бесконечно-малыми преобразованиями мировых параметров w_s, зависящими от произвольных векторный полей. Зависимость e^l от этих произвольных векторных полей, тождественный характер уравнения сохранения, имеющего дивергентную форму лишь при учете вклада от гравитационного поля,— все это выявляло новые специфические черты закона сохранения энергии-импульса в общей теории относительности, несмотря на то, что физический смысл его и отношение к другим формам закона сохранения (например, эйнштейновской), а также систематический вывод его на основе взаимосвязи симметрия—сохранение оставались еще в тени.

4. Наряду с перечисленными выше важными результатами следует назвать установление тесной связи тензора энергии-импульса «материи» с варьированием гравитационных потенциалов $g^{\mu\nu}$ в интеграле действия.

5. Наконец, самостоятельное, не относящееся к проблеме сохранения значение имеет получение корректных общековариантных уравнений гравитационного поля. Вместе с тем выводу Гильберта, в отличие от эйнштейновского, присущ важный недостаток, так как уравнения гравитации были получены при условии принятия аксиомы Ми об электромагнитной структуре «материи». Это предположение, в общем, оказалось неверным в свете достижений физики 30—40-х годов, и потому вывод Эйнштейна, отличавшийся и большей «физичностью», представляется более предпочтительным. Вместе с тем вывод уравнений гравитации из общековариантного вариационного принципа, вполне аналогичного гильбертовскому, но без принятия аксиомы Ми, впоследствии был признан корректным и стал общеупотребительным [69].

Подчеркнем, что рассмотренная теория Гильберта была первой попыткой построения единой геометризованной теории поля, основанной на общей теории относительности, что нередко упускается из виду в соответствующих обзорах, учебниках и историко-научных работах [70].

В заключение анализа статьи Гильберта коснемся вопроса об истории установления общековариантных уравнений гравитационного поля.

Разобранная работа Гильберта, в которой в строгой и систематической форме было высказано требование общей ковариантности уравнений гравитационного поля и были получены эти уравнения, докладывалась на заседании Геттингенского математического общества 20 ноября 1915 г.

Первая работа Эйнштейна, в которой было явно выдвинуто требование общей ковариантности уравнений гравитационного поля (хотя в действительности произвол преобразований ограничивался условием унимодулярности $\sqrt{-g} = 1$) поступила в редакцию журнала «Sitzungsberichte der Berliner Akademie» 11 ноября 1915 г.[71], а уравнения гравитации в окончательной форме, совпадающей с гильбертовской (и уже полностью общековариантные), были установлены в статье, поступившей в печать 2 декабря 1915 г.[72]

Гильберт в своих исследованиях, разумеется, опирался на фундаментальные исследования Эйнштейна 1913—1914 гг. [73], но, по-видимому, не мог знать о работе, поступившей в печать 11 ноября, в которой к тому же еще не были получены уравнения типа (22), а лишь провозглашен принцип общей ковариантности уравнений гравитации (и то с точностью до унимодулярности). С другой стороны, Эйнштейн также, очевидно, не знал о работе, доложенной Гильбертом 20 ноября, об этом свидетельствует не только совершенно иная логика, которая вела Эйнштейна к достижению полной общековариантности уравнений гравитации, но и то обстоятельство, что Эйнштейн несомненно сослался бы на Гильберта в своей статье, поступившей в печать 2 декабря. Так что Эйнштейн и Гильберт независимо пришли к одним и тем же общековариантным уравнениям гравитации, причем совершенно различными путями. Приведем в этой связи высказывание Клейна: «О каком-либо приоритете при этом не может быть и речи, так как оба автора следовали совершенно различному ходу мысли (и притом так, что совместимость их результатов первоначально не казалась обеспеченной). Эйнштейн поступает индуктивным образом и имеет в виду произвольные материальные системы. Гильберт дедуцирует, вводя упомянутое в п. 8 ограничение электродинамикой, из высшего вариационного принципа. При этом он исходит, в частности, из теории Ми»[74].

И все-таки, несмотря на определенные заслуги Гильберта в развитии общей теории относительности, ее справедливо считают детищем Эйнштейна. Выражая мнение большинства физиков, Инфельд в 1962 г. писал: «Физики убеждены, что без Эйнштейна мы не имели бы общей теории относительности и поныне»[75]. В воспоминаниях об Эйнштейне Инфельд приводит широко известные слова самого Эйнштейна: «Частная теория относительности сейчас была бы уже создана независимо от меня. Эта проблема назрела. Но я не думаю, что это касается и общей теории относительности»[76].

Действительно, невозможность описания тяготения в рамках специальной теории относительности, принцип эквивалентности, отказ от постоянства скорости света уже в статических гравитационных полях, выяснение неизбежности тензорного характера потенциалов гравитационного поля, отождествление их с компонентами метрического тензора римановых пространств, корректное описание взаимодействия гравитационного поля с «материальными» системами, наконец, построение «псевдотензора» энергии-импульса гравитационного поля и систематическое применение вариационных принципов и т. д. — все эти фундаментальные результаты и идеи были сформулированы и использованы Эйнштейном в 1907—1914 гг.

Однако в разработке проблемы сохранения, а главное, в подготовке идей, приведших к установлению теорем Нетер, работа Гильберта (первое сообщение) имела исключительно важное значение: она, как мы уже неоднократно упоминали, была исходной в «геттингенской цепочке», последним звеном которой явились теоремы Нетер.

«Геттингенская цепочка» (1916—1918)

> «Нетер-теорема утверждает, что для физической системы, уравнения движения которой имеют форму дифференциальных уравнений и могут быть получены из вариационного принципа, каждому однопараметрическому непрерывному преобразованию, оставляющему вариационный функционал инвариантным, соответствует один дифференциальный закон сохранения. *Установлена в работах ученых геттингенской школы Д. Гильберта, Ф. Клейна, Э. Нетер*».
>
> Б. В. Медведев, М. К. Поливанов[77].

Итак, в рассмотренных выше работах Эйнштейна (1913—1916) и Гильберта (1915), хотя и были получены некоторые важные результаты, относящиеся к проблеме сохранения энергии-импульса в общей теории относительности, оставался еще ряд существенных пробелов. Перечислим главные из них:

1) доказательство общерелятивистского аналога взаимосвязи симметрия — сохранение — теоремы I Гильберта — отсутствовало;

2) связь этой теоремы с проблемой сохранения энергии-импульса в общей теории относительности, а также с соответствующими классическими вариантами взаимосвязи симметрия — сохранение в механике и специальной теории относительности не была осознана;

3) различные выражения для вектора или тензора энергии-импульса не были согласованы;

4) затруднения, связанные с нетензорным характером некоторых формулировок закона сохранения энергии-импульса, не были осознаны и обсуждены;

5) не был исследован вопрос об интегральной форме законов сохранения.

Развитие проблемы сохранения и, вместе с тем, взаимосвязи симметрия — сохранение в общей теории относительности в 1916—1918 гг. вплоть до установления теорем Нетер проходило в основном в направлении устранения названных пробелов. Центральной линией в этом развитии была «геттингенская цепочка», первым звеном которой и была рассмотренная выше работа Гильберта. Хотя некоторые важные аспекты проблемы сохранения (например, нетензорность и интегральная форма закона сохранения энергии-импульса) были разработаны вне «геттингенской цепочки» (Лоренц, Бауэр, Шредингер, Эйнштейн и т. д.), развитие проблематики, непосредственно связанной с установлением нетеровских теорем, происходило прежде всего в рамках этой «цепочки». В этом разделе мы рассмотрим два звена этой цепочки, связанные с деятельностью Гильберта, Клейна и Э. Нетер: переписку Гильберта и Клейна (1917), опубликованную в виде трех статей в «Собрании сочинений» Клейна, т. 1 [78], и работу Клейна (1918)[79], непосредственно предшествующую публикации статьи Э. Нетер. Последнее звено «цепочки» — статья Э. Нетер — будет рассмотрена в следующей главе отдельно.

Помимо «геттингенской цепочки», можно выделить, по крайней мере, еще три направления, относящиеся к развитию рассматриваемой проблематики: исследования Эйнштейна, Бауэра, Шредингера и других (1916—1918), связанные в первую очередь с обсуждением трансформационных свойств энергии-импульса и интегральной формы соответствующего закона сохранения; серия статей Лоренца и некоторых его учеников (например, Фоккера, 1915—1917), а также работы Г. Вейля (1917—1918). Некоторые из этих работ предшествуют упомянутым публикациям Гильберта и Клейна, относящимся к 1917—1918 гг., но, как мы покажем, геттингенское направление развивалось в основном самостоятельно и, по-видимому, пришло бы к тем же самым результатам (теоремам Нетер) независимо от названных исследований Эйнштейна, Лоренца, Вейля и других. Тем не менее эти исследования представляют известный интерес для анализа генезиса нетеровских теорем, и поэтому они будут рассмотрены в следующем разделе главы.

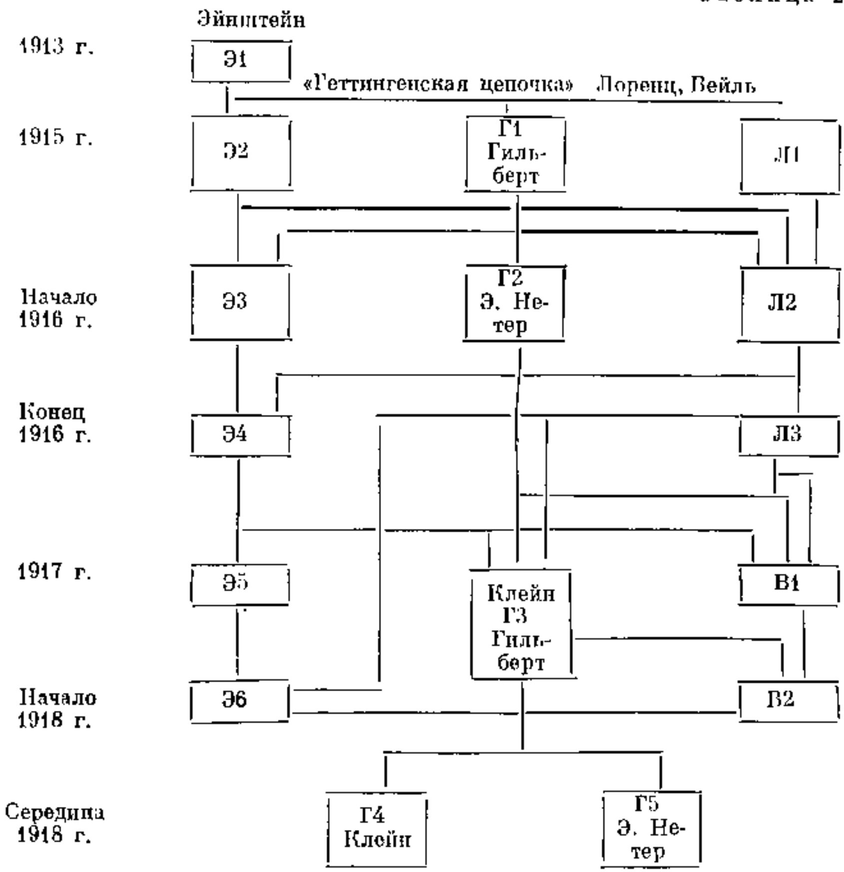
Прежде чем продолжить рассмотрение «геттингенской цепочки», мы дадим схематическое изображение взаимосвязи основных общерелятивистских работ, относящихся к проблеме сохранения и предшествующих установлению теорем Нетер (см. табл. 2).

На этой схеме, охватывающей приблизительно два с половиной года, выделяются три основные линии: 1) эйнштейновская; 2) «геттингенская цепочка» и 3) исследования Лоренца.

Исследования Вейля (1917 и 1918) стоят несколько особняком и, пожалуй, в большей степени примыкают к исследованиям Эйнштейна. Ранние работы Эйнштейна (1913 — март 1916) и

Взаимосвязь основных общерелятивистских работ, предшествующих установлению теорем Нетер (1915—1918 гг.)

Таблица 2



Э 1. *А. Эйнштейн.* Собр. научн. трудов, т. 1. М., «Наука», 1965, соч. 21, 23, 24, 29, 32.
Э 2. Там же, соч. 34, 35, 37.
Э 3. Там же, соч. 38.
Э 4. Там же, соч. 42.
Э 5. *G. Nordström.* Amsterdam. Acad. Ber., XXVI, 1093 (1917); *T. Levi-Civita.* Rend. Accad. d. Lincei, XXVI, 5 (1917); *E. Schrödinger.* Phys. Zs., 19, 4 (1918); *А. Эйнштейн.* Соч. 47; *H. Bauer.* Phys. Zs., 19, 163 (1918).
Э 6. *А. Эйнштейн.* Соч. 51.
Г 1. *Д. Гильберт.* Основания физики. В сб. «Вариационные принципы механики». М., Физматгиз, 1959.
Г 2. *Э. Нетер.* (Неопубликованные результаты, см. Г3).
Г 3. *F. Klein.* Gesammelte mathematische Abhandlungen. Bd. I, Berlin, Springer, 1921, Abh. XXXI.
Г 4. *F. Klein.* Там же, Abh. XXXII.
Г 5. *Э. Нетер.* Инвариантные вариационные задачи. В сб. «Вариационные принципы механики». М., Физматгиз, 1959.
Л 1. *H. A. Lorentz.* Amsterdam. Versl., **23**, 1073 (1915).
Л 2. Там же, **24**, 1389; 24, 1759 (1916).
Л 3. Там же, 25, 468; 25, 1380 (1916).
В 1. *H. Weyl.* Ann. d. Phys., 54, 117 (1917).
В 2. *H. Weyl.* Raum, Zeit, Materie. Berlin. Springor (1918).

исходная статья Гильберта 1915 г. были сравнительно подробно рассмотрены ранее [80]. Именно они послужили основой дальнейших исследований. К этим основоположным работам (в отношении проблемы энергии в общей теории относительности) можно было бы отнести и первую статью Лоренца, опубликованную в 1915 г.[81] Несмотря на некоторую громоздкость и архаичность изложения, она содержала глубокие и оригинальные идеи, касающиеся взаимосвязи симметрия — сохранение и, в известной степени, предвосхищающие некоторые исходные положения работы Клейна 1918 г.[82]

Определенный интерес в этом же плане представляют и последующие публикации Лоренца, относящиеся в основном к 1916 г.[83] Эти исследования Лоренца, Эйнштейна (1916—1918) и Вейля (1917—1918), переписка Клейна и Гильберта, последующие статьи Клейна, как видно из нашей схемы, в основном опирались именно на упомянутые работы Эйнштейна и Гильберта и, в несколько меньшей мере, Лоренца, опубликованные еще в 1915 г.

Последовательное хронологическое описание работ, представленных в табл. 2, связано со значительными и, по-видимому, неизбежными повторениями, а также весьма затруднительно из-за существования сложных взаимосвязей между результатами различных авторов, опубликованными в течение весьма короткого промежутка времени — порядка двух с половиной лет. Ключом к пониманию и классификации этих результатов может служить работа Клейна, доложенная им в июле 1918 г.[84] Написанная почти одновременно со статьей Э. Нетер, она содержала общий наглядный подход к решению вопроса о дифференциальной форме закона сохранения энергии-импульса. С точки зрения подхода, развитого Клейном в этой статье, результаты, полученные различными авторами, становятся легко обозримыми и сопоставимыми, наиболее экономно выясняется специфика исходных положений и полученных на их основе различных выражений для закона сохранения. С другой стороны, хотя Клейн в своей статье и ссылается на работы Лоренца, Эйнштейна и Вейля, последние едва ли сильно повлияли на нее. Как и основная работа Э. Нетер, она явилась прежде всего результатом продолжения и развития исследований Гильберта, Клейна и Э. Нетер (1915—1917), находящихся в рамках «геттингенской цепочки».

Несколько слов об истории этой «цепочки». Начало было положено фундаментальной работой Гильберта 1915 г. В 1916 г. в Геттинген переезжает Э. Нетер, тогда уже известный специалист по алгебраической теории инвариантов [85]. Этот переезд оказался возможным благодаря непосредственному влиянию Гильберта, который предполагал привлечь Э. Нетер к разработке некоторых математических, главным образом теоретико-инвариантных проблем, намеченных им в его общерелятивистской работе 1915 г. В течение 1916 — середины 1918 г. Э. Нетер интенсивно разрабатывала эти проблемы, и хотя обе ее публикации относятся к

1918 г., многие важные результаты, относящиеся к вариационным задачам об инвариантных функционалах, она получила значительно раньше, по крайней мере, в 1917 г. и, возможно), даже в 1916 г. Об этом свидетельствует упомянутая переписка Клейна и Гильберта по поводу гильбертовских «Оснований физики», относящаяся к 1917 г., основные результаты которой были доложены Клейном на заседании Геттингенского математического общества 25 января 1918 г. и опубликованы в «Göttinger Nachrichten», H. 4. за 1917 г.[86] Кстати говоря, именно эта переписка явилась началом общерелятивистских исследований Клейна. Приведем два небольших отрывка из этой переписки, ясно показывающих роль Э. Нетер в общерелятивистских исследованиях Гильберта и Клейна и подтверждающих наше замечание, что Э. Нетер уже в 1916—1917 гг. получила некоторые важные результаты, касающиеся математической стороны проблемы сохранения.

В заключение своего первого письма к Гильберту Клейн пишет: «Вы знаете, что фр. Нетер постоянно консультировала меня в моей работе и что я, собственно, только благодаря ей проник в существо данной проблемы (речь идет о проблеме сохранения в общей теории относительности и гильбертовском векторе энергии.— *В. В.*). Когда я недавно сказал ей о моем результате по поводу рассматриваемого Вами вектора энергии, она мне сообщила, что получила то же самое, развивая Вашу статью (т. е. первое сообщение «Основания физики».— *В. В.*), уже год назад и представила это в рукописи (с которой я тогда же ознакомился)» [87]. Далее, в ответном письме Гильберт замечает: «Э. Нетер, к помощи которой я прибегнул для разъяснения некоторых аналитических вопросов, относящихся к моему закону энергии, более чем год назад, установила тогда, что найденные мной компоненты энергии так же, как и эйнштейновские — формально посредством лагранжевых уравнений (формулы (4) и (5) моего первого сообщения) могут быть превращены в выражения, дивергенции которых тождественно исчезают» [88]. Таким образом, Э. Нетер уже в 1916 г. активно сотрудничала с Гильбертом и получила некоторые важные результаты, особенно доказательство тождественного характера гильбертовской и эйнштейновской формулировки закона сохранения энергии-импульса. В 1917 г. она, как указывает сам Клейн, постоянно консультировала и, по существу, ввела его в круг проблем, затронутых в «Основаниях физики» Гильберта и весьма созвучных научным склонностям Клейна. Дело было не только в том, что Клейн в общей теории относительности увидел еще один физический аналог и развитие своей «Эрлангенской программы», но, по-видимому, еще и в том, что как раз в 1915-1917 гг. он пришел к пониманию взаимосвязи симметрия — сохранение (в классической механике и специальной теории относительности) как весьма общей и существенной закономерности физической теории [89]. По всей вероятности, это обстоятельство сыграло не последнюю роль в том, что Клейн активно включился в разработку проблемы сохранения в теории тяготения. Первым результатом этого и явилось его письмо к Гильберту, опубликованное затем в «Göttinger Nachrichten».

Итак, 25 января 1918 г. на заседании Геттингенского математического общества Клейн доложил работу «К первому сообщению Гильберта об основаниях физики», состоящую из трех писем (точнее, отрывков из них): двух — Клейна к Гильберту и одного — Гильберта к Клейну [90]. Эта переписка состоялась, по-видимому, во второй половине 1917 г. и опубликована была в «Göttinger Nachrichten», H. 4, за 1917 г.

Большую часть публикации составляло первое письмо Клейна, посвященное главным образом обсуждению гильбертовского «вектора энергии» e^l и соответствующего закона сохранения. Письмо начиналось словами: «Тщательно изучив Вашу статью, я заметил, что промежуточные вычисления, которые вы делали, можно существенно сократить благодаря использованию обычного лагранжева вариационного формализма, и на этой основе получить более точный взгляд на значение закона сохранения, который вы установили для Вашего вектора энергии» [91]. Далее, Клейн, оставаясь в рамках теории Гильберта, явно использует условия исчезновения вариаций с их производными на границе области интегрирования, что позволяет ему посредством известной вариационной процедуры получить и четырнадцать уравнений гравитационного (10) и электромагнитного (4) полей и четыре тождества, связывающих эти уравнения и гарантируемых теоремой I Гильберта.

Особенности вычислений Клейна заключаются в том, что он с самого начала представляет действие системы как сумму двух составляющих, ассоциированных с гравитационным и электромагнитным полями:

$$J = J_1 + J_2, \quad \text{где} \quad J_1 = \int K\, d\omega, \quad J_2 = \int L\, d\omega,\ d\omega = \\ = \sqrt{g}\, dw^{\mathrm{I}} \ldots dw^{\mathrm{IV}},$$

$$K = \sum_{\mu,\nu,\rho,\sigma} (\mu\nu, \rho\sigma)(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}); \quad (\mu\nu, \rho\sigma) = \\ = R_{\mu\nu,\rho\sigma} \text{ — тензор кривизны};$$

$$L = \alpha Q = -\alpha \sum_{\mu,\nu,\rho,\gamma} (q_{\mu\nu} - q_{\nu\mu})(q_{\rho\sigma} - q_{\sigma\rho})(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho});$$

α пропорциональна гравитационной постоянной; w, $g^{\mu\nu}$, q_s и т.д. имеют тот же смысл, что и в работе Гильберта [92]. Вычисление вариаций δJ_1 и δJ_2 приводит к результату

$$\delta J_1 = \int \sum_{\mu, \nu} K_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \, d\omega;$$

$$\delta J_2 = \alpha \int \Big(\sum_{\mu, \nu} Q_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sum_{\rho} Q^{\rho} \delta q_{\rho} \Big) d\omega,$$

где

$$K_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial \sqrt{g} K}{\partial g^{\mu\nu}} - \sum_{\rho} \frac{\partial \left(\dfrac{\partial \sqrt{g} K}{\partial g^{\mu\nu}_{\rho}} \right)}{\partial w^{\rho}} + \sum_{\rho, \sigma} \frac{\partial^2 \left(\dfrac{\partial \sqrt{g} K}{\partial g^{\mu\nu}_{\rho\sigma}} \right)}{\partial w^{\rho} \partial w^{\sigma}} \right) \frac{1}{\sqrt{g}};$$

$$Q_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} Q}{\partial g^{\mu\nu}}; \quad Q^{\rho} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{\sigma} \frac{\partial \left(\dfrac{\partial \sqrt{g} Q}{\partial q_{\rho\sigma}} \right)}{\partial w^{\sigma}} \right).$$

Требование $\delta J_1 = 0$, с учетом обращения в нуль на границе области интегрирования вариаций δw^{ρ} с их производными, дает четыре тождества

$$\sqrt{g} \sum_{\mu, \nu} K_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_{\sigma} + 2 \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial (\sqrt{g} K_{\mu\sigma} g^{\mu\nu})}{\partial w^{\nu}} = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4). \tag{30}$$

Соответственно $\delta J_2 = 0$ дает

$$\sum_{\mu, \nu} \left(\sqrt{g} Q_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_{\sigma} + 2 \frac{\partial (\sqrt{g} Q_{\mu\sigma} g^{\mu\nu})}{\partial w^{\nu}} \right) + \sum_{\rho} (\sqrt{g} Q^{\rho} (q_{\rho\sigma} - q_{\sigma\rho})) = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4). \tag{31}$$

Записывая вариационный принцип в форме

$$\delta J_1 + \delta J_2 = 0,$$

Клейн получает четырнадцать уравнений Лагранжа — Эйлера:

$$K_{\mu\nu} + \alpha Q_{\mu\nu} = 0; \tag{32}$$

$$Q^{\rho} = 0, \tag{33}$$

интерпретируемых как десять уравнений гравитационного поля и четыре уравнения электромагнитного поля. Затем он из тождеств (30) и (31) и уравнений гравитационного поля (32) выводит уравнения (33), иллюстрируя, таким образом, весьма наглядно теорему I Гильберта и выводимость на ее основе уравнений электромагнитного поля из уравнений поля тяготения.

Складывая тождества (30) и (31), Клейн после некоторых преобразований получает выражение для вектора энергии-импульса, отличающееся от гильбертовского e^l лишь членом, дивергенци которого тождественно обращается в нуль. Клейновский векто энергии-импульса, как и гильбертовский e^l, обладает тем сво ством, что он тождественно удовлетворяет дифференциальном закону сохранения. Клейн далее специально подчеркивает при ципиальную разницу между законами сохранения в теория типа классической механики и специальной теории относитель ности, с одной стороны, и законом сохранения энергии-импульс в общей теории относительности, с другой. «...Если в классическо механике мы имеем: $\frac{d(T+U)}{dt}=0$, то это дифференциальное со отношение, однако, выполняется не тождественно (как в обще теории относительности.— *В. В.*), но лишь вследствие уравнени механики»[93].

В ответном письме Гильберт, основываясь, главным образом на результатах своего первого сообщения (1915), неопубликован ных материалов Э. Нетер и письма Клейна, более обстоятельн рассматривает принципиальное отличие общерелятивистских тож дественно выполняющихся законов сохранения от обычных законо сохранения, имеющих место в механике или специальной теори относительности. «Конечно, я утверждаю далее, что для обще теории относительности, т. е. в случае общей инвариантност гамильтоновой функции, уравнений энергии, которые в Вашем (т. е. Клейна.— *В. В.*) смысле соответствуют уравнениям энерги в ортогонально-инвариантных теориях, *вообще не существует*; я даже мог бы отметить это обстоятельство как характерную черту общей теории относительности»[94]. И далее следует очень важно замечание, показывающее, что вышеприведенное утверждение — не более чем весьма правдоподобная гипотеза: «Для моего утверж дения было бы желательно привести математическое доказатель ство» [95].

Затем Гильберт приводит более детальное сравнение законо сохранения в общей теории относительности и ортогонально-инвариантных теориях, показывая, что они связаны между собой, несмотря на существенное различие (первые выполняются тождест венно, вторые — в силу уравнений поля), в духе принципа со ответствия. Применяя теорему III первого сообщения к обще ковариантному аналогу $\overline{H}$ ортогонально-инвариантного лагран жиана H, он получает тождества

$$\sum_{\mu\nu}[\sqrt{g}H]_{\mu\nu}g_s^{\mu\nu}-2\sum_m\frac{\partial}{\partial w_m}\{[\sqrt{g}\overline{H}]_{\mu s}g^{\mu m}\}+$$
$$+\sum_{\mu}[\sqrt{g}\overline{H}]_\mu q_{\mu s}-\sum_{\mu}\frac{\partial}{\partial w_\mu}\{[\sqrt{g}\overline{H}]_\mu q_s\}=0, \qquad (34)$$

где приняты обозначения первого сообщения. Эти четыре тождества и являются теми, о которых шла речь в теореме I первого сообщения. Переход же к «ортогональной» инвариантности $g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}$

с учетом уравнений «материи» $[H]_s = 0$ сводит тождества (34) к четырем уравнениям, совпадающим с обычным законом сохранения энергии-импульса:

$$\sum_m \frac{\partial}{\partial w_m} \{[\sqrt{g}\,\overline{H}]_{ms}\}_{g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}} = 0. \tag{35}$$

Убедившись далее в том, что уравнение (35) в случае электродинамики дает обычную дифференциальную форму закона сохранения энергии-импульса, Гильберт подчеркивает невозможность аналогичного построения в общей теории относительности. Общерелятивистским аналогом обычных законов сохранения в ортогонально-инвариантных теориях оказываются, таким образом, тождества типа (34), являющиеся, согласно теореме I первого сообщения Гильберта, следствием общей ковариантности вариационного функционала. Клейн, выражая согласие с этим и резюмируя сравнительное рассмотрение проблемы сохранения в теории тяготения и ортогонально-инвариантных теориях, так же, как и Гильберт, подчеркивает: «Однако было бы очень интересно найти математическое доказательство, о котором Вы упомянули в конце первого абзаца Вашего ответа»[96]. В примечании к этой заключительной фразе, написанном при помещении переписки в «Собрание математических сочинений», Клейн указал, что такое доказательство было дано Э. Нетер в ее статье «Инвариантные вариационные задачи» (1918)[97].

Рассмотренная переписка была важным шагом вперед на пути установления нетеровских теорем. В ней с достаточной ясностью выявлено общее и различное в формулировке законов сохранения в общей теории относительности и теориях типа классической механики, четко поставлен вопрос о необходимости общего математического доказательства этих результатов, а в равной степени — и теоремы I первого сообщения Гильберта. Принятый Клейном (в первом письме) способ варьирования с вариациями, исчезающими на границе области интегрирования вместе со своими производными, не дал ему возможности получить гильбертовский «вектор энергии» и систематически описать всевозможные выражения для сохраняющихся величин, найденные Гильбертом, Эйнштейном, им самим и другими. Нетензорный характер компонент энергии-импульса гравитационного поля и интегральная форма соответствующего закона сохранения в этой переписке также не обсуждались. Итак, в переписке Клейна и Гильберта[98] можно отметить следующее:

1) установление глубокой связи между общерелятивистским законом сохранения энергии-импульса (в частности, в гильбертовской форме) и четырьмя тождествами, вытекающими из теоремы I Гильберта;

2) осознание принципиального различия между формулировками законов сохранения энергии-импульса в общей теории относительности и теориях типа классической механики (с конеч-

нопараметрическими группами Ли в качестве фундаментальных). В частности, выяснение *тождественного* характера законов сохранения в общей теории относительности и установление *соответствия* между этими тождествами и обычными законами сохранения при $g_{ik} \to \delta_{ik}$, где δ_{ik} — метрический тензор плоского пространства —времени;

3) четкую постановку проблемы строгого доказательства теоремы I Гильберта, т. е. общерелятивистского аналога взаимосвязи симметрия — сохранение ($\mathscr{E}$-симметрия—сохранение), а также проблемы классификации и сопоставления различных выражений, отвечающих компонентам энергии-импульса [99].

Разрешению этих проблем и были посвящены упомянутые выше работы Клейна и Э. Нетер [100]. Если в фундаментальной статье Э. Нетер были строго доказаны теорема I Гильберта, точнее, ее обобщение для бесконечных групп Ли, зависящих от любого числа функций независимых переменных (вторая теорема Нетер) и соответствующая теорема для конечнопараметрических групп Ли (первая теорема Нетер), то в статье Клейна с единой точки зрения были получены всевозможные выражения для компонент энергии-импульса и установлены причины расхождений между ними. Работа Э. Нетер будет изучена в следующей главе. Здесь же мы рассмотрим только статью Клейна. Это позволит нам затем легко обозреть серию исследований, посвященных проблеме сохранения в общей теории относительности и выходящих за рамки «геттингенской цепочки», а также выяснить их значение в генезисе нетеровских теорем (см. табл. 2).

Рассматриваемая работа Клейна написана в первом полугодии 1918 г. и доложена 19 июля 1918 г. на заседании Геттингенского математического общества. Она была непосредственным продолжением первой статьи Клейна, точнее, переписки между ним и Гильбертом, доложенной Клейном 25 января 1918 г., и, таким образом, результатом тесного творческого контакта между Гильбертом, Клейном и Э. Нетер.

В начале статьи Клейн замечает: «В результате продолжения исследований, которые я доложил научному обществу 25 января этого года, мне удалось *различные формы дифференциальных законов сохранения импульса и энергии, как они были установлены различными авторами для эйнштейновской теории тяготения, вывести с единой точки зрения* и, тем самым, если я не ошибаюсь, получить в этом смысле существенно улучшенную картину» [101]. Решающим элементом в достижении простоты и общности всего построения был принятый Клейном способ варьирования, заключающийся в том, что на вариации независимых переменных, т.е. бесконечно малые преобразования «мировых параметров» и их производных, не накладывались с самого начала ограничивающие условия: 1) исчезновение их на границах области интегрирования; 2) принятие их постоянными. Клейн на каждом этапе рассуждений стремится извлечь максимум результатов при минимальном числе исходных положений. Так, сначала изучается вариационный интеграл

$$J_1 = \int K \, d\omega, \tag{36}$$

причем на функцию K не накладывается никаких условий, за исключением того, что она зависит от величин $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_{\rho}$, $g^{\mu\nu}_{\rho\sigma}$. Получив ряд результатов на этом уровне, Клейн ограничивается рассмотрением J_1, являющегося инвариантом относительно $\mathscr{E}$-группы, что приводит его к основным тождествам. Наконец, для получения различных форм законов сохранения энергии-импульса системы гравитация + «материя», включающих тензор энергии-импульса «материи», Клейн переходит к следующему уровню, вводя в рассмотрение лишь такие лагранжианы K, которые удовлетворяют уравнениям гравитации

$$K_{\mu\nu} - \varkappa T_{\mu\nu} = 0. \tag{37}$$

Для вычисления вариации интеграла действия (36) он предварительно вычисляет выражения для вариаций гравитационных потенциалов $g^{\mu\nu}$ при бесконечно малом изменении мировых параметров $w^{\mu} : \overline{w}^{\mu} = w^{\mu} + p^{\mu}$. Путем несложных преобразований Клейн находит хорошо известные соотношения для $\delta g^{\mu\nu}$:

$$\delta g^{\mu\nu} = p^{\mu\nu} = \sum_{\tau} (g^{\mu\nu}_{\tau} p^{\tau} - g^{\mu\tau} p^{\nu}_{\tau} - g^{\nu\tau} p^{\mu}_{\tau}), \tag{38}$$

без достаточных разъяснений и вывода фигурировавшие еще в работе Гильберта 1915 г. Затем, рассматривая лагранжиан K как функцию $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_{\tau}$, $g^{\mu\nu}_{\tau\rho}$ и считая, что она не зависит явно от w^{μ}, он стандартным образом находит вариацию интеграла (36):

$$\delta J_1 = -\int_{\Omega} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \sqrt{g} K}{\partial g^{\mu\nu}} p^{\mu\nu} + \sum_{\rho} \frac{\partial \sqrt{g} K}{\partial g^{\mu\nu}_{\rho}} p^{\mu\nu}_{\rho} + \sum_{\rho,\sigma} \frac{\partial \sqrt{g} K}{\partial g^{\mu\nu}_{\rho\sigma}} p^{\mu\nu}_{\rho\sigma} \right) dS +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \sqrt{g} K (p^{\mathrm{I}} \, dw^{\mathrm{II}} \, dw^{\mathrm{III}} \, dw^{\mathrm{IV}} + \ldots + p^{\mathrm{IV}} \, dw^{\mathrm{I}} \, dw^{\mathrm{II}} \, dw^{\mathrm{III}}), \tag{39}$$

где $dS = dw_1 \, dw_2 \, dw_3 \, dw_4$; $\partial\Omega$ — 3-мерная поверхность, ограничивающая 4-мерную область интегрирования Ω. Существенно, что p^{μ} пока совершенно произвольны (не ограничены условием исчезновения на границе области интегрирования). Посредством интегрирования по частям и использования выражения для $\delta g^{\mu\nu}$ Клейн преобразовывает вариацию (39) к виду

$$\delta J_1 = -\int_{\Omega} \sum_{\tau} \left(\sqrt{g} \sum_{\mu\nu} K_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_{\tau} + 2 \sum_{\sigma} \frac{\partial \sqrt{g} K^{\sigma}_{\tau}}{\partial w^{\sigma}} \right) p^{\tau} \, dS +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \sqrt{g} (\varepsilon^{\mathrm{I}} \, dw^{\mathrm{II}} \, dw^{\mathrm{III}} \, dw^{\mathrm{IV}} + \ldots + \varepsilon^{\mathrm{IV}} \, dw^{\mathrm{I}} \, dw^{\mathrm{II}} \, dw^{\mathrm{III}}), \tag{40}$$

Здесь:

$$K_{\mu\nu}=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial\sqrt{g}\,K}{\partial g^{\mu\nu}}-\sum_{\rho}\frac{\partial\left(\frac{\partial\sqrt{g}\,K}{\partial g^{\mu\nu}_{\rho}}\right)}{\partial w^{\rho}}+\sum_{\rho\sigma}\frac{\partial^{2}\left(\frac{\partial\sqrt{g}\,K}{\partial g^{\mu\nu}_{\rho\sigma}}\right)}{\partial w^{\rho}\partial w^{\sigma}}\right), \tag{41}$$

$$\varepsilon^{\sigma}=\eta^{\sigma}+2\sum_{\tau}K^{\sigma}_{\tau}p^{\tau}, \tag{42}$$

$$\eta^{\sigma}=K^{\sigma}_{p}-\sum_{\mu\nu}\frac{\partial K}{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}}p^{\mu\nu}-\sum_{\mu\nu\rho}\frac{\partial K}{\partial g^{\mu\nu}_{\rho\sigma}}p^{\mu\nu}_{\rho}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{\mu\nu\rho}\frac{\partial\left(\frac{\partial\sqrt{g}\,K}{\partial g^{\mu\nu}_{\rho\sigma}}\right)}{\partial w^{\rho}}p^{\mu\nu}. \tag{43}$$

Тогда, обозначая первый интеграл буквой A, а второй — B, он находит:

$$\delta J_{1}=-A+B. \tag{44}$$

Выражение B можно, по формуле Гаусса, преобразовать к виду

$$B=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\sqrt{g}\,\varepsilon^{\mathrm{I}}}{\partial w^{\mathrm{I}}}+\quad+\frac{\partial\sqrt{g}\,\varepsilon^{\mathrm{IV}}}{\partial w^{\mathrm{IV}}}\right). \tag{45}$$

Если же ограничиться постоянными p^{τ}: $p^{\tau}=p^{\tau}_{0}=\mathrm{const}$ и учесть, что функция K не зависит явно от координат w^{μ}, т.е. что интеграл действия J_1 инвариантен относительно 4-параметрической группы переносов, то

$$\delta J_{1}=-A+B=0,$$

откуда получается, ввиду произвольности выбора области интегрирования, важное тождество

$$\sum_{\tau}\left(\sqrt{g}\sum_{\mu\nu}K_{\mu\nu}g^{\mu\nu}_{\tau}+2\sum_{\sigma}\frac{\partial\sqrt{g}K^{\sigma}_{\tau}}{\partial w^{\sigma}}\right)p^{\tau}_{0}\equiv\sum_{\sigma}\frac{\partial\sqrt{g}\,\varepsilon^{\sigma}_{0}}{\partial w^{\sigma}}\equiv$$
$$\equiv\sum_{\sigma}\frac{\partial\sqrt{g}\,\eta^{\sigma}_{0}}{\partial w^{\sigma}}+2\sum_{\sigma\tau}\partial\sqrt{g}K^{\sigma}_{\tau}/\partial w^{\sigma}\cdot p^{\tau}_{0}, \tag{46}$$

где ε^{σ}_{0} и η^{σ}_{0} — это ε^{σ} и η^{σ} при $p^{\tau}=p^{\tau}_{0}$. Это тождество можно несколько упростить за счет приведения членов

$$2\sum_{\sigma\tau}\partial\sqrt{g}K^{\tau}_{\sigma}/\partial w^{\sigma}\cdot p^{\tau}_{0}$$

в правой и левой части и представления η_0^σ в виде

$$\eta_0^\sigma = 2\sum_\tau U_\tau^\sigma p_0^\tau. \tag{47}$$

Величины U_τ^σ тогда примут следующую форму:

$$2U_\tau^\sigma = K\delta_\tau^\sigma - \sum_{\mu\nu}\frac{\partial K}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}} g_\tau^{\mu\nu} - \sum_{\mu\nu\tau}\frac{\partial K}{\partial g_{\rho\sigma}^{\mu\nu}} g_{\rho\tau}^{\mu\nu} + $$

$$+ \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{\mu\nu\rho}\frac{\partial\left(\dfrac{\partial\sqrt{g}\,K}{\partial g_{\rho\sigma}^{\mu\nu}}\right)}{\partial w^\rho} g_\tau^{\mu\nu} \tag{48}$$

Принимая во внимание формулы (47) и (48), Клейн преобразовывает основное тождество (46) к виду

$$\sum_{\mu\nu}\sqrt{g}K_{\mu\nu}g_\tau^{\mu\nu} \equiv 2\sum_\sigma\frac{\partial\sqrt{g}\,U_\tau^\sigma}{\partial w^\sigma} \quad (\tau = 1, 2, 3, 4). \tag{49}$$

Последнее соотношение в дальнейшем окажется особенно удобным для получения эйнштейновской и лоренцовой форм закона сохранения энергии-импульса. Далее Клейн делает важное замечание о неоднозначности лагранжиана, приводящего к одним и тем же уравнениям Лагранжа—Эйлера. Два лагранжиана являются в этом смысле эквивалентными, если они отличаются друг от друга на дивергентный член, который не дает вклада в лагранж-эйлеровские уравнения.

Лагранжиан вида $K^* = K + \mathrm{div}$ приводит соответственно к другим выражениям для величин U_τ^σ (именно $U_\tau^{*\sigma}$), фигурирующим в тождествах (49).

Получив эти важные соотношения, Клейн вводит затем фундаментальное ограничение на функцию K, полагая ее инвариантом относительно $\mathscr{E}$-группы. Приняв это, он без труда устанавливает трансформационные свойства величин $K_{\mu\nu}$, ε^σ, η^σ, являющихся тензорами относительно $\mathscr{E}$-группы, так же как и величины

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_\sigma\frac{\partial\sqrt{g}\,\varepsilon^\sigma}{\partial w^\sigma}, \quad \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_\sigma\frac{\partial\sqrt{g}\,\eta^\sigma}{\partial w^\sigma},$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{\tau\sigma}\frac{\partial(\sqrt{g}K_\tau^\sigma p^\tau)}{\partial w^\sigma}$$ [102].

Но величины U_τ^σ, происхождение которых связано с принятием гипотезы: $p^\tau = p_0^\tau$, являются тензорами лишь относительно аффинной группы преобразований, хотя, конечно, выражение

$$\frac{2}{\sqrt{g}}\sum_{\sigma}\frac{\partial \sqrt{g}\,(U_{\tau}^{\sigma}+K_{\tau}^{\sigma})}{\partial w^{\sigma}}=0, \tag{50}$$

не зависящее от p^{τ}, является общековариантным вектором. То же самое касается и выражения

$$\frac{2}{\sqrt{g}}\sum\frac{\partial \sqrt{g}\,(U_{\tau}^{*\sigma}+K_{\tau}^{\sigma})}{\partial w^{\sigma}}. \tag{51}$$

Формулируя далее общековариантный вариационный принцип, из которого могут быть выведены уравнения гравитации для пустого пространства, Клейн при любом выборе p^{τ} получает

$$\delta J_1 = \delta\int K\,d\omega = 0. \tag{52}$$

Принимая во внимание представление (44) и выражение для A, а также предполагая исчезновение вариаций p^{τ} и их производных на границе области интегрирования, так что выражение B обращается в нуль, он, ввиду произвольности выбора вариаций p^{τ} и области интегрирования, получает важные тождества, которые в дальнейшем называются A-тождествами:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{g}\sum_{\mu\nu}K_{\mu\nu}g_{\tau}^{\mu\nu}+2\sum_{\sigma}\frac{\partial \sqrt{g}K_{\tau}^{\sigma}}{\partial w^{\sigma}}\right)\equiv 0 \qquad (\tau=1,2,3,4). \tag{53}$$

Вследствие этих тождеств и соотношений (52) и (44) интеграл B также аннулируется при произвольных p^{τ}. Снова, ввиду произвола в выборе p^{τ} и области интегрирования, получается тождественное обращение в нуль обычной дивергенции вектора ε^{σ}:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{\sigma}\frac{\partial \sqrt{g}\,e^{\sigma}}{\partial w^{\sigma}}\equiv 0, \tag{54}$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{\sigma}\frac{\partial \sqrt{g}\,(\eta^{\sigma}+2\sum K_{\tau}^{\sigma}p^{\tau})}{\partial w^{\sigma}}\equiv 0. \tag{55}$$

Так как левые части уравнений (54) или (55) зависят от вариаций p^{τ} и их производных до третьего порядка, то эти тождества могут быть разложены на $4\cdot\left(1+4+\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}+\frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\right)=140$ элементарных тождеств. Действительно, η^{σ} можно записать в форме:

$$\eta^{\sigma}=2\left(\sum U_{\tau}^{\sigma}p^{\tau}+\sum U_{\tau}^{\sigma,\sigma'}p_{\sigma'}^{\tau}+\sum U_{\tau}^{\sigma,\sigma'\sigma''}p_{\sigma'\sigma''}^{\tau}\right) \tag{56}$$

(индексы, не разделенные запятой, переставимы — обозначения

Клейна). Тогда в тождестве (55) коэффициенты при вариациях p^τ и их производных следует в отдельности приравнять нулю, и мы получим

1) 4 тождества, соответствующих члену с p^τ:

$$\sum \sqrt{g}\,(U^\sigma_{\tau,\sigma} + K^\sigma_{\tau,\sigma}) \equiv 0, \tag{57}$$

2) 16 тождеств, соответствующих члену с p^τ_σ:

$$\sqrt{g}\left(U^\sigma_\tau + K^\sigma_\tau + \sum_{\sigma'} U^{\sigma',\sigma}_{\tau,\sigma'}\right) \equiv 0, \tag{58}$$

3) 40 тождеств, соответствующих члену с $p^\tau_{\sigma'\sigma''}$:

$$\sqrt{g}\left(U^{\sigma',\sigma''}_\tau + U^{\sigma'',\sigma'}_\tau + \sum_\sigma U^{\sigma,\sigma'\sigma''}_{\tau,\sigma}\right) \equiv 0, \tag{59}$$

4) 80 тождеств, связанных с членом с $p^\tau_{\sigma\sigma'\sigma''}$:

$$\sqrt{g}\,(U^{\sigma,\sigma'\sigma''}_\tau + U^{\sigma',\sigma''\sigma}_\tau + U^{\sigma,\sigma'\sigma''}_\tau) \equiv 0. \tag{60}$$

Это — другая форма записи тождеств B, между которыми, как отмечает Клейн, могут существовать зависимости. Нетрудно заметить, что (57) и (53) совпадают в силу соотношения (49). Тождества A, т. е. (53), могут быть записаны в одной из трех форм (в последних двух использованы также тождества (49) и их аналог для лагранжиана K^*):

$$\left.\begin{aligned}
&A_\alpha: \frac{2}{\sqrt{g}}\sum \frac{\partial \sqrt{g}K^\sigma_\tau}{\partial w^\sigma} + \sum K_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_\tau \equiv 0,\\
&A_\beta: \frac{2}{\sqrt{g}}\sum \frac{\partial \sqrt{g}\,(K^\sigma_\tau + U^\sigma_\tau)}{\partial w^\sigma} \equiv 0,\\
&A_\gamma\ \ \frac{2}{\sqrt{g}}\sum \frac{\partial \sqrt{g}\,(K^\sigma_\tau + U^{*\sigma}_\tau)}{\partial w^\sigma} \equiv 0.
\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Эти тождества, как и B-тождества, как раз и являются основой для получения всевозможных форм закона сохранения энергии-импульса, полученных в 1915—1918 гг. Эйнштейном, Гильбертом, Лоренцом, Клейном, Вейлем и другими. Для перехода к выражениям закона сохранения, содержащим тензор энергии-импульса «материи», Клейн использует последнее ограничение на лагранжиан K, а именно уравнения гравитации в форме (37). Подставляя в тождества A представление величин $K_{\mu\nu}$ через компоненты тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$, Клейн получает следующие три выражения закона сохранения энергии-импульса в дифференциальной форме:

$$\text{из } A_\alpha \quad \sum \frac{\partial \sqrt{g} T_\tau^\sigma}{\partial w^\sigma} + \frac{1}{2} \sum \sqrt{g} T_{\mu\nu} g_\tau^{\mu\nu} = 0, \tag{62}$$

$$\text{или } \sum \frac{\partial \sqrt{g} T_\tau^\sigma}{\partial w^\sigma} + \frac{1}{2\varkappa} \sum \sqrt{g} K_{\mu\nu} g_\tau^{\mu\nu} = 0, \tag{62'}$$

$$\text{из } A_\beta : \sum \frac{\partial \sqrt{g} \left(T_\tau^\sigma + \frac{1}{\varkappa} U_\tau^\sigma \right)}{\partial w^\sigma} = 0, \tag{63}$$

$$\text{из } A_\gamma : \sum \frac{\partial \sqrt{g} \left(T_\tau^\sigma + \frac{1}{\varkappa} U_\tau^{*\sigma} \right)}{\partial w^\sigma} = 0. \tag{64}$$

Ниже мы используем эти формулы, которые фактически совпадают с выражениями для закона сохранения энергии-импульса у Эйнштейна, Вейля и др. (62) — (62′), у Лоренца (63), у Эйнштейна (64) [103]. Беря за основу тождества B, например в форме (54) или (55), и учитывая (37), Клейн получает закон сохранения энергии-импульса в гильбертовской форме [104]:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \sum \frac{\partial \sqrt{g} e^\sigma}{\partial w^\sigma} = 0, \tag{65}$$

где e^σ отличается от ε^σ тем, что в ε^σ вместо $K_{\mu\nu}$ подставлено $\varkappa T_{\mu\nu}$, т. е.

$$e^\sigma = \eta^\sigma + 2\varkappa \sum_\tau T_\tau^\sigma p^\tau. \tag{66}$$

Если тождества B представить как $(4 + 16 + 40 + 80)$ элементарных тождеств (57) — (60) и в них вместо $K_{\mu\nu}$ снова подставить $\varkappa T_{\mu\nu}$, то 4 тождества (57) оказываются эквивалентными закону сохранения в дивергентной (лоренцовой или эйнштейновской) форме (63) или (64); 16 тождеств (58) совпадают с 16 уравнениями гравитационного поля; остальные $(40 + 80)$ не затрагивают «материи», а являются математическими условиями на коэффициенты типа $U_\tau^{\sigma'\sigma''}$, $U_{\tau,\sigma}^{\sigma,\sigma'\sigma''}$, $U_\tau^{\sigma,\sigma'\sigma''}$ Таким образом, гильбертовская форма закона сохранения, будучи основана на клейновских тождествах B, вывод которых, в свою очередь, оказался возможным лишь благодаря клейновскому способу варьирования с произвольными вариациями p^μ, оказывается даже более общей, чем другие; эйнштейновская и лоренцовская формулировки (62) — (64) фактически содержатся в гильбертовской. При этом, если в первых двух подчеркивается *нетензорный* характер компонент энергии-импульса гравитационного поля t_{ik}, то третья показывает, что тензорность вектора энергии может быть достигнута лишь за счет введения произвольного векторного поля p^μ. Нетрудно заметить, что ход рассуждений Клейна таков. Сначала он рассматривает инвариантность действия относительно группы переносов и получает на этой основе, реализуя, по существу говоря, алгоритм первой теоремы Нетер, серию выражений для законов сохранения, аналогичных обычным законам сохранения. Затем он принимает во внимание инвариантность действия относительно $\mathscr{E}$-группы, т. е. общую ковариантность теории, тогда группа переносов становится подгруппой $\mathscr{E}$-группы, и это позволяет ему, реализуя фактически алгоритм второй теоремы Нетер, обнаружить *тождественный* характер полученных выше законов сохранения. В подтверждение сказанного приведем примечание, сделанное Клейном к своей статье 1921 г.: «Упомянутая в § 2 «основная теорема» (а именно тождество (46). — *В. В.*) является частным случаем следующей обширной теоремы, доказанной Э. Нетер (дается формулировка первой теоремы Нетер.— *В. В.*)... Что же касается утверждения Гильберта («о падении в общей теории относительности собственных законов сохранения», т. е. выполняющихся лишь в силу уравнений Лагранжа — Эйлера; это утверждение, по существу говоря, и использует Клейн.— *В. В.*), то его точная формулировка, которая была дана Э. Нетер, такова: «если интеграл J допускает группу переносов, то соотношения энергии тогда и только тогда несобственные, когда J инвариантен относительно бесконечной группы, содержащей группу переносов в качестве подгруппы» [105].

Таким образом, в рассмотренной работе Клейна содержались рассуждения и вычисления, соответствующие применению обеих теорем Нетер и «утверждения Гильберта» к общей теории относительности, хотя строгие формулировки и полные доказательства этих теорем были даны лишь в статье Э. Нетер. Впрочем, это не означает, что Клейн воспользовался известными ему результатами Э. Нетер. Оба исследования проводились параллельно в тесном творческом контакте между Клейном и Э. Нетер, и было бы, по-видимому, правильнее сказать, что, с одной стороны, теоремы Нетер — результат обобщения общерелятивистских исследований Гильберта, Клейна (особенно его второй статьи, т. е. рассмотренной выше статьи 1918 г.) и самой Э. Нетер, а с другой — простота, наглядность и общность результатов, полученных Клейном,— следствие общего подхода, развитого Э. Нетер[106].

Мы уже подчеркивали, что, хотя общие построения Клейна основывались главным образом на предыдущих звеньях «геттингенской цепочки», упомянутые выше статьи Лоренца, Эйнштейна, Вейля и некоторых других исследователей имели известное значение для Клейна, прежде всего в том отношении, что они стимулировали его работу наличием большого разнообразия формулировок закона сохранения энергии-импульса. Кстати говоря, основное значение этой работы Клейна и заключалось в том, что она выяснила причину этого разнообразия и позволила получить все различные формы закона сохранения энергии-импульса с единой точки зрения — а именно на основе концепции взаимосвязи симметрия—сохранение.

Работы Лоренца, Эйнштейна, Вейля (1916—1918)

> «Наиболее близко к моим исследованиям стоят, пожалуй, исследования *Лоренца*, который, однако, ограничивался рассмотрением бесконечно малых преобразований $\delta w^{\tau} = p^{\tau}$, не зависящих от координат w.
>
> *Эйнштейн* рассматривает такие p^{τ}, которые соответствуют аффинным преобразованиям переменных w, *Вейль* ... такие p^{τ}, которые исчезают на границе области интегрирования, будучи в остальном произвольными».
>
> Ф. Клейн [107]

Лоренц — представитель блестящей группы теоретиков переходной эпохи: от классики к современной релятивистской и квантовой физике, таких, как Больцман, Пуанкаре, Лауэ, Ланжевен, Лармор, Планк и другие. Вклад их в теорию относительности и квантовую физику весьма значителен, хотя многие из них в принципиальных вопросах так и остались на классических позициях. Это в полной мере относится и к Лоренцу [108]. Для Лоренца, как и для других физиков этой группы, было характерно широкое использование вариационных принципов и признание их в качестве наиболее фундаментальных принципов физической теории [109]. Наряду с Лармором и Шварцшильдом [110], он одним из первых установил вариационную структуру уравнений электронной теории [111]. К тому же еще до появления первых общерелятивистских исследований Эйнштейна (1912—1913) он, как Пуанкаре и Минковский и другие, пытался построить лоренц-ковариантную теорию тяготения [112]. Л. де Бройль подчеркивал удивительную способность Лоренца к восприятию новых идей, их дальнейшему углублению и распространению, несмотря на известную консервативность, связанную с надеждой на своеобразный реванш классических концепций [113].

Эта черта проявилась и в цикле его работ 1915—1917 гг. «Об эйнштейновской теории тяготения», первая из которых была опубликована до выхода в свет решающих работ Эйнштейна и Гильберта и перепечатана в ЖРФХО за 1915 г. [114] Четыре следующих были опубликованы одна за другой в течение 1916 г. [115]

Основное место в этих статьях занимало систематическое применение вариационных принципов для вывода уравнений движения частицы в гравитационном поле и уравнений гравитационного поля, а также законов сохранения. Не рассматривая сколько-нибудь подробно и последовательно рассуждения и выкладки Лоренца, назовем лишь два основных его результата, имеющих непосредственное отношение к проблеме взаимосвязи симметрия — сохранение.

1) Наиболее важным представляется в этом плане вывод законов сохранения энергии-импульса в дифференциальной форме как без введения компонент энергии-импульса гравитационного поля,

так и посредством введения соответствующей величины, аналогичной эйнштейновскому псевдотензору. По существу, в основу этого вывода положена взаимосвязь симметрия—сохранение. Более точно, законы сохранения энергии-импульса выводятся Лоренцом из инвариантности вариационного функционала относительно бесконечно малых переносов независимых координат («мировых параметров»). Эта идея использовалась Лоренцом уже в работе 1915 г., когда еще не была достигнута общая ковариантность теории тяготения. Уже тогда он использовал вариации «мировых параметров», не исчезающие на границе области интегрирования, что, как мы знаем, определило наглядность и бо́льшую общность рассмотренной выше работы Клейна. Вместе с тем, он ограничивался использованием вариаций p^{μ}, равных константам: $p^{\mu} = p_0^{\mu} = \mathrm{const}$. Поэтому закон сохранения энергии-импульса системы «материя» + гравитационное поле, полученный Лоренцом, имел форму, эквивалентную выражению (63).

Комментируя соотношение (63), Клейн замечает: «Это по сути дела закон сохранения энергии-импульса, как он был установлен Лоренцом в третьей части названного выше ряда статей, сравни стр. 482 формула (79) (т. е. с формулой: $K_h = -\operatorname{div}_h T - \operatorname{div}_h t$, где K_h—внешние силы, действующие на материальную точку, которые в соответствии с духом общей теории относительности можно положить равными 0, а T и t — символическая запись компонент энергии-импульса «материи» и гравитационного поля.— *В. В.*). Непосредственное отождествление в известной степени громоздко, так как Лоренц для вычисления δJ_1 использовал не $\delta g^{\mu\nu}$, а $\delta g_{\mu\nu}$; однако в совпадении результатов можно не сомневаться, так как он в своем выводе исходил из тех же самых бесконечно малых преобразований $\delta w^{\tau} = p^{\tau}$ (с постоянными p^{τ}), которые привели нас к тождеству A_{β} (т. е. (61) и (63).— *В. В.*)» [116].

Впоследствии (1919—1920) Клейн указал, что отождествление соотношения (63) с лоренцовским (79) было осуществлено Вермайлем путем непосредственного вычисления [117].

Кроме того, Лоренц отдавал себе ясный отчет в известной неудовлетворительности такого построения, ведущего к нетензорности компонент энергии-импульса гравитационного поля; последнее он хорошо проиллюстрировал на примере шварцшильдовой метрики [118].

2) Выяснив это, Лоренц пытался сформулировать тензорный аналог закона сохранения энергии-импульса: «Очевидно, было бы более удовлетворительно, если бы мы могли приписать гравитационному полю (т. е. компонентам его энергии-импульса.— *В. В.*) тензорный характер» [119]. Идея его заключалась в том, чтобы компоненты энергии-импульса гравитационного поля отождествить не с той или иной формой псевдотензора (или комплекса) t_h^l, а с *тензором*

$$\frac{1}{\varkappa} G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\varkappa}\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R\right),$$

т. е. с левой частью уравнений гравитации. Действительно, на основе этих уравнений можно сразу написать

$$T_{\alpha\beta} + \frac{1}{\varkappa} G_{\alpha\beta} = 0$$

и тем более

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(T_{\alpha\beta} + \frac{1}{\varkappa} G_{\alpha\beta}\right) = 0, \tag{67}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\sqrt{-g}\left(T^\beta_\alpha + \frac{1}{\varkappa} G^\beta_\alpha\right)\right] = 0. \tag{67'}$$

Аналогичное предложение было несколько позднее выдвинуто также Леви-Чивитой [120]. Убедительное возражение против такого («нулевого») тензора энергии-импульса привел Эйнштейн в своей статье 1918 г. [121] Оно заключалось в том, что в этом случае энергия замкнутой системы всегда была бы равна нулю, что не требовало бы продолжения существования системы в каком-либо виде. Тогда закон сохранения вырождался бы в тривиальное утверждение, из которого нельзя было извлечь никаких следствий, обычно извлекаемых из законов сохранения [122].

Возвращаясь к лоренцовскому выводу закона сохранения, подчеркнем следующее: несмотря на то что метод Лоренца в известной степени был аналогичен методу Клейна и предвосхищал его и что Лоренц понимал нетензорный характер компонент энергии-импульса гравитационного поля, ряд важных вопросов, связанных с рассматриваемой проблемой, остался невыясненным. Это прежде всего касается нечеткого различения законов сохранения в общей теории относительности и в теориях типа классической механики и специальной теории относительности; закон сохранения энергии-импульса в общей теории относительности рассматривается Лоренцом в связи с бесконечно малыми переносами «мировых параметров», но не преобразованиями, соответствующими $\mathscr{E}$-группе. С этим обстоятельством связано отсутствующее у Лоренца обсуждение тождественного характера закона сохранения энергии-импульса в общей теории относительности. В значительной мере остался в тени вопрос и об интегральной форме законов сохранения. Тем не менее, работы Лоренца имели определенное значение, так как они наряду с работами Гильберта и Эйнштейна обращали внимание на большую эвристическую и систематизирующую роль вариационных принципов, в частности для разработки проблемы сохранения. Они оказали некоторое влияние на Клейна, Эйнштейна и Вейля, ссылавшихся на Лоренца (см. табл. 2).

В ноябре 1916 г. была напечатана статья Эйнштейна, посвященная применению принципа Гамильтона в общей теории относительности [123]. Ссылаясь на рассмотренные выше работы Гильберта и

Лоренца, он пишет: «В последнее время Г. А. Лоренцу и Д. Гильберту удалось придать общей теории относительности особенно наглядную форму тем, что они вывели ее уравнения из одного единственного вариационного принципа». И далее: «Цель будет заключаться в том, чтобы сделать основные соотношения возможно более ясными и настолько общими, насколько это допускает точка зрения общей теории относительности. В противоположность изложению, главным образом Гильберта, будет сделано по возможности меньше специальных допущений о свойствах материи. В то же время, в противовес моему последнему изложению предмета, выбор координатной системы останется теперь совершенно свободным» [124].

Выкладки Эйнштейна действительно отличаются краткостью и простотой, что особенно бросается в глаза после работ Лоренца. Принципиально же по отношению к проблеме сохранения в общей теории относительности он, по существу, близок к Лоренцу, так как исходит из вариации p^s «мировых параметров» w^s, отвечающих линейным преобразованиям w^s. Основное же отличие эйнштейновского подхода заключается в другом выборе лагранжиана. Выбирая в качестве лагранжиана не инвариант Римана—Кристоффеля K, а выражение K^*, которое отличается от него на дивергентный член, не дающий вклада в уравнения поля, и в отличие от K содержит лишь величины $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_{\tau}$, но не $g^{\mu\nu}_{\tau\rho}$, Эйнштейн приходит к закону сохранения энергии-импульса в форме (64).

Это достигается благодаря тому, что K^* оказывается инвариантным лишь относительно линейных преобразований, хотя исходный вариационный принцип общековариантен. Далее, весьма элегантным, хотя и несколько формальным образом Эйнштейн реализует взаимосвязь симметрия—сохранение для линейных преобразований «мировых параметров». При этом клейновские $\frac{1}{\varkappa} U^{*\sigma}_{\tau}$ естественно отождествляются с компонентами эйнштейновского псевдотензора

$$t^{\nu}_{\sigma} = \frac{1}{2}\left(K^*\delta^{\nu}_{\sigma} - \frac{\partial K^*}{\partial g^{\mu\alpha}_{\nu}}\, g^{\mu\alpha}_{\sigma}\right). \qquad (68)$$

Нетензорный характер t^{ν}_{σ} и тождественный характер соответствующего закона сохранения, а также интегральная форма его обсуждались Эйнштейном раньше, правда, несколько схематично и недостаточно подробно [125]. Кроме того, недостаточно отчетливо в этой и предыдущих работах Эйнштейна была подчеркнута принципиальная разница между общерелятивистскими и обычными законами сохранения.

Первая общерелятивистская работа Г. Вейля, выдающегося ученика Гильберта, внесшего, как и его учитель, значительный вклад в самые различные области математики, теоретической физики и философии естествознания [126], «К теории тяготения» (1917) опиралась на рассмотренные выше работы Гильберта, Лоренца и главным образом Эйнштейна. Его вывод закона сохранения, также основанный на взаимосвязи симметрия—сохранение, отличается простотой и оригинальностью [127]. Весьма характерно название § 2 его статьи, посвященного обсуждению закона сохранения в общей теории относительности: «Закон сохранения энергии-импульса — общее выражение того, что принцип Гамильтона выполняется для таких вариаций функций состояния (Zustandgrößen, т. е. $g^{\mu\nu}$.— *В. В.*), которые порождаются бесконечно малой деформацией 4-мерного мирового континуума таким образом, что функции состояния увлекаются этой деформацией» [128]. Ограничиваясь рассмотрением таких вариаций, которые исчезают на границах области интегрирования вместе со своими производными, Вейль, по существу, получает соотношения, совпадающие с клейновскими (62) — (62′). Последние, как мы видели, были получены посредством использования тождеств в форме A_α (61), выведенных при том же условии исчезновения вариаций координат p^μ и их производных на границе области интегрирования. Однако последовательность рассуждений Вейля несколько иная.

Рассматривая вариацию «материальной» части действия при произвольном бесконечно малом преобразовании «мировых параметров» и учитывая его инвариантность при таком преобразовании, Вейль путем несложных вычислений получает закон сохранения энергии-импульса «материи» с учетом гравитации в форме (62). Если же принять во внимание уравнения гравитационного поля, то немедленно обнаруживается тождественный характер четырех соотношений (62). «В системе «материальных» и гравитационных уравнений поэтому содержатся четыре избыточных уравнения; действительно, в общем решении должны фигурировать 4 произвольные функции, так как уравнения вследствие их инвариантной (относительно $\mathscr{E}$-группы.— *В. В.*) природы оставляют полностью неопределенной систему координат x_i»,— этим замечанием в духе Гильберта заканчивает Вейль раздел, посвященный законам сохранения [129]. В первом издании своей блестящей книги «Raum, Zeit, Materie», вышедшей в свет в начале 1918 г. [130], он, по существу, ничего не изменил в изложении проблемы сохранения. В более же поздних изданиях, например в четвертом, вышедшем в свет в 1920 г., Вейль учел фундаментальные работы Клейна и Э. Нетер [131].

Сделаем еще несколько замечаний о работах Эйнштейна, Шредингера, Бауэра и некоторых других исследователей, посвященных обсуждению интегральной формы закона сохранения энергии-импульса и связанной с этим проблемой физического смысла энергии в общей теории относительности.

Хотя работа Эйнштейна «Закон сохранения энергии в общей теории относительности», поступившая в редакцию 30 мая 1918 г. [132], и не оказала какого-либо влияния на установление нетеровских теорем, она была важной вехой на пути выяснения смысла общерелятивистских законов сохранения и касалась главным образом проблем нетензорного характера компонент t_{ik} и интегральной формулировки законов сохранения. Уже Лоренц, Леви-Чивита в 1916—1917 гг. пытались отказаться от псевдотензорных величин типа t_{ik} и найти *тензорный* вариант закона сохранения [133]. Затем Шредингер и Бауэр показали прямым вычислением для некоторых конкретных случаев, что посредством различного выбора систем отсчета полная энергия может быть сделана бесконечной или же, наоборот, равной нулю, а плотность энергии t_{ik} может быть даже отрицательной (и также равной нулю) [135]. Эти затруднения с понятием энергии в общей теории относительности, конечно, были следствием нетензорности различных выражений для компонент t_{ik}, против которых поэтому и выступали Бауэр, Шредингер и замену которым еще раньше пытались найти Лоренц и Леви-Чивита.

Эйнштейн со всей обстоятельностью рассмотрел все возражения и защитил свою точку зрения, выдвинув в качестве имеющей действительное значение интегральную форму закона сохранения: «В своей первоначальной формулировке закон сохранения энергии, так же как и образованный из трех аналогичных уравнений сохранения закон сохранения импульса, являлся интегральным» [135] и далее: «Опыт вынуждает нас искать такой *дифференциальный* закон, который был бы эквивалентен интегральным законам сохранения энергии и импульса» [136]. Справедливо отвергнув «нулевой» вариант закона сохранения Леви-Чивиты и Лоренца, Эйнштейн весьма несложными рассуждениями показал, что постоянство интегрального вектора энергии-импульса

$$J_i = \int \sqrt{g}\,(T_i^4 + t_i^4)\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \qquad (69)$$

в значительной степени не зависит от выбора системы координат, в отличие от локального распределения энергии-импульса. Таким образом, согласно Эйнштейну, псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля t_{ik} лишался непосредственного физического смысла. Не рассматривая хорошо известные рассуждения Эйнштейна, которые спустя полгода несколько усовершенствовал Клейн в третьей статье общерелятивистского цикла (декабрь 1918) [137], сформулируем лишь основной результат. Рассматриваются только такие системы координат, которые вне некоторой ограниченной области B совпадают с галилеевой. Тогда, как показали Эйнштейн и затем Клейн, интегральные значения энергии и импульса (69) инвариантны относительно любых преобразований координат *внутри* области B, а величины J_i образуют вектор относительно линейных преобразований координат не только внутри, но и вне B.

Вместе с тем, решение Эйнштейна не было вполне удовлетворительным, так как плотность энергии-импульса определялась необщековариантным и неоднозначным образом, а определение энергии-импульса системы имело смысл лишь для привилегированных систем координат, галилеевых на бесконечности. За прошедшие 50 лет существенного успеха в этом направлении не было достигнуто. По-прежнему неясно, можно ли говорить о локальном распределении энергии; об энергии, содержащейся в определенном конечном объеме; существует ли вообще чисто гравитационная энергия, которую можно было бы передавать на расстояния; можно ли из полной энергии выделить гравитационную и «материальную» части и т. д. [138] Были поэтому предприняты многочисленные попытки найти выход из всех этих затруднений, имеющих, по-видимому, принципиальный характер и связанных с принципом эквивалентности и геометрическим характером гравитационного поля. Было построено много различных выражений для компонент энергии-импульса гравитационного поля и намечен ряд неортодоксальных подходов к решению проблемы.

Однако в нашу задачу не входит анализ развития этих попыток, тем более что в целом проблема так же далека от решения, как и в 1918 г. [139] Подчеркнем только, что первоначальные попытки решения ее (1915—1918) в значительной степени привели к установлению теорем Нетер, которые, в свою очередь, позволяют наилучшим образом понять сущность и главные причины затруднений, а также четко сформулировать некоторые наиболее важные и бесспорные утверждения в отношении рассматриваемой проблемы. Мы перечислим основные: 1) так как пространство — время общей теории относительности в общем не обладает какими-либо симметриями в смысле конечнопараметрических групп Ли, то понятия энергии и т. д. в этой теории, связанные в теориях типа классической механики или специальной теории относительности с 10-параметрической группой движения плоского пространства—времени, т. е. $\mathscr{P}$-группой, не имеют достаточно ясного аналога; 2) $\mathscr{E}$-инвариантность уравнений гравитации, точнее—соответствующего принципа действия, дает, согласно теоремам Нетер, четыре дифференциальных тождества, позволяющих тем или иным образом сформулировать четыре тождественно выполняющихся закона сохранения в дифференциальной форме, причем переход к дивергентной форме, необходимой для формулировки интегральных законов сохранения, неизбежно связан с введением *нетензорных* компонент энергии-импульса гравитационного поля; 3) произвольные векторные поля, порождающие однопараметрические подгруппы $\mathscr{E}$-группы, согласно теоремам Нетер, дают законы сохранения, не требующие выполнения уравнений Лагранжа—Эйлера («несобственные» или «сильные» законы сохранения). В силу $\mathscr{E}$-инвариантности, таким образом, получается бесконечное множество «сильных» законов сохранения, которые переходят в «собственные» или «слабые», если при этом удовлетворяются уравнения поля; 4) в случае изолированных систем, рассматриваемых в асимптотически плоском пространстве, «сильные» законы сохранения дают возможность получить интегральные сохраняющиеся величины; 5) в частном случае существования групп двиления или привилегированных систем отсчета удается сформулировать полноценные аналоги обычным законом сохранения (на основе первой теоремы Нетер).

Третье и пятое утверждения можно дополнить также таким замечанием: существование конечнопараметрической группы симметрии $\mathcal{G}_\rho$ влечет за собой ρ «слабых» законов сохранения, которые можно расширить до сильных в случае инвариантности теории относительно $\mathcal{E}$-группы, содержащей $\mathcal{G}_\rho$ в качестве подгруппы. «Слабые» законы сохранения существуют лишь тогда, когда $\mathcal{G}_\rho$ нельзя расширить до $\mathcal{E}$-группы, не вводя вспомогательные нединамические поля («утверждение Гильберта») [140].

В заключение этого раздела заметим следующее. Сразу бросается в глаза резкое сокращение времени каждого следующего периода развития взаимосвязи симметрия—сохранение: «механический» — порядка 100 лет, «релятивистский» — приблизительно 10 лет и «общерелятивистский» — не более трех лет. Вместе с тем, именно последний, наиболее краткий период отличается весьма большим числом работ, и именно в конце его были установлены теоремы Нетер. Это объясняется, во-первых, общим ускорением развития теоретических основ физики, а во-вторых, тем, что принципиальные затруднения с формулировкой законов сохранения, возникшие именно в общей теории относительности, в сочетании с глубиной и новизной самой теории привлекли к этой проблеме внимание ряда блестящих физиков и математиков (помимо самого Эйнштейна, таких, как Гильберт, Клейн, Лоренц, Вейль, Леви-Чивита, Шредингер, Э. Нетер и др.). В работах этих авторов выявились принципиальные различия между законами сохранения в общей теории относительности и теориях типа специальной теории относительности. Стремление, с одной стороны, строго обосновать полученные результаты, а с другой,— понять и наглядно представить причины этих различий и привели к установлению теорем Нетер.

Глава VI

ТЕОРЕМЫ НЕТЕР

Творческий путь Э. Нетер

> «При всем том надлежит отметить, что Э. Нетер, этот страстный враг всякого вычислительства и алгоритмики в математике, сама была вполне способна овладеть этой алгоритмикой,— это доказывается не только ее первой диссертацией, действительно не представлявшей большого вклада в науку, но и последующими, ставшими классическими работами о дифференциальных инвариантах (1918 г.). Однако уже в этих работах проявилось основное свойство ее математического дарования: стремление к общим формулировкам математических проблем и умение находить именно ту, в которой раскрывается подлинная логическая природа данного вопроса, освобожденная от всех осложняющих и затуманивающих истинное положение вещей случайных частностей».
>
> П. С. Александров [1]

Прежде чем перейти к анализу фундаментальной работы Э. Нетер, доложенной ею 25 июля 1918 г. на заседании Геттингенского математического общества, через неделю после того, как была там же заслушана рассмотренная в предыдущей главе работа Клейна, мы вкратце опишем путь Э. Нетер в науке и те особенности ее творческого облика, которые в некоторой мере объясняют, почему теоремы Нетер носят ее имя.

Едва ли имеет смысл детально описывать научную биографию Э. Нетер, отошлем к достаточно обстоятельным некрологам, проникновенно написанным Г. Вейлем, П. С. Александровым, Ван дер Варденом и другими [2]. Наша задача в настоящем разделе заключается в том, чтобы выяснить, почему и в связи с чем Э. Нетер обратилась к обсуждаемой теме, и подчеркнуть основные черты ее творческой личности, наложившие отпечаток на характер ее работы об инвариантных вариационных задачах.

Подробный анализ ее математических исследований не входит в нашу задачу, тем более, что кроме двух статей (одна из них как раз «Инвариантные вариационные задачи»), опубликованных в 1918 г., все остальные ее работы относятся к чистой алгебре. Мы будем говорить о них лишь в связи с поставленной задачей.

Итак, Эмми Нетер — выдающийся немецкий алгебраист, вероятно, наиболее значительная женщина-математик, заложившая основы современной абстрактной алгебры, родилась 23 марта 1882 г. в Эрлангене в семье известного немецкого математика Макса Нетера (1844—1921). Вейль в упомянутом некрологе подчеркивал, что именно отец и другой известный эрлангенский алгебраист Пауль Гордан (1837—1912) определили ту духовную атмосферу, в которой выросла Э. Нетер [3].

Оба они были учениками выдающегося немецкого математика Клебша (1833—1872), одного из основателей формальной теории алгебраических инвариантов.

В 1874 и 1875 гг. в Эрлангенском университете начали свою деятельность П. Гордан и М. Нетер, образовавшие ядро школы Клебша. Оба математика испытали также заметное воздействие «Эрлангенской программы» Клейна [4]. М. Нетер сам был главой алгебро-геометрической школы и посвятил себя главным образом исследованиям алгебраических функций и кривых в связи с теорией абелевых интегралов, ведущей свое начало от Римана, Вейерштрасса и Клебша. Клейн и Вейль чрезвычайно высоко оценивали его результаты в этой области, которая в середине и конце XIX в. казалась математикам одним из наиболее перспективных разделов. П. Гордан был, пожалуй, наиболее ярким представителем формально-вычислительного направления в алгебраической теории инвариантов и ближайшим учеником и сотрудником Клебша [5]. В 1866 г. было напечатано их совместное сочинение «Теория абелевых функций», в котором эта теория тесно связывалась с теорией инвариантов. Предисловие к книге заканчивалось словами: «Наконец, и эта область включается в те ветви новейшей алгебры (т. е. теорию алгебраических инвариантов.— *В. В.*), которым, очевидно, предназначено стать центром всего развития современной математики» [6].

В дальнейшем Гордан полностью сосредоточился на теории инвариантов, где он достиг значительных успехов (формально-вычислительное направление) и «до своей смерти оставался признанным руководителем в этой сфере» [7]. Одним из главных результатов, полученных Горданом, была теорема о конечности базиса из рациональных инвариантов и ковариантов для любой бинарной формы, доказанная явным построением на основе развитого им символического метода (1868). «Его сила основывалась на изобретении и проведении формально-вычислительных операций. Об этом говорит его статья, где на 20 страниц формул нет ни одного слова» [8]. М. Нетер справедливо называл его «алгоритмиком». В 1890—1892 гг. вышеупомянутая теорема Гордана была доказана Гильбертом для произвольного числа переменных и совершенно иным способом, не связанным с громоздкими и формальными вычислениями символической теории, а основанным на абстрактно-алгебраических идеях, восходящих к Дедекинду [9]. Как образно выразился Вейль, «он (т. е. Гильберт.— *В. В.*) решил основную проблему и тем самым почти убил весь предмет» [10]. Гордан сначала весьма скептически отнесся к методам Гильберта («это не математика, а теология» [11]), однако впоследствии его отношение изменилось («я убедился, что и теология имеет свои преимущества» [12]); отправляясь от идей Гильберта, он в 1899 г. существенно упростил доказательство основной теоремы.

Убежденный сторонник формальной теории инвариантов, он считал, что методы этой теории должны подчинить себе не только всю математику, но и естествознание; так, он пытался на основе аналогии между бинарными инвариантами и схемами валентных связей внедрить методы этой теории в химию и вывести все многообразие химических соединений из теории алгебраических инвариантов. В России эту точку зрения активно пропагандировал профессор Юрьевского университета В. Г. Алексеев, с которым Гордан, кстати говоря, опубликовал одну совместную работу. Заметим, что до Гордана несколько иным путем пытался сделать то же самое один из основоположников теории инвариантов Сильвестр [13]. Однако ни Сильвестр, ни Гордан не достигли в этом деле серьезного успеха, который был получен лишь в результате внедрения теоретико-групповых методов сначала в квантовую механику, а затем на ее основе — и в химию.

Упомянутые работы Гильберта 1890—1892 гг., весьма далекие от гордановского формализма, были созвучны Клейну и произвели на него большое впечатление, что и послужило главным поводом для приглашения Гильберта в Геттингенский университет. Но в Эрлангене по-прежнему господствовал дух символической теории инвариантов.

В 1907 г. Э. Нетер под руководством Гордана защитила диссертацию, заканчивавшуюся таблицей полной системы ковариантных форм данной тернарной квадратичной формы, которая содержала более 330 формально-символических выражений [14]. Вейль не без юмора оценил диссертацию Э. Нетер: «Это — вызывающая трепет работа, но в настоящее время я боюсь, что мы будем склонны определить ее место среди тех достижений, о которых сам Гордан однажды сказал: „О, это, действительно, очень полезно, можно написать много диссертаций об этом"» [15]. Впоследствии Э. Нетер с пренебрежением отзывалась об этой и аналогичных работах, называя их «Formelngestrüpp», «Rechnerei» и т. д.

И все-таки школа Гордана, позволившая Э. Нетер овладеть теорией инвариантов и алгоритмикой, по-видимому, не только не оказалась обременительной, но, напротив, принесла ей известную пользу, особенно при решении инвариантно-теоретических проблем общей теории относительности (см. эпиграф к этому разделу). Но вернемся к более раннему периоду ее творчества, непосредственно примыкающему ко времени написания диссертации. В 1910 г., за два года до своей смерти, Гордан покидает Эрланген. Вскоре оттуда уезжают и еще два крупных математика — Э. Шмидт и Э. Фишер. Последний, несомненно, оказал существенное влияние на творчество Э. Нетер, главным образом в плане преодоления формально-вычислительной гордановской точки зрения и перехода к более современным и глубоким методам Гильберта. Во многих алгебраических работах этого периода (вплоть до 1919 г.) она ссылается на работы Фишера и беседы с ним. Основные интересы ее в это время (после 1907 г. и до 1919 г.) концентрируются на проблемах, смежных с гордановской теорией инвариантов, но уже выходящих за рамки его чисто вычислительных «символических» методов: построение теории инвариантов n-арных форм, доказательство конечности базиса для инвариантов конечных групп, доказательство конечности рационального базиса для каждой системы рациональных функций n переменных, проблема построения алгебраического уравнения с заданной группой и т. д. [16]

После отъезда из Эрлангена Э. Фишера и Э. Шмидта Э. Нетер в начале 1916 г. окончательно переезжает в Геттинген, где с 1911 г. работал ее брат — Ф. Нетер, занимавшийся прикладной математикой, главным образом математическими вопросами механики твердого тела, сплошной среды и электродинамики [17]. Этот переезд оказался возможным благодаря непосредственному влиянию Гильберта, который в это время был всецело поглощен грандиозной общерелятивистской программой Эйнштейна. После публикации первого сообщения перед Гильбертом [18], который продолжал заниматься общей теорией относительности, встал ряд весьма трудных вопросов, связанных с необходимостью более детального и менее формального анализа проблемы энергии, а также и более строгого математического обоснования некоторых его результатов, и поэтому он привлек к решению этих вопросов Э. Нетер, имеющую репутацию алгоритмика и прекрасного знатока теории инвариантов.

Мы уже отмечали, что Э. Нетер вскоре после защиты диссертации и отъезда из Эрлангена Гордана постепенно освобождается от его влияния и отходит от «символического» гордановского направления, усваивая и развивая дальше гильбертовские методы теории инвариантов. Переезжая в Геттинген, где работали, кроме Гильберта и Клейна, ряд других известных математиков, главным образом их учеников, Э. Нетер, по-видимому, надеялась продолжить свою работу в направлении алгебраической теории инвариантов и смежным проблемам непосредственно под руководством Гильберта. Ее переезд, однако, совпал с новым увлечением Гильберта, который и привлек Э. Нетер к разработке общерелятивистской проблематики.

Математическими проблемами общей теории относительности, связанными главным образом со статьей Гильберта и приложениями теории алгебраических инвариантов к теории дифференциальных инвариантов, Э. Нетер занималась с начала 1916 г. до середины 1918 г. Описывая развитие общерелятивистской проблемы сохранения в работах «геттингенской цепочки», мы уже касались истории возникновения геттингенского триумвирата и вклада Э. Нетер в это развитие. Однако мы не упоминали там о второй работе Э. Нетер, относящейся к общей теории относительности, «Инварианты любых дифференциальных выражений» [19], которая, хотя и не является столь же важной и принципиальной, как первая, тем не менее представляет существенный вклад в риманову геометрию, являющуюся основой математического аппарата эйнштейновской теории гравитации. Эта работа была посвящена сведению проблемы дифференциальных инвариантов к чисто алгебраической задаче посредством использования обобщенных «нормальных римановых координат». Она непосредственно примыкает к исследованиям Вермайля (1918), в которых также эффективно использовались эти координаты. Дальнейшее развитие применений «нормальных римановых координат», особенно в геометрии аффинной связности, имело место в работах Биркгофа, Веблена и Томаса [20].

Возвращаясь к наиболее интересующей нас работе Э. Нетер «Инвариантные вариационные задачи», заметим, что если в первый период своей геттингенской деятельности (1916) Э. Нетер сотрудничала главным образом с Гильбертом, исследуя и развивая некоторые аспекты его первого сообщения, то в последующее время (1917—1918) она, как это явствует из упомянутой переписки, находилась в постоянном творческом общении с Клейном. Несомненно, беседы с Клейном, который, как мы видели, внес наибольший вклад в действительное понимание взаимосвязи симметрия — сохранение в механике и специальной теории относительности, способствовали формированию у Э. Нетер представления о важности и универсальности этой взаимосвязи. Во введении к своей работе, которую Э. Нетер посвятила 50-летнему юбилею научной деятельности Клейна, она указывает: «Вторая статья Клейна (т. е. его работа «О дифференциальной форме законов сохранения импульса и энергии в эйнштейновской теории тяготения». — *В. В.*) и настоящая работа в особенности взаимно повлияли друг на друга» [21]. В свою очередь, и Клейн во всех своих статьях этого цикла подчеркивал роль Э. Нетер. В заключительных замечаниях только что упомянутой статьи он писал по этому поводу еще до опубликования работы Э. Нетер: «Я не могу также вновь не поблагодарить фрл. Нетер за деятельное участие в моей новой работе. Именно фрл. Нетер *разработала общие математические идеи, которые я применил в конкретной физической ситуации* для интеграла J_1. Эта работа в ближайшее время будет опубликована в «Nachrichten» (т. е. «Göttinger Nachrichten». — *В. В.*) [22]. Таким образом, общие теоремы Нетер, сформулированные и доказанные ею в упомянутой статье, явились результатом более чем двухлетних исследований, начатых под руководством Гильберта в связи с его первым сообщением 1915 г. и продолженных в тесном научном сотрудничестве с Ф. Клейном. По-видимому, знакомству с работами Герглотца, Энгеля и некоторыми другими Э. Нетер обязана Клейну, который, как мы видели [23], хорошо знал эти работы и высоко их оценивал.

Результаты исследований Э. Нетер, относящихся к раннему периоду ее творчества, т. е. до 20-х годов, были весьма высоко оценены математиками (и в особенности общерелятивистские работы).

П. С. Александров так писал о работах Э. Нетер этого периода: «Эти работы (т. е. работы по конкретно-алгебраическим проблемам гильбертовского направления, включая некоторые работы по теории инвариантов. — *В. В.*) и работы по дифференциальным инвариантам (т. е. как раз две ее работы, связанные с общей теорией относительности. —*В. В.*) уже сами по себе доставили бы ей репутацию первоклассного математика и представляют едва ли меньший вклад в науку, чем знаменитые исследования С. Ковалевской» [24].

Но Э. Нетер была прежде всего алгебраистом; только сотрудничество с Клейном и Гильбертом в период их глубокого увлечения общей теорией относительности, их непосредственное влияние могли отвлечь ее от чисто алгебраических проблем, к которым она сразу же вернулась, как только закончила свою работу об инвариантных вариационных задачах. Конечно, и эта, и другая работы Э. Нетер о дифференциальных инвариантах были связаны с ее первоначальными исследованиями по формальной теории инвариантов, но все-таки это были в известной степени прикладные задачи, стоявшие в стороне от ее главных интересов. Возврат к чистой алгебре при этом произошел, так сказать, на новом, более высоком уровне. Если на первом этапе своего творчества (1907 — 1920) она занималась в основном теорией инвариантов, а затем примыкающими к ней конкретно-алгебраическими проблемами в духе Гильберта, то в 1919 —1920 гг. Э. Нетер вступила на тот путь разработки современной абстрактной алгебры, который принято связывать с ее именем.

«Но когда говорят об Э. Нетер, как о математике, то имеют в виду не эти ранние работы, как бы значительны они ни были по своим конкретным результатам, а весь основной период ее деятельности, начиная примерно с 1920 г., когда она выступила в роли создателя нового направления в алгебре и вместе с тем становилась руководителем, наиболее последовательным и ярким представителем некоторой общей математической доктрины — всего того, что характеризуется словами «begriffliche Mathematik»» [25].

Начало этого пути было положено ее фундаментальной работой по теории идеалов [26]. Как подчеркивал П. С. Александров, «из всего сделанного Э. Нетер основы общей теории идеалов и все, что с ними было связано, оказали, оказывают и будут оказывать наибольшее влияние на математику в целом» [27]. О вкладе Э. Нетер в современную математику нельзя судить просто по конкретным, хотя и важнейшим результатам ее исследований, ее главная заслуга — прежде всего в разработке совершенно новой области и нового алгебраического стиля мышления, созвучного тому, о котором мечтал Э. Галуа: «Подчинить вычисления своей воле, сгруппировать математические операции, научиться их классифицировать по степени трудности, а не по внешним признакам — вот задачи математики будущего так, как я их понимаю, вот путь, по которому я хочу пойти» [28]. Известно, какую роль в современной математике играют такие фундаментальные алгебраические понятия, как изоморфизм и гомоморфизм, группы и кольца с операторами и т. д. «Именно она научила нас мыслить в простых и потому общих алгебраических понятиях — гомоморфное отображение, группа или кольцо с операторами, идеал, — а не в сложных алгебраических выкладках, и поэтому открыла путь к нахождению алгебраических закономерностей там, где эти закономерности были затемнены сложной специальной обстановкой, вовсе не походившей на привычное для алгебраистов-классиков положение вещей» [29]. Она создала одну из самых замечательных математических школ, с которой были тесно связаны такие математики, как Ван дер Варден, Г. Вейль, Г. Хопф, Э. Артин, Г. Хассе, А. Альберт, Р. Брауэр, В. Крулль, О. Шрейер и другие, а также советские математики П. С. Александров, Л. С. Понтрягин, А. Н. Колмогоров, П. С. Урысон, О. Ю. Шмидт, А. Г. Курош [30].

Справедливо будет отметить, что у истоков этого направления стояли прежде всего Дедекинд и Гильберт. Так, Ван дер Варден писал: «Образец для своих абстрактных (begriffliche) разработок она (т. е. Э. Нетер. — *В. В.*) нашла в первую очередь в теории модулей Дедекинда, из которой она всегда умела черпать новые идеи и методы и область применения которой она время от времени поразительным образом расширяла в соответствии с каждым новым направлением» [31]. В качестве других предшественников можно было бы назвать Вейерштрасса, Кронекера, Ведерборна, Штейнитца и других. Более подробно об эволюции новой абстрактной алгебры, связанной с именем Э. Нетер, можно узнать из книги Бурбаки [32]. Основные результаты нетеровского этапа развития новой алгебры были резюмированы в обобщающей монографии одного из наиболее знаменитых учеников Э. Нетер и главного пропагандиста ее идей Ван дер Вардена, первый том которой вышел в 1930 г.[33]

Следует подчеркнуть, что своеобразным переломным моментом в переходе от первого алгебраического периода, связанного с формальной теорией инвариантов и примыкающего к ней ряда конкретно-алгебраических проблем, к новой абстрактной алгебре как раз и были две работы Э. Нетер, относящиеся к общей теории относительности, и прежде всего статья «Инвариантные вариационные задачи». Они были переходными не только в хронологическом смысле, но и по существу — ведь именно в этих работах наряду с алгоритмичностью и высоким уровнем формально-вычислительной стороны исследования, присущими Э. Нетер догеттингенского периода, уже проявляется и «основное свойство ее математического дарования: стремление к общим формулировкам математических проблем и уменье находить именно ту формулировку, в которой раскрывается подлинная логическая природа данного вопроса, освобожденная от всех осложняющих и затуманивающих истинное положение вещей случайных частностей» [34], т. е. именно те черты, которые были столь характерны для Э. Нетер 20—30-х годов. Сама же Э. Нетер была склонна недооценивать свои ранние работы, включая две работы 1918 г., и «способствовала тому, что о работах ее первого периода реже вспоминали, чем это было бы естественно: со всей горячностью своей натуры она и сама была готова забыть сделанное ею в первые годы ее научной деятельности, так как считала эти результаты стоящими в стороне от основного направления ее научного пути — создания общей абстрактной алгебры»[35].

Как отмечали Вейль и П. С. Александров, стиль работ Э. Нетер и особенно манера чтения лекций не были легкими для понимания, хотя в них и чувствовалась необыкновенная сила математической мысли и увлеченность. Но благодаря главным образом Ван дер Вардену, который, напротив, отличался замечательным умением ясного и выразительного изложения, идеи Э. Нетер в 1925—1930 гг. «покорили математическое общественное мнение сначала Геттингена, а затем и других математических центров Европы»[36]. На математическом конгрессе в Цюрихе (1932) весь математический мир признал замечательные достижения Э. Нетер, идеи и концепции которой были в центре внимания не только алгебраистов, но и большинства математиков, работавших в других областях (топология, теория чисел, основания математики, функциональный анализ и т. д.). П. С. Александров хорошо знал Э. Нетер и много беседовал с ней. Весьма ценно его наблюдение о том, что в ее творчестве немалую роль играло отношение к математике не как к совершенно оторванной от реальности игре в символы, а как к способу и результату познания наиболее глубинных свойств внешнего мира. Это чувство реальности служило основой ее научного энтузиазма, подобного тому, с которым Эйнштейн создавал теорию относительности и единую теорию поля.

Э. Нетер интересовалась политикой, не скрывая своих глубоких симпатий к нашей стране. Зимой 1928—1929 г. она была в Москве и вела курс абстрактной алгебры в МГУ, а также семинар по алгебраической геометрии в Коммунистической академии. В 1933 г. с приходом фашизма она была изгнана из Геттингенского университета и была вынуждена эмигрировать из Германии. Полтора последних года своей жизни она провела в небольшом американском городке Брин Мор, будучи профессором женского университета[37].

Теоремы Нетер

«... Теорема I содержит все известные в механике теоремы о первых интегралах, в то время как теорема II может считаться наибольшим возможным обобщением с точки зрения „групп общей теории относительности"».

Э. Нетер[38]

Рассмотрим теперь последнее звено «геттингенской цепочки» — статью Э. Нетер «Инвариантные вариационные задачи» (1918)[39], в которой и были установлены теоремы, выражающие взаимосвязь симметрия — сохранение наиболее общим образом. Предыстория этой работы и место ее в творчестве Э. Нетер были выяснены в предыдущих разделах[40].

Хотя, как мы видели, непосредственным поводом для исследований, приведших к теоремам Нетер, была общерелятивистская проблематика, прежде всего проблема сохранения энергии-импульса, теоремы эти явились завершением и другой линии развития, связанной с эволюцией концепции взаимосвязи в механике и специальной теории относительности. Причем объединение этих линий произошло благодаря прежде всего Ф. Клейну, который как раз в 1915—1916 гг. независимо от общерелятивистских исследований пришел к пониманию важности и общности взаимосвязи симметрия — сохранение в механике и релятивистской (в смысле $\mathcal{P}$-группы) физике[41]. Рассмотренная ранее работа Клейна[42] и статья Э. Нетер явились, как мы видели, результатом тесного творческого содружества Э. Нетер и Ф. Клейна, которое началось, по-видимому, в первой половине 1917 г.[43] Выход работы Э. Нетер за рамки собственно общерелятивистской проблематики несомненно был следствием влияния Ф. Клейна, изучавшего проблему взаимосвязи в механике и специальной теории относительности в 1915—1916 гг. В связи со своей I теоремой Э. Нетер ссылается как раз на методы С. Ли и работы Герглотца, Энгеля и некоторые другие, которые тесно связаны с именем Клейна[44]. Линия развития концепции взаимосвязи, восходящая к Лагранжу, оказалась воспринятой в работе Э. Нетер, непосредственно стимулированной, однако, общерелятивистской проблематикой.

Вместе с тем, гамильтонов S-вариант взаимосвязи, который, по существу, совпадает с нетеровским в случае одного независимого переменного и для конкретной группы Ли, так и остался явно незамеченным. Но лагранжев вариант взаимосвязи в изложении Якоби (ошибочно приписываемый ему) был известен Клейну и, по-видимому, Э. Нетер[45].

Теоремы Нетер — это теоремы об инвариантных вариационных задачах. С математической точки зрения — это теоремы вариационного исчисления, использующие аппарат теории инвариантов и групп Ли. Именно на эти разделы математики Гильберт возлагал особые надежды в деле аксиоматизации и построения единой теории физики [46]. Гильберт, как мы знаем, и подключил Э. Нетер к разработке проблемы сохранения в общей теории относительности для строгого обоснования и дальнейшего развития результатов, полученных им в 1915 г. [47] Итак, теоремы Нетер — это прежде всего естественное развитие идей и результатов Клейна и Гильберта, относящихся к проблеме взаимосвязи симметрия — сохранение. Происхождение их, таким образом, физическое.

Перейдем к более детальному анализу статьи Э. Нетер. При рассмотрении основных результатов, прежде всего теорем Нетер и «утверждения Гильберта», — будем придерживаться той последовательности и системы обозначений, которые имеются в статье Э. Нетер, обращаясь к некоторым современным источникам лишь для достижения большей ясности.

Работа начинается так: «Речь идет о вариационных задачах, которые допускают непрерывную группу (в смысле Ли)... Относительно дифференциальных уравнений, возникающих из вариационных задач, возможны высказывания, значительно более точные, нежели относительно любых допускающих группу дифференциальных уравнений, которые являются предметом исследований Ли» [48]. Итак, с самого начала Э. Нетер подчеркивает фундаментальное значение вариационного аспекта. И дальше: «Итак, последующее изложение базируется на объединении методов формального вариационного исчисления с методами теории групп Ли» [49]. Затем она указывает на физическое происхождение своей работы, ссылаясь на статьи Гамеля, Герглотца и Энгеля, связанные с механикой и специальной теорией относительности, и статьи Гильберта, Клейна, Лоренца, Фоккера, Вейля, относящиеся к общей теории относительности. Особо подчеркнута роль Ф. Клейна, пятидесятилетнему докторскому юбилею которого посвящена статья Э. Нетер [50]. В § 1 даны постановка задачи, основные понятия и определения и сформулированы теоремы I и II, известные, как первая и вторая теоремы Нетер. Там же кратко обсуждено основное физическое значение этих теорем. В § 2 дано доказательство обеих теорем, § 3 и 4 посвящены обсуждению соответствующих обратных теорем. В § 5 рассматривается вопрос о трансформационных свойствах некоторых характерных величин, в частности первых интегралов. Наконец, § 6 представляет собой доказательство важного следствия нетеровских теорем — «утверждения Гильберта».

Наиболее подробно мы рассмотрим здесь теоремы Нетер, опуская обсуждение некоторых более специальных математических деталей, и «утверждение Гильберта», непосредственно вытекающее из этих теорем и имеющее фундаментальное значение для понимания проблемы сохранения в общей теории относительности.

Итак, формулировки теорем Нетер:

«I. Если интеграл J инвариантен по отношению к некоторой группе $\mathcal{G}_\rho$ (здесь и дальше готические буквы в обозначениях заменены латинскими. — *В. В.*), то ρ линейно независимых лагранжевых выражений обращаются в дивергенции и, обратно, из последнего условия вытекает инвариантность J по отношению к некоторой группе $\mathcal{G}_\rho$. Теорема сохраняет справедливость и в предельном случае бесконечно большого числа параметров.

II. Если интеграл J инвариантен по отношению к группе $\mathcal{G}_{\infty\rho}$, в которой встречаются производные до σ-го порядка, то имеют место ρ тождественных соотношений между лагранжевыми выражениями и их производными до σ-го порядка; здесь также возможно обращение.

Для смешанных групп сохраняют силу обе теоремы: следовательно, имеются как зависимые, так и независимые соотношения дивергенции» [51].

Прежде чем доказывать и комментировать эти теоремы, расшифруем, следуя Э. Нетер, некоторые термины и обозначения, которые в нашем тексте в основном совпадают с нетеровскими.

Под $\mathcal{G}_\rho$ понимается ρ-параметрическая группа Ли преобразований независимых координат: $x_1, \ldots, x_n$, обозначенных для краткости x, и зависимых координат: $u_1(x), \ldots, u_\mu(x)$, обозначенных для краткости $u(x)$. Переменные, получающиеся в результате преобразований группы, обозначены так: y — для независимых переменных, $v(y)$ — для зависимых.

Под $\mathcal{G}_{\infty\rho}$ понимается бесконечная непрерывная группа такая, что наиболее общие преобразования ее зависят от ρ существенных произвольных функций $p(x)$ и их производных или аналитически или непрерывным образом (с конечным числом непрерывных производных) [52].

Интеграл J называется инвариантным, если имеет место соотношение

$$J = \int_X \cdots \int f\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots\right) dx = \int_Y \cdots \int f\left(y, v(y), \frac{\partial v}{\partial y}, \ldots\right) dy, \quad (1)$$

причем Y — отображение области X, являющейся произвольной действительной областью переменных x, которое получается в результате преобразования независимых переменных.

Под лагранжевыми выражениями ψ понимаются левые части лагранж-эйлеровских уравнений вариационной задачи для функционала $J(x) : \delta J = 0$. Следует также уточнить выражение: «обращаются в дивергенции». На самом деле теоремы указывают не только на факт существования определенного числа дивергентных соотношений или тождественных зависимостей между лагранжевыми выражениями и их производными, но и точный алгоритм для вычисления тех величин, которые стоят под знаком дивергенции, или выражений, стоящих в левой части тождественных соотношений, о которых идет речь во второй теореме. Естественно, что соотношения, о которых говорится в обеих теоремах, зависят от вида функционала (т. е., по существу, лагранжиана вариационной задачи) и группы инвариантности.

Таким образом, чтобы исключить известную неопределенность в выражении «обращаются в дивергенции», мы сразу же выпишем эти алгоритмические формулы, которые также являются результатом доказательства теорем. Для этого введем дальнейшие обозначения. Преобразования группы $\mathcal{G}_\rho$ или $\mathcal{G}_{\infty\rho}$ можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} y_i &= A_i\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots\right), \\ v_i &= B_i\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots\right). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Так как группы преобразований, о которых идет речь, являются непрерывными, то локальные свойства их, в первую очередь важные для физики, определяются бесконечно малыми преобразованиями групп Δx_i и Δu_i:

$$\left.\begin{aligned} y_i &= x_i + \Delta x_i, \\ v_i &= u_i + \Delta u_i. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

В дальнейшем используется, однако, в духе вариационного исчисления, не бесконечно малое преобразование Δu, а вариация

$$\delta u_i = v_i(x) - u_i(x),$$

т. е. бесконечно малое изменение зависимых переменных, вычисленное при тех же самых значениях независимых переменных. Несложное рассуждение показывает, что

$$\delta u_i = \Delta u_i - \sum_\lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda} \Delta x_\lambda.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \Delta u_i &= v_i(y) - u_i(x) = v_i(y) - v_i(x) + v_i(x) - u_i(x) = \\ &= \sum_\lambda \frac{\partial v}{\partial x_\lambda} \Delta x_\lambda + \delta u_i, \end{aligned}$$

и, так как $\partial v_i/\partial x$ и $\partial u_i/\partial x$ отличаются друг от друга на бесконечно малую величину второго порядка малости относительно Δx, то получается

$$\delta u_i = \Delta u_i - \sum_\lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda} \Delta x_\lambda. \tag{3'}$$

Предполагается также, что Δu_i и Δx_i, а следовательно, и δu_i линейно зависят от ρ параметров группы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\rho$ (в случае первой теоремы) и от ρ функций $p(x)$ и их производных (в случае второй теоремы). Это предположение, как показала Э. Нетер, оправдывается обратными теоремами. Так, в случае первой теоремы δu_i можно записать следующим образом:

$$\delta u_i = \delta u_i^{(1)}\varepsilon_1 + \delta u_i^{(2)}\varepsilon_2 + \ldots + \delta u_i^{(\rho)}\varepsilon_\rho. \tag{4}$$

Тогда первая теорема утверждает, что имеет место ρ следующих соотношений:

$$\sum_i \psi_i \delta u_i^{(1)} = \operatorname{div} B^{(1)}, \ldots, \sum_i \psi_i \delta u_i^{(\rho)} = \operatorname{div} B^{(\rho)}, \tag{5}$$

$B^{(k)}$ — коэффициенты при параметрах $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \ldots, \varepsilon_\rho$, линейно, входящих в выражение B:

$$B = \sum_k B^{(k)}\varepsilon_k. \tag{6}$$

Величина же B, согласно теореме, вычисляется по формуле

$$B = A - f\Delta x, \tag{7}$$

где вектор A выражается следующим образом:

$$A_k = -\sum_i \frac{\partial f}{\partial(\partial u_i/\partial x_k)}\,\delta u_i, \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

если лагранжиан содержит производные не выше первого порядка. Несколько более сложное выражение для A получается, когда f содержит $\varkappa$ производных u по x (формула (6) статьи Э. Нетер). Заметим, что A и B, в силу линейной зависимости δu и Δx от параметров группы, также должны линейно зависеть от них.

Тождества, о которых идет речь во второй теореме, выглядят следующим образом:

$$\sum\left\{(a_i^{(\lambda)}\psi_i) - \frac{\partial}{\partial x}(b_i^{(\lambda)}\psi_i) + \ldots + (-1)^\sigma \frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma}(c_i^{(\lambda)}\psi_i)\right\} = 0, \tag{9}$$

где функции $a_i^{(\lambda)}(x, u, \ldots)$, $b_i^{(\lambda)}(x, u, \ldots), \ldots, c_i^{(\lambda)}(x, u, \ldots)$ являются коэффициентами при функциях $p^{(\lambda)}(x)$ и их производных до σ-го порядка в выражении для δu_i — вариации зависимых переменных в случаях $\mathscr{G}_{\infty\rho}$-группы:

$$\delta u_i = \sum_{\lambda, i} a_i^{(\lambda)}(x, u, \ldots)\, p^{(\lambda)}(x) + \ldots + c_i^{(\lambda)}(x, u, \ldots)\frac{\partial^\sigma p^{(\lambda)}}{\partial x^\sigma}. \tag{10}$$

Таким образом, теоремы Нетер не только устанавливают факт существования ρ соотношений, о которых идет речь, но и дают определенный алгоритм для их явного выражения.

Теперь перейдем к доказательству теорем, причем сначала рассуждения будут справедливы для обеих теорем, а затем, после специализации группы, — для каждой теоремы в отдельности.

Доказательство. Пусть, в силу условий обеих теорем, интеграл J инвариантен относительно некоторой непрерывной группы (конечнопараметрической или бесконечной), т. е. выполняется соотношение (1). Так как рассматриваемая группа является непрерывной, то J будет инвариантен и относительно любого бесконечно малого преобразования, содержащегося в группе. Полная вариация интеграла J, соответствующая бесконечно малым преобразованиям Δx, Δu, следовательно, обращается в нуль:

$$\Delta J = \int\limits_{Y} f\left(y, v(y), \frac{\partial v}{\partial y}, \ldots\right) dy - \int\limits_{X} f\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots\right) dx = 0. \quad (11)$$

Для доказательства теоремы достаточно, опираясь на известные приемы вариационного исчисления, вычислить ΔJ и затем на основе равенства (11) получить требуемые соотношения (5) и (9). Следуя Э. Нетер, сразу подчеркнем разницу между полными вариациями Δu_i и вариациями формы функции δu_i[53]. Важным свойством δ-вариаций, которые вычисляются при одном и том же значении независимых переменных, является их перестановочность с операцией дифференцирования. При доказательстве теорем используется формула для δ-вариации лагранжиана f, которую Э. Нетер приводит без какого-либо обоснования со ссылкой лишь на стандартные приемы вариационного исчисления:

$$\delta f = \sum_i \psi_i \delta u_i - \operatorname{div} A, \quad (12)$$

где второе слагаемое правой части появляется вследствие приписывания граничных членов при вычислении δJ, которые аннулируются при условии исчезновения δu_i на границах области интегрирования. Как мы уже упоминали, если ограничиться рассмотрением существенных для физики лагранжианов, содержащих производные $\partial u/\partial x$ не выше первого порядка, то для A получаются следующие выражения:

$$A_k = -\sum_i \frac{\partial f}{\partial(\partial u_i/\partial x_k)} \delta u_i.$$

Формулу (12) можно вывести следующим образом [54].
По определению

$$\delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial u_i} \delta u_i + \sum_{i,k} \frac{\partial f}{\partial(\partial u_i/\partial x_k)} \delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right). \quad (13)$$

Используя перестановочность операций δ и $\partial/\partial x$, преобразуем (13) к виду

$$\delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial u_i} \delta u_i + \sum_{i,k} \frac{\partial f}{\partial(\partial u_i/\partial x_k)} \frac{\partial}{\partial x_k}(\delta u_i).$$

Применяя затем интегрирование по частям, получаем

$$\delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial u_i}\delta u_i - \sum_{i,k}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial(\partial u_i/\partial x_k)}\delta u_i + \sum_{i,k}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial(\partial u_i/\partial x_k)}\delta u_i\right). \quad (14)$$

Первые два члена дают: $\sum\limits_i \psi_i \delta u_i$, а второй — не что иное, как $(-\operatorname{div} A)$, откуда и получается формула (12).

При вычислении ΔJ следует, кроме вариации δf, учесть также изменение J за счет перехода от x к y, причем двояким образом: вследствие добавления члена

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i \quad (15)$$

и в результате бесконечно малого изменения самой области интегрирования.

Второй дополнительный член можно получить, если интеграл по y заменить интегралом по x, воспользовавшись известным правилом анализа:

$$\int\limits_Y f(y, v(y), \ldots)\,dy = \int\limits_X f(y, v(y), \ldots)\frac{D(y)}{D(x)}\,dx,$$

где $D(y)/D(x)$ — якобиан преобразования (3). Так как

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \delta_{ik} + \frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_k}, \quad \text{то} \quad \frac{D(y)}{D(x)} = \left|\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right| = \begin{vmatrix} 1+\dfrac{\partial(\Delta x_1)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial x_1}{\partial x_n} \\ \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial x_1}, \ldots, 1+\dfrac{\partial \Delta x_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + \sum \frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_i} \quad (16)$$

(с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем Δx).

Теперь, принимая во внимание формулы (12), (15), (16), получаем для ΔJ:

$$\Delta J = \int\limits_X \left[f(y, v(y), \ldots)\left(1 + \sum_i \frac{\partial(\Delta x_i)}{\partial x_i}\right) - f(x, u(x), \ldots)\right]dx =$$

$$= \int\limits_X \left(\delta f + \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\Delta x_k + f\sum_i \frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_i}\right)dx =$$

$$= \int\limits_X \left(\sum_i \psi_i \delta u_i - \operatorname{div} A + \operatorname{div}(f\Delta x)\right)dx.$$

Таким образом,

$$\Delta J = \int\limits_X \left(\sum_i \psi_i \delta u_i - \operatorname{div} B\right)dx \quad (17)$$

где

$$B = A - f\Delta x.$$

Так как уравнение (11) справедливо для любой области интегрирования, то подынтегральное выражение должно обращаться в нуль, т. е.

$$\sum \psi_i \delta u_i = \operatorname{div} B. \tag{18}$$

Соотношение (18) является достаточно общим: 1) оно не ограничено, конечно, условием зависимости f от производных не выше первого порядка — допускается зависимость f от любого числа производных $\partial^\alpha u/\partial x^\alpha$ любого порядка, при этом получаются только различные выражения для A; 2) оно имеет силу для непрерывных групп обоих типов и является исходным для доказательства теорем I и II. Подчеркнем также, что именно это соотношение является главным следствием инвариантности функционала J относительно некоторой непрерывной группы.

Рассмотрим, при каких условиях равенство (18) превращается в тривиальное, т. е. $0 = 0$. Это, очевидно, получается, если $\delta u_i = 0$ и одновременно: $\operatorname{div}\,(f\Delta x) = 0$. Из $\delta u_i = 0$ следует

$$\Delta u_i = \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,\Delta x_k,$$

откуда следует, что Δu_i или Δx_k зависят от $\partial u_i/\partial x_k$. Если же Δu и Δx не зависят от $\partial u/\partial x$, то тривиальное равенство исключается. Заметим, что во всех физически важных случаях Δu и Δx не зависят от $\partial u/\partial x$, поэтому можно специально не оговаривать исключение тривиального случая [64].

После этого замечания Э. Нетер переходит к специализации группы инвариантности. Рассмотрим сначала конечнопараметрическую группу Ли $\mathcal{G}_\rho$. Если это однопараметрическая группа, то, в силу предположения о линейной зависимости Δx и Δu от параметров, будем иметь

$$\delta u_i = \delta u_i^{(1)} \varepsilon_1, \tag{19}$$

где $\delta u_i^{(1)}$ являются функциями x, u, $\partial u/\partial x$ и т. д. В согласии с (4) и (6), выражения A и B также линейно зависят от параметра ε_1

$$B = B^{(1)}\varepsilon_1. \tag{20}$$

Подставляя (19) и (20) в (18), получаем

$$\sum_i \psi_i \delta u_i^{(1)} = \operatorname{div} B^{(1)}. \tag{21}$$

Если же имеется ρ параметров $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\rho$, то

$$\delta u = \sum^{\rho} \delta u^{(k)} \varepsilon_k; \qquad B = \sum^{\rho} B^{(k)} \varepsilon_k$$

и получается ρ соотношений типа (21)

$$\sum_i \psi_i \delta u_i^{(1)} = \operatorname{div} B^{(1)} \qquad \sum_i \psi_i \delta u_i^{(\rho)} = \operatorname{div} B^{(\rho)}. \tag{21'}$$

Линейная независимость этих соотношений следует из того, что в противном случае нашлись бы такие значения параметров, что $\delta u = 0$, откуда при $\Delta x = 0$ получилось бы и $\Delta u = 0$, и, следовательно, между бесконечно малыми преобразованиями существовала бы линейная зависимость, но так как группа ρ-параметрическая, то это невозможно (иначе группа зависела бы от числа параметров, меньшего ρ).

Другая же возможность (тривиальный случай): $\delta u = 0$ и $\operatorname{div}(f \cdot \Delta x) = 0$ была исключена. Таким образом, теорема I доказана. Разумеется, она верна и при бесконечно большом, но счетном числе параметров.

Теперь обратимся к доказательству теоремы II (для группы $\mathcal{G}_{\infty \rho}$, зависящей от ρ произвольных функций $p(x)$ и их производных до σ-го порядка). Вариации δu_i, ввиду линейной зависимости от Δu_i и Δx_i, линейно зависящих, в свою очередь, от $p(x)$ и их производных, также линейно зависят от $p(x)$ и их производных:

$$\delta u_i^{(\lambda)} = a_i^{(\lambda)}(x, u, \ldots)\, p^{(\lambda)}(x) + \ldots + c_i^{(\lambda)}(x, u, \ldots) \frac{\partial^\sigma p^{(\lambda)}}{\partial x^\sigma}. \tag{22}$$

Тогда соотношение (18) можно представить в следующем виде:

$$\sum_{i, \lambda} \psi_i \delta u_i = \sum_{\lambda, i} \psi_i \left\{ a_i^{(\lambda)}(x, u, \ldots)\, p^{(\lambda)}(x) + \ldots + c_i^{(\lambda)}(x, u, \ldots) \frac{\partial^\sigma p^{(\lambda)}}{\partial x^\sigma} \right\}. \tag{23}$$

Далее, используя тождество

$$\varphi(x, u, \ldots) \frac{\partial^\tau p(x)}{\partial x^\tau} = (-1)^\tau \frac{\partial^\tau \varphi}{\partial x^\tau}\, p(x) \quad \operatorname{mod} \operatorname{div} \tag{24}$$

($\operatorname{mod} \operatorname{div}$ означает равенство с точностью до дивергенции), которое можно получить в результате применения интегрирования по частям, равенство (23) легко преобразовывать к виду

$$\sum_i \psi_i \delta u_i = \sum_{i, \lambda} \left\{ (a_i^{(\lambda)} \psi_i) - \ldots + (-1)^\sigma \frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma} (c_i^{(\lambda)} \psi_i) \right\} p^{(\lambda)} + \operatorname{div} \Gamma, \tag{25}$$

причем Γ линейно зависит от $p(x)$ и их производных.

Учитывая (18), получаем

$$\sum_i \left\{ (a_i^{(\lambda)} \psi_i) + \ldots + (-1)^\sigma \frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma} (c_i^{(\lambda)} \psi_i) \right\} p^{(\lambda)} = \operatorname{div} (B - \Gamma). \tag{26}$$

Далее, интегрируя обе части равенства (26) по некоторой произвольной области, а затем, выбирая $p(x)$ так, чтобы они исчезли вместе со своими производными на границе области интегрирования, получаем такой результат: интеграл от правой части аннулируется вследствие теоремы Гаусса, поэтому обращается в нуль и левый интеграл для произвольных $p(x)$, удовлетворяющих условию исчезновения на границе области интегрирования, и, следовательно, подынтегральное выражение для каждого λ тождественно обращается в нуль.

Получается, таким образом, ρ зависимостей между лагранжевыми выражениями:

$$\sum_i \left\{ (a_i^{(\lambda)} \psi_i) - \frac{\partial}{\partial x} (b_i^{(\lambda)} \psi_i) + \ldots + (-1)^\sigma \frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma} (c_i^{(\lambda)} \psi_i) \right\} = 0. \tag{27}$$

Линейная независимость этих соотношений доказывается, как и в случае конечнопараметрических групп $\mathscr{G}_\rho$. Из (26) и (27) получается, кроме того, что уравнение

$$\operatorname{div} (B - \Gamma) = 0 \tag{28}$$

выполняется тождественно. Таким образом, теорема II доказана.

Доказательство обратных теорем следует из рассуждений, проводимых в обратном порядке. Действительно, в случае обратной теоремы I из существования соотношений (21′), после умножения на ε и сложения, вытекает справедливость (18), а вследствие выражения для δf вида (12), получается соотношение

$$\delta f + \operatorname{div} (A - B) = 0.$$

Выбирая в качестве Δx величины

$$\Delta x = \frac{1}{f} (A - B),$$

мы получим

$$\delta f + \operatorname{div} (f \Delta x) = 0,$$

откуда после интегрирования получается выражение для ΔJ, обращающееся в нуль, что эквивалентно инвариантности J относительно бесконечно малого преобразования, определяемого Δx и Δu. Это преобразование следует из соотношения (3′) для заданных Δx и δu, откуда, кстати говоря, видно, что Δx и Δu линейно зависят от параметров группы. Но группа $\mathscr{G}_\rho$ является группой Ли, поэтому инвариантность интеграла J относительно бесконечно малых преобразований Δx, Δu влечет за собой инвариантность J и относительно конечных преобразований, получающихся интегрированием системы уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = \Delta x_i; \quad \frac{du_i}{dt} = \Delta u_i; \quad \begin{array}{l} x_i\big|_{t=0} = y_i \\ u_i\big|_{t=0} = v_i. \end{array} \tag{29}$$

Эти конечные преобразования содержат ρ параметров типа $\varepsilon_i t$ ($i = 1,\ldots, \rho$). Так как число независимых соотношений (21′) равно ρ, то конечные преобразования должны образовывать группу; в противном случае нашлось бы, по крайней мере, одно бесконечно малое преобразование, не являющееся линейной комбинацией ρ остальных, а поскольку J должен быть инвариантен относительно и этого преобразования, то получилось бы соотношений (21′) больше, чем ρ. Обращение I теоремы, таким образом, доказано. Кстати говоря, именно из обращения следует, что Δx и Δu можно без ограничения общности принять линейно зависящими от параметров. Действительно, если бы Δx и Δu содержали высшие степени по ε, то в силу линейной независимости произведений степеней ε, соотношения (21′) получились бы в большем, чем ρ, числе, а из них после обращения вытекала бы инвариантность интеграла J относительно группы, Δx и Δu которой содержат параметры линейно. Таким образом, между соотношениями дивергенции, обязанными своим происхождением высшим степеням относительно ε, возникли бы линейные зависимости.

Из этого обращения следует одно важное усиление теоремы, которое было сформулировано Бессель-Хагеном в 1921 г. со ссылкой на устное сообщение Э. Нетер [55]. Хорошо известно, что лагранжевы выражения от дивергенции тождественно исчезают, т. е. дивергентные члены в лагранжиане не дают вклада в лагранж-эйлеровские уравнения вариационной задачи. Поэтому, в силу обратной теоремы, если J допускает группу $\mathcal{G}_\rho$, то каждый интеграл, отличающийся от первого на интеграл от дивергенции, также допускает группу $\mathcal{G}_\rho$ с теми же δu. Расщепление же δu на Δx и Δu может осуществляться по-разному, в зависимости от дивергентной добавки в лагранжиане. Можно также заметить, что Δx и Δu, отвечающие новому лагранжиану, могут содержать производные от u. Поэтому и прямая, и обратная теоремы (как I, так и II) могут быть сформулированы для интегралов, инвариантных лишь с точностью до дивергенции от выражения, линейно зависящего от параметров группы ε (или соответственно функций $p(x)$ и их производных). Эти формулировки мы заимствуем из статьи Бессель-Хагена.

Теорема I (*прямая*). «Если интеграл J инвариантен относительно бесконечно малых преобразований конечнопараметрической группы $\mathcal{G}_\rho$ *с точностью до дивергенции*, то в точности ρ линейно независимых соотношений лагранжевых выражений обращаются в дивергенции» [56].

Интеграл J инвариантен с точностью до дивергенции, если в пренебрежении бесконечно малыми более высокого порядка, чем ε, имеем

$$\bar{f} = f + \operatorname{div} C, \tag{30}$$

тогда выражения B вычисляются по формуле

$$B = A - f\Delta x + C. \tag{31}$$

Теорема I (обратная) и обе теоремы II переформулируются аналогичным образом.

Обращение в случае бесконечной группы $\mathcal{G}_{\infty\rho}$ доказывается точно так же, как и в случае конечной группы. Достаточность же рассмотрения Δx и Δu, лишь линейно зависящих от ε и их производных, может быть доказана и без использования обращения. Из того факта, что $\mathcal{G}_{\infty\rho}$ зависит от ρ и только от ρ произвольных функций, а в случае нелинейности при сложении преобразований число произвольных функций может увеличиться, следует, что предположение о линейности Δx и Δu не является ограничением общности. Более подробное рассуждение проведено в начале § 4 статьи Э. Нетер [57]. Из обращения теоремы II получается также, что рассмотрение произвольных функций, зависящих лишь от x, но не от u, $\partial u/\partial x$ и т. д., не является ограничением [58]. Наконец, как мы уже упоминали, обе теоремы II (прямая и обратная) могут быть сформулированы с учетом инвариантности интеграла J с точностью до дивергенции, что, по существу, использовал уже Эйнштейн в своей работе 1916 г. [59]

Теперь рассмотрим доказательство «утверждения Гильберта», которое было высказано им в ответном письме к Клейну в конце 1917 г. и опубликовано в последней тетради «Göttinger Nachrichten» за 1917 г. «Однако я утверждаю далее, что для общей теории относительности, т. е. в случае общей инвариантности гамильтоновой функции (или лагранжиана. — *В. В.*), уравнений энергии, которые в Вашем смысле соответствуют уравнениям энергии в ортогонально-инвариантных теориях, вообще не существует; я даже не мог бы отметить это обстоятельство как характерную особенность общей теории относительности. Для моего утверждения было бы желательно привести математическое доказательство» [60]. Комментарии Гильберта и Клейна к этому «утверждению» были рассмотрены нами в предыдущей главе. Здесь же мы дадим строгое доказательство, основанное на теоремах Нетер (§ 6). Чтобы подчеркнуть принципиально различный характер законов сохранения в общей теории относительности и теориях типа специальной теории относительности, Э. Нетер вводит для соответствующих дивергентных соотношений и, соответственно, для самих законов сохранения, термины «собственные» — в случае обычных законов сохранения и дивергентных соотношений типа (21′) и «несобственные» — в случае дивергентных соотношений, в которых величины B

определенным образом составляются из лагранжевых выражений и их производных (этот последний случай как раз и характерен для общей теории относительности). Тогда можно двояким образом сформулировать «утверждение»: более общо или применительно только к общей теории относительности. Более общая формулировка: «Соотношения дивергенции, соответствующие некоторой конечной группе $\mathcal{G}_\rho$, тогда и только тогда являются несобственными, когда группа $\mathcal{G}_\rho$ является подгруппой некоторой бесконечной группы, относительно которой инвариантен интеграл J» [61]. Прежде чем доказать эту теорему, мы рассмотрим ее общерелятивистскую специализацию, как раз и составляющую суть первоначального «утверждения Гильберта». Если в качестве конечной группы $\mathcal{G}_\rho$ рассмотреть ρ-параметрическую группу координатных переносов

$$y_i = x_i + \varepsilon_i; \ v_i(y) = u_i(x) \tag{32}$$

и соответственно

$$\Delta x_i = \varepsilon_i; \qquad \Delta u_i = 0,$$

то инвариантность J относительно преобразований (32) дает по первой теореме Нетер ρ соотношений дивергенции

$$\sum_i \psi_i \frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda} = \operatorname{div} B^{(\lambda)} \tag{33}$$

или «соотношений энергии», отвечающих в случае вариационной задачи «законам сохранения»

$$\operatorname{div} B^{(\lambda)} = 0, \tag{34}$$

где $B^{(\lambda)}$ образуют компоненты энергии-импульса. Тогда общерелятивистский аналог более общей формулировки будет следующим: «Если J допускает группу смещения (32), то соотношения энергии в том и только том случае будут несобственными, когда интеграл J инвариантен по отношению к бесконечной группе, которая включает в качестве подгруппы группу смещения» [62]. Таким образом, законы сохранения классической механики и вообще всех других теорий, связанных с конечнопараметрическими группами, являются собственными, так как названные группы в этих теориях нельзя нетривиально расширить до какой-либо бесконечной группы, в частности $\mathcal{E}$-группы. Напротив, в эйнштейновской теории тяготения основной группой является $\mathcal{E}$-группа, и группа смещения является ее подгруппой. Поэтому законы сохранения в этой теории являются несобственными и, таким образом, совершенно иными, чем в теориях конечнопараметрического типа.

Теперь на основе теорем Нетер докажем первую, более общую формулировку «утверждения». Пусть интеграл J инвариантен относительно бесконечной непрерывной группы $\mathcal{G}_{\infty\rho}$ и пусть $\mathcal{G}_\sigma$ — некоторая конечнопараметрическая ее подгруппа, возникающая из $\mathcal{G}_{\infty\rho}$ при некоторой специализации произвольных функций, от которых зависит $\mathcal{G}_{\infty\rho}$. Тогда, согласно теореме II, имеют место ρ зависимостей (27), а согласно теореме I — σ соотношений дивергенции (21′). Из соотношений (27) следует инвариантность J относительно Δu и Δx группы $\mathcal{G}_{\infty\rho}$ при любой функции $p(x)$, а следовательно, и при специализации, отвечающей $\mathcal{G}_\sigma$. Таким образом, σ соотношений

$$\sum_i \psi_i \delta u_i^{(\lambda)} = \operatorname{div} B^{(\lambda)}$$

должны быть следствием (27), которые можно записать в форме

$$\sum_i \psi_i a_i^{(\lambda)} = \operatorname{div} \chi^{(\lambda)}, \tag{35}$$

где $\chi^{(\lambda)}$ представляют собой линейные комбинации лагранжевых выражений и их производных. Так как ψ_i входят линейно как в (21), так и в (35), то соотношения дивергенций должны быть линейными комбинациями (35)

$$\operatorname{div} B^{(\lambda)} = \operatorname{div}\left(\sum_\varkappa a\chi^{(\varkappa)}\right), \tag{36}$$

откуда непосредственно следует, что и сами $B^{(\lambda)}$ выражаются линейно через $\chi^{(\varkappa)}$, т. е. через лагранжевы выражения с их производными, и функции, дивергенции которых тождественно исчезают, например, такие, как $(B - \Gamma)$, которые согласно (28) тождественно исчезают. Итак, «утверждение Гильберта» доказано.

Верно и обратное утверждение: «Если соотношения для дивергенций являются линейными комбинациями (35), т. е. они «несобственные», то из инвариантности по отношению к $\mathcal{G}_{\infty\rho}$ следует инвариантность по отношению к $\mathcal{G}_\sigma$, и она (группа $\mathcal{G}_\sigma$.— *В. В.*) становится подгруппой $\mathcal{G}_{\infty\rho}$ »[62]. После рассмотрения некоторых примеров Э. Нетер заключает этот параграф (и одновременно— статью) следующими словами, подчеркивая достаточно общий характер «утверждения»: «Гильберт, как хорошо известно, утверждает, что падение собственных законов сохранения энергии есть характерный признак общей теории относительности. Для того чтобы это утверждение оправдывалось буквально, следует термин «общая относительность» понимать шире, чем это делается обычно, а также распространить его на рассмотренные выше группы, зависящие от n произвольных функций» [63].

Таким образом, мы подробно, следуя Э. Нетер в обозначениях и изложении, рассмотрели основные результаты ее работы, заключающиеся в установлении теорем Нетер и доказательстве на их основе «утверждения Гильберта».

Рассмотрим некоторые вопросы, касающиеся главным образом физического значения нетеровских теорем и их сопоставления с рассмотренными ранее вариантами взаимосвязи. Прежде всего — о замечаниях самой Э. Нетер в этой связи. О том, что частные случаи этих теорем для физически важных групп были уже известны в механике и физике, Э. Нетер упоминает в самом начале статьи [64]. Опубликованную в том же номере «Göttinger Nachrichten» работу Клейна можно рассматривать как иллюстрацию второй теоремы Нетер и «утверждения Гильберта» [65].

Проведем параллель между общими результатами, относящимися ко второй теореме Нетер и «утверждению», с одной стороны, и их соответствующими общерелятивистскими аналогами, содержащимися в статье Клейна. Так, вывод A-тождеств (53) и тождеств B (55), по существу, совпадает с выводом основных тождеств второй теоремы (27) и (28). Тождества (27), таким образом, можно в случае общей теории относительности интерпретировать как тождества (47), а дивергентное соотношение (28) — как гильбертовский закон сохранения (54) или (55). Кстати говоря, вектор B, как и гильбертовский ε^{σ} (или e^{σ}), линейно зависит от произвольных функций $p(x)$ (или p^{τ}).

Вторая теорема Нетер является обобщением теоремы I первого сообщения Гильберта, лишь сформулированной им. Об «утверждении Гильберта» мы уже говорили. Впрочем, уже Клейн в своем первом письме к Гильберту, посвященном анализу гильбертовского закона сохранения энергии, установил непосредственно «несобственный» характер общерелятивистского закона сохранения энергии-импульса [66]. Таким образом, основные результаты о взаимосвязи $\mathscr{E}$-симметрия — сохранение были установлены Гильбертом и Клейном (известный вклад внесли также, как мы видели, Лоренц, Вейль и, конечно, Эйнштейн, работы которого положили начало общей теории относительности в целом) [67]. Заметим также, что Вейль ограничивается (в статье 1917 г. и первом издании «Raum, Zeit, Materie») выводом тождеств типа (27); Лоренц, неявно опираясь на «утверждение Гильберта», выводит законы сохранения, связанные с подгруппой смещения (хотя их «несобственный» характер он не обсуждает); Эйнштейн использует инвариантность с точностью до дивергенции и также неявно «утверждение Гильберта» для подгруппы линейных преобразований [68].

Вторая теорема Нетер вместе с «утверждением Гильберта» охватывает, таким образом, в сжатой и весьма общей форме принципиальное содержание проблем сохранения и взаимосвязи симметрия — сохранение в общей теории относительности.

Что касается первой теоремы Нетер, то наиболее близок к ней, наряду с гамильтоновым S-вариантом взаимосвязи, герглотцевский вывод законов сохранения в рамках $\mathscr{P}$-инвариантной механики сплошной среды. Правда, используя лагранжевское описание сплошной среды, Герглотцу удается существенно упростить выкладки. Вариационный принцип Герглотца имеет следующий вид:

$$\delta \int_{\Omega} \Phi(a_{ij})\, d\omega = 0$$ [69].

Независимыми координатами являются начальные значения пространственно-временны́х координат ξ_i; зависимыми же переменными служат сами пространственно-временны́е координаты x_i, рассматриваемые как функции ξ_i. Тогда оказывается, что лагранжиан зависит лишь от производных $\partial x_i/\partial \xi_j$ и, кроме того, $\mathcal{P}$-группа в лагранжевом представлении рассматривается лишь на многообразии зависимых переменных (и, таким образом, область интегрирования не варьируется, и вариации независимых координат равны нулю). При этих ограничениях вывод законов сохранения из $\mathcal{P}$-инвариантности вариационного принципа оказывается весьма простым и полностью эквивалентным I теореме Нетер для $\mathcal{P}$-группы.

Ли-энгелевский вариант взаимосвязи симметрия — сохранение, канонический по существу, так же связан с I теоремой Нетер, как связаны между собой гамильтонов и лагранжев формализмы. Эквивалентность этих формализмов, как и соответствующих вариантов взаимосвязи, разумеется, не является тривиальным фактом. Каждый из этих формализмов вскрывает различные черты математической структуры физической теории и открывает тем самым различные возможные пути ее обобщения.

Так, лиевский вариант взаимосвязи симметрия — сохранение явился прообразом квантовомеханического аналога рассматриваемой взаимосвязи; нетеровский же особенно эффективен в различного рода теориях поля, включая общую теорию относительности.

В связи с лагранжевым вариантом взаимосвязи симметрия — сохранение следует заметить следующее. По существу, исходной в нем является инвариантность выражения $\sum\limits_i \psi_i \delta u_i$, которое в случае классической механики совпадает с левой частью «основной формулы динамики» Лагранжа. Как было показано Э. Нетер в § 5, посвященном инвариантности отдельных составных частей $\left(\text{т. е. } \sum\limits_i \psi_i \delta u_i,\ \int\left(\sum\limits_i \psi_i \delta u_i\right) dx,\ \operatorname{div} B,\ B^{(\lambda)} \text{ и т. д.}\right)$, при достаточно общих условиях, которые выполняются в случае классической механики, из инвариантности интеграла действия следует относительная инвариантность $\sum\limits_i \psi_i \delta u_i$, совпадающая с инвариантностью в случае евклидовой группы $\mathcal{M}$ и группы временны́х трансляций $\mathcal{T}_0$, и, таким образом, лагранжев вариант взаимосвязи может рассматриваться как прямое следствие I теоремы Нетер [70]. Для классической механики, как заметила Э. Нетер [71], из инвариантности $\int\left(\sum\limits_i \psi_i \delta u_i\right) dx$ и, тем более, инвариантности $\sum \psi_i \delta u_i$ можно вывести следствие о существовании соотношений дивергенции типа (21′). Однако инвариантность $\int\left(\sum \psi_i \delta u_i\right) dx$ — менее сильное условие, чем инвариантность интеграла действия, и из него удается извлечь меньше информации, чем из инвариантности интеграла действия J и в классической механике. Так, из инвариантности J относительно G_ρ можно заключить о трансформационных свойствах сохраняющихся величин $B^{(\lambda)}$, чего нельзя сделать на основании лишь инвариантности $\int\left(\sum_i \psi_i \delta u_c\right) dx$[72]. Что же касается гамильтонова S-варианта взаимосвязи, то он представляет собой частный случай первой теоремы Нетер для классической механики и евклидовой группы. Связь же V- и S-вариантов осуществляется посредством соотношения: $S = tH - V$ и позволяет говорить о V-варианте как некотором следствии S-варианта и соответственно первой теоремы Нетер.

Связь дивергентных соотношений с законами сохранения достаточно прозрачна. Если в соотношениях (21′) положить, в силу уравнений движения, все ψ_i равными нулю, то ρ дивергенций — правых частей соотношений (21′) — обращаются в нуль. Интегрируя в случае теории поля эти дивергенции по 4-мерному объему Ω, ограниченному двумя плоскостями $t = a$ и $t = b$ и цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, а затем, преобразуя по формуле Гаусса 4-кратный интеграл в 3-кратный интеграл по границе упомянутой области $\partial\Omega$, получим

$$0 = \int_\Omega \operatorname{Div} B d^4x = \int_{\partial\Omega} (B, n)\, d\sigma, \tag{37}$$

где n — нормаль к ограничивающей поверхности, а $d\sigma$ — элемент ее площади. Далее, после отбрасывания интеграла по боковой цилиндрической поверхности вследствие обычно принимаемого в физике предположения об исчезновении зависимых переменных на пространственной бесконечности, уравнения (37) принимают вид

$$\int B_\alpha^4 (x, y, z, b)\, d^3x - \int B_\alpha^4 (x, y, z, a)\, d^3x = 0,$$

так как на плоскостях $t = a$ и $t = b$ скалярное произведение (B, n) сводится к значениям временны́х компонент B на этих плоскостях. Таким образом, величина

$$\int B_\alpha^4\, d^3x = \text{const}$$

является сохраняющейся величиной.

В случае однократного интеграла действия, когда лишь временна́я координата является независимой переменной и дивергенции вырождаются в полные производные величин B по времени, обращение их в нуль означает независимость B от времени, т. е. их сохранение.

В настоящее время теоремы Нетер широко используются в основных разделах теоретической физики [73], являясь также общими теоремами вариационного исчисления [74]. Первой монографией, где фигурировали обе эти теоремы, была книга Куранта и Гильберта «Методы математической физики», первый том которой вышел в свет в 1924 г. [75] Правда, рассмотрение проблемы сохранения в общей теории относительности, основанное на рассуждениях, эквивалентных использованию теорем Нетер, имелось уже в книгах Вейля и Паули.

Благодаря книге Куранта и Гильберта, теоремы Нетер получили известность. Изложение их в этой книге отличается большой простотой, но ряд важных вопросов опущен (в частности, вторая теорема лишь сформулирована; отсутствуют систематическое доказательство обращений, «утверждения Гильберта» и т. д.). Как и в некоторых современных курсах вариационного исчисления[76], в книге Куранта и Гильберта теоремы Нетер непосредственно следуют из формулы для вариации интеграла с переменной областью интегрирования. Так, путем преобразований, аналогичных приведенным выше, Курант для интеграла

$$J=\iint\limits_G F(x,\,y,\,u,\,u_x,\,u_y)\,dx\,dy,$$

где x, y — независимые, u — зависимая переменные, u_x, u_y — производные u по x и y, а G — варьируемая область интегрирования, получает формулу для δJ

$$\delta J=\iint\limits_G \{[F]_u\bar{\delta}u+(F_{u_x}\bar{\delta}u)_x+(F_{u_y}\bar{\delta}u)_y+(F\delta x)_x+(F\delta y)_y\}\,dx\,dy \tag{37}$$

(здесь $[F]_u$ — лагранжево выражение; $\bar{\delta}u$ — вариация зависимой переменной, эквивалентная нетеровской $\bar{\delta}u$).

Так как по условию теоремы J инвариантен относительно преобразований x, y, u, заданных вариациями δx, δy, δu, то $\delta J=0$, откуда, ввиду произвольности области интегрирования, получается тождество, эквивалентное нетеровскому (18), на основе которого были доказаны обе теоремы

$$[F]_u\bar{\delta}u+\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\bar{\delta}u+F\delta x)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\bar{\delta}u+F\delta y)=0. \tag{38}$$

Далее, на простых примерах, главным образом из классической механики, Курант иллюстрирует первую теорему Нетер.

В качестве примера для второй теоремы, приведенной без доказательства, кратко рассмотрено вейерштрассовское параметрическое представление интеграла вида

$$J=\int\limits_{t_0}^{t_1} F(x,\,y,\,\dot{x},\,\dot{y})\,dt. \tag{39}$$

Интеграл (39) инвариантен относительно произвольного преобразования параметра t, при котором t, $x(t)$, $y(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ заменяются на $t(\tau)$, $x[t(\tau)]$,..., зависящего, таким образом, от одной произвольной функции. Согласно нетеровской формуле (27), в данном случае имеет место тождество

$$\dot{x}[F]_x + \dot{y}[F]_y = 0, \tag{40}$$

которое выводится обычно значительно более сложно [77].

В заключение остановимся кратко на первом применении теорем Нетер, которое привело к не известным до этого результатам. Речь идет о работе геттингенского математика Э. Бессель-Хагена «О законах сохранения в электродинамике» (1921) [78]. В этой работе Бессель-Хаген изучил следствия конформной инвариантности электродинамического действия, что привело его, в соответствии с теоремами Нетер, к открытию пяти новых законов сохранения «безмассовой» электродинамики, связанных с пятью непуанкаревскими генераторами конформной группы пространства — времени. Кроме того, в этой работе впервые в систематической форме были получены законы сохранения классической механики и электродинамики на основе явного использования первой теоремы Нетер (примерно так же, как это делается в современных монографиях по квантовой теории поля) [79]. Задача, решенная Бессель-Хагеном, была поставлена Ф. Клейном на семинаре по математическим вопросам теории относительности (1920) [80]. Мы не будем обсуждать историю и современное состояние вопроса о конформной инвариантности в физике [81]. Заметим только, что ввиду возникшего в последнее время интереса к конформной группе написанная почти 50 лет назад статья Бессель-Хагена оказалась снова актуальной [82].

Обе теоремы Нетер Бессель-Хаген формулирует с самого начала с учетом инвариантности с точностью до дивергенции и показывает на примере классической механики существенность этого уточнения [83].

Дальнейшее развитие и применение концепции взаимосвязи и теорем Нетер было прежде всего связано с квантовой теорией и общей теорией относительности. Но это уже современный этап развития обсуждаемой взаимосвязи, краткое рассмотрение которого содержится в следующей главе.

Глава VII

СОВРЕМЕННОЕ РАЗВИТИЕ ВЗАИМОСВЯЗИ СИММЕТРИЯ — СОХРАНЕНИЕ

> «В настоящее время трудно найти статью, посвященную фундаментальным проблемам физики, в которой не упоминались бы принципы инвариантности, а автор в своих рассуждениях не исходил бы из предположения, иногда излишне широкого, о существовании связи между законами сохранения и принципами инвариантности».
>
> Е. П. Вигнер[1]

Последующее развитие концепции взаимосвязи симметрия — сохранение, которое можно было бы условно назвать «посленетеровским», происходило в нескольких направлениях. Центральным было направление, связанное с возникновением квантовой механики, а затем квантовой теории поля и физики элементарных частиц. Двумя другими были: 1) «прикладное» направление (непосредственное применение нетеровских теорем, главным образом первой, в различных разделах физики и механики, например механики сплошной среды, небесной механики, физики твердого тела и т. д.); 2) использование теорем Нетер, в первую очередь второй, для правильной постановки и решения вопроса о сохранении энергии-импульса в общей теории относительности. Наконец, можно выделить еще одно, четвертое, направление, имеющее непосредственное отношение к основной, квантово-теоретической линии развития: обобщение (или расширение) самих нетеровских теорем с целью разрешения ряда трудностей, вставших перед современной квантовой теорией элементарных частиц. Остановимся несколько подробнее на каждом из них, наметив программу дальнейшего изучения концепции взаимосвязи от Э. Нетер до 70-х годов. Основное внимание сосредоточим на первом и четвертом направлениях, представляющих наибольший интерес.

«Квантовотеоретическое» направление

а) *Квантовый аналог взаимосвязи симметрия — сохранение.* Ранее мы отмечали, что существуют два основных варианта обсуждаемой взаимосвязи: нетеровский (или вариационный) и лиевский (или канонический). В теории относительности, и вообще в классических теориях поля, особенно естественным оказался первый вариант. В классической механике — оба варианта; выбор того или другого определяется используемым формализмом, т. е. лагранжевым или гамильтоновым. В нерелятивистской квантовой механике естественным было обобщение лиевского варианта взаимосвязи. Благодаря открытию глубокой аналогии между каноническим формализмом классической механики и гейзенберговой формой квантовой механики, Борн, Гейзенберг, Фок, Иордан, Дирак, Вигнер, Вейль и другие в 1926—1927 гг. установили соответствие канонических преобразований в классической механике унитарным преобразованиям в квантовой механике [2]. На этом пути и был получен квантовый аналог лиевского варианта взаимосвязи: операторы сохраняющихся величин являются операторами унитарных преобразований симметрии гамильтониана системы (Вигнер, 1927) [3].

Существенно новыми чертами взаимосвязи в квантовой механике были: 1) группы симметрии гамильтониана не обязаны быть группами Ли, но могут быть и дискретными (или конечными); так, например, унитарный оператор зеркальной симметрии, отвечающий дискретному преобразованию (x_i, y_i, $z_i \rightarrow -x_i$, $-y_i$, $-z_i$), как это впервые показал в упомянутой статье Вигнер, дает не имеющий классического аналога закон сохранения четности; вслед за пространственной инверсией были изучены и другие дискретные симметрии и соответствующие им законы сохранения [4]; 2) взаимосвязь симметрия — сохранение в квантовой механике оказывается даже более тесной и в то же время более наглядной, чем в классике, так как она содержится, по существу, уже в квантовой кинематике, в отличие от классической механики. Это надо понимать таким образом, что рассматриваемая взаимосвязь в квантовой теории может быть установлена без использования какого-либо динамического типа уравнения Шредингера [5]. Здесь нет, однако, никакого противоречия с первой теоремой Нетер, так как квантовая кинематика накладывает весьма сильные ограничения на форму динамического закона в квантовой теории, по существу, эквивалентные требованию вариационности. Действительно, из гильбертовости пространства состояний и самосопряженности гамильтониана следует вариационная структура уравнений квантовой динамики. Можно даже сказать, что выбор в качестве пространства состояний именно комплексного сепарабельного бесконечномерного гильбертова пространства позволил «перенести на квантовую механику одно из наиболее сильных формальных свойств классической механики, а именно естественное соответствие между наблюдаемыми и однопараметрическими группами симметрии» [6]. Таким образом, простота, наглядность и кинематический характер взаимосвязи симметрия — сохранение в квантовой теории достигается прежде всего за счет утонченности кинематики (бесконечномерное сепарабельное комплексное гильбертово пространство состояний).

Заметим, что установление и использование взаимосвязи в квантовой механике не было связано непосредственно с теоремами Нетер (даже Вигнер и Вейль не ссылались в этой связи на Нетер) [7]. Это объясняется тем, что они в явном виде не использовались, а квантовый вариант взаимосвязи в рассматриваемой форме был аналогичен лиевскому варианту взаимосвязи. Подчеркнем также, что теория групп, сыгравшая столь большую роль в квантовой механике, была связана с концепцией взаимосвязи. Не случайно у истоков теоретико-группового направления стояли именно Вигнер и Вейль [8]. По существу говоря, разработка теоретико-групповых методов явилась дальнейшим развитием концепции взаимосвязи в квантовой механике.

Можно сказать, что теория представлений групп симметрии в квантовой механике — это своеобразный квантовомеханический эквивалент «Эрлангенской программы» Ф. Клейна. Поэтому в историю концепции взаимосвязи в современный период входит развитие теории представлений групп и ее приложений к квантовой физике. Основное значение здесь имели прежде всего работы Вигнера, Вейля, Неймана, Слэтера, Ван дер Вардена, Э. Картана и др.[9], а также, главным образом в связи с группами Лоренца и Пуанкаре,— работы советских исследователей И. М. Гельфанда, М. А. Наймарка, А. М. Яглома и других [10].

б) *Теоремы Нетер в квантовой теории поля.* После того как Гейзенберг и Паули в своей фундаментальной статье 1929 г. [11] развили вариационный формализм для волновых полей и на его основе схему канонического квантования, лагранжевы и гамильтоновы методы начали весьма эффективно использоваться и в квантовой теории поля. При таком подходе первостепенное значение приобрели и теоремы Нетер, на которых основывалось введение динамических переменных, классификация законов сохранения и т. д. Одной из первых работ, в которых теоремы Нетер были использованы явно для исследования уравнения Дирака, была работа М. А. Маркова 1936 г. [12] По существу, нетеровский формализм, без явного упоминания имени Э. Нетер, использовался для вывода тензоров энергии-импульса и момента импульса в рамках теории поля в работах 1938—1941 гг. Белифанте, Розенфельда, Паули, Ландау и Лифшица и др.[13]

Одно из первых систематических руководств по квантовой теории поля, написанное Г. Вентцелем в 1942 г. [14], также базировалось на лагранж-нетеровском формализме. После работы Е. Хилла, специально посвященной первой теореме Нетер и ее применениям (1951) [15], а также появления монографий по теории поля Иваненко и Соколова (1949), Боголюбова и Ширкова (1957) и некоторых других [16] теоремы Нетер (с явной ссылкой на Э. Нетер) прочно вошли в арсенал основных концепций теории поля и непосредственно используются в большинстве руководств и монографий по теории квантованных полей и физике элементарных частиц [17].

в) *Калибровочные симметрии и зарядовые законы сохранения.* Одним из важнейших конкретных применений нетеровских теорем в квантовой теории является вывод зарядовых законов сохранения из калибровочных симметрий систем. В нашей работе мы рассматривали лишь законы сохранения, связанные с пространственпо-временны́ми симметриями. Вместе с тем, уже со времен Фарадея и Максвелла был известен закон сохранения электрического заряда, теоретико-групповой смысл которого стал ясен лишь в рамках квантовой теории. История установления взаимосвязи калибровочная симметрия — закон сохранения электрического заряда чрезвычайно интересна и тесно связана с вейлевским обобщением общей теории относительности[18]. Инвариантность релятивистского волнового уравнения относительно бесконечной калибровочной группы впервые установил Фок[19]. Лондон отметил аналогию этой группы с eich-группой в теории Вейля[20], а затем Вейль в 1929 г. указал на связь ее с законом сохранения заряда[21]. Четкое различие калибровочных симметрий (бесконечной и конечнопараметрической) ввел Паули, назвав их соответственно калибровочными симметриями второго и первого родов[22]. С точки зрения первой теоремы Нетер именно с симметрией первого рода связан закон сохранения электрического заряда. Симметрия второго рода, существенная при наличии внешних электромагнитных полей, оказалась впоследствии тесно связанной с концепцией локальной инвариантности и компенсирующих полей, о которой мы сделаем несколько замечаний в связи с современными обобщениями нетеровских теорем. В 50-е годы в теории элементарных частиц приобрели большое значение и другие калибровочные законы сохранения: барионный, лептонный и прочие (закон сохранения числа барионов впервые был высказан в 1938 г. Штюкельбергом)[23].

г) *Изотопические симметрии и соответствующие законы сохранения.* Другим, не менее существенным, было явное или неявное применение нетеровских теорем к изотопическим симметриям, восходящим к работам Гейзенберга, который в 1932 г. формально ввел понятие изоспина в ядерной физике; Брейта, Кондона и Презента, которые связали это понятие с идеей зарядовой независимости ядерных сил (1936), а также Вигнера (1937) и Кондона и Гессена (1936), которые, по существу, установили связь изотопической симметрии с законом сохранения полного изоспина[24]. Впоследствии на этом пути были достигнуты блестящие успехи в систематике сильно взаимодействующих частиц, сначала благодаря введению нового квантового числа, названного «странностью» (Гелл-Манн и Нишиджима, 1953—1954), затем прежде всего благодаря обобщению изотоп-симметрии до унитарной симметрии SU_3 (Гелл-Манн, Нееман, 1961)[25]. История развития физики элементарных частиц за последнее десятилетие была особенно тесно связана с поиском группы внутренней симметрии (типа SU_3), открытие которой позволило бы систематизировать растущее многообразие частиц в рамках некоторой единой теории[26]. Программа эта базируется на концепции взаимосвязи симметрия — сохранение, хотя она и не всегда явно связывается с лагранжевым формализмом. Подчеркнем, что, как и калибровочные, изосимметрии имеют самое непосредственное отношение к теории компенсирующих полей[27]. За вычетом этого, и те, и другие симметрии и их связь с законами сохранения находятся в рамках существующей нетеровской структуры и не вносят принципиально нового содержания в концепцию взаимосвязи.

Из этого краткого рассмотрения ясна основополагающая роль концепции взаимосвязи симметрия — сохранение в современной квантовой теории поля и элементарных частиц. Но видно также, что существенного развития самой концепции со времени установления нетеровских теорем и их квантового варианта фактически не было. Это подтверждает и анализ применений нетеровских теорем за пределами квантовой теории («прикладное» и «общерелятивистское» направления).

«Прикладное» направление

Строго говоря, весь материал, который относится к применению нетеровских теорем не только в таких «прикладных» областях, как небесная механика, механика сплошных сред, физика твердого тела и т. д., но и в таких фундаментальных областях, как физика элементарных частиц и общая теория относительности, следовало бы отнести к этому направлению. Однако применение теорем Нетер в фундаментальных разделах, которые наиболее близко подходят к проблемам, связанным с возможными расширениями и модификациями этих теорем, мы предпочитаем обсудить отдельно (в наибольшей степени это касается как раз квантово-теоретического направления, которое было рассмотрено выше). Поэтому к «прикладному» направлению мы отнесем применения теорем Нетер лишь в небесной механике, механике сплошных сред и т. д., но не в квантовой теории поля и общей теории относительности. Вследствие того, что большинство дифференциальных уравнений физики имеют вариационную структуру и допускают при этом те или иные группы симметрии, к ним применимы нетеровские теоремы (главным образом, первая), которые позволяют определить первые интегралы этих уравнений и тем самым значительно упростить их решение. Особое значение этот метод приобретает в нелинейных задачах, решение которых вызывает, как правило, весьма серьезные затруднения [28]. Примером такого рода задач являются задачи n тел небесной механики.

Укажем также две важные работы по небесной механике, в которых используется первая теорема Нетер: речь идет о статье Гельдера [29] и монографии Уинтнера [30]. Сложные нелинейные задачи нередко возникают и в механике сплошных сред, где теоретико-групповые методы, в которые естественно включаются методы подобия и размерности, уже давно (по-видимому, с начала этого века) играли и продолжают играть немалую роль [31]. В ряде случаев теоретико-групповой анализ самих уравнений, а не только вариационного функционала, который в общем случае может и не существовать, дает значительные результаты [32]. В последнее время в связи с физикализацией механики сплошной среды значительное развитие получает конструирование различных теоретических моделей сплошной среды. Лагранжев формализм и теоремы Нетер при этом кладутся в основу всякой модели, что существенно ограничивает и упрощает выбор возможных моделей [33]. Приведенные примеры можно умножить, но это было бы более целесообразно сделать в работе, посвященной современному применению теорем Нетер. Заметим лишь, что к «прикладному» направлению может быть отнесено и применение квантового аналога взаимосвязи (и теории представлений групп) в физике твердого тела [34]. Приложения нетеровских теорем в различных разделах физики и механики, таким образом, являются весьма обширными и не менее плодотворными (кроме того, они непосредственно связаны с приближенными вариационными методами).

«Общерелятивистское» направление

В предыдущих направлениях главную роль играла первая теорема Нетер, относящаяся к конечнопараметрическим группам Ли. В общей теории относительности основной является бесконечная непрерывная группа, зависящая от четырех произвольных непрерывных функций ($\mathscr{E}$-группа), и таким образом, вторая теорема Нетер. Окончательное оформление нетеровских теорем произошло как раз в связи с попытками достижения достаточно корректной общей и плодотворной формулировки закона сохранения энергии-импульса в эйнштейновской теории. Но затруднения с общерелятивистским законом сохранения энергии-импульса не были преодолены после установления нетеровских теорем. Скорее, они помогли выяснить принципиальный характер этих затруднений и наметить те рамки, в которых лишь и возможна разумная формулировка законов сохранения в общей теории относительности. Долгое время проблема энергии не привлекала достаточного внимания, общепринятым был эйнштейновский «псевдотензорный» подход [35]. Но аргументы против этого подхода, выдвинутые еще Бауэром, Шредингером и другими в 1917—1918 гг., сохраняли свое значение [36]. Кроме того, ситуация усложнилась открытием других выражений для энергии-импульса, удовлетворяющих уравнениям непрерывности (например, симметричный псевдотензор Ландау-Лифшица [37]). С начала 50-х годов эта проблема постепенно приобретает характер центральной проблемы общей теории относительности (особенно, после работ Гольдберга, Бергмана, Меллера и других, опубликованных в 1958 г.).[38] Именно на основе теорем Нетер Гольдберг и Бергман показали возможность построения бесконечного числа «сильных» законов сохранения, которые лишь в частных случаях дают законы сохранения в общепринятом смысле слова [39]. Несмотря на целый ряд новых выражений для сохраняющихся величин и разработку нескольких неортодоксальных подходов к проблеме в целом, последняя остается нерешенной и продолжает оставаться в центре интересов многих видных теоретиков, работающих в области теории гравитации. Теоремы Нетер при этом, как видно, например, из недавних работ Меллера, Андерсона и особенно Траутмана, играют ключевую роль, и это позволяет думать, что окончательное разъяснение проблемы энергии будет достигнуто во всяком случае на основе этих теорем [40].

Возможные обобщения и модификации концепции взаимосвязи симметрия — сохранение

За исключением квантового варианта взаимосвязи, весьма близкого к лиевской форме ее в классике, и связанной с ним теории представлений групп, собственно нетеровская форма этой взаимосвязи осталась по существу неизменной и по-прежнему лежит в основе структуры физической теории. Более того, может показаться, что, хотя теоремы Нетер и выросли на физической почве, но, получив затем статут математических теорем, они утратили живую связь с физикой. В действительности же дело обстоит совершенно иначе: в концепции взаимосвязи (точнее, в нетеровской форме ее) в настоящее время явно наметился целый ряд «точек роста», предопределяющих дальнейшее развитие ее самой по себе, а не только в прикладном отношении. Назовем и кратко рассмотрим лишь некоторые, наиболее существенные, на наш взгляд, направления, в которых намечается развитие нетеровской концепции.

а) *Проблема строгого доказательства «усиленной» обратной теоремы Нетер (первой)*, которую, в отличие от обычной обратной теоремы, содержащейся в статье Э. Нетер, можно сформулировать так: в случае вариационной задачи (с любым числом зависимых и независимых переменных) для каждого бездивергентного вектора существует другой, отличающийся от него членами, которые исчезают, когда удовлетворяются уравнения Лагранжа — Эйлера, и имеющий структуру, определяемую прямой теоремой Нетер для некоторой однопараметрической непрерывной группы.

Сформулированное усиление обратной теоремы Нетер необходимо, как мы уже отмечали, для строгого обоснования обычно принимаемого без доказательства утверждения, что с каждым законом сохранения типа уравнения непрерывности можно связать однопараметрическую непрерывную группу симметрии интеграла действия.

В самое последнее время интерес к этой проблеме несколько возрос и были получены некоторые результаты; особенно следует отметить работы Тульчи Дасса, опубликованные в «Phys. Rev.» за 1966 г.[41]

б) *Проблема взаимосвязи симметрия — сохранение без требования вариационной структуры системы.* Как мы уже отмечали, следуя прежде всего Вигнеру [42], общепринятый характер соответствия симметрий и законов сохранения нарушается, если уравнения движения невыводимы из вариационного принципа или в случае предъявления требований симметрии не к действию, а к самим уравнениям. Если учесть современную тенденцию к формулировке принципов симметрии непосредственно в терминах наблюдаемых, то задача установления следствий инвариантности именно уравнений движения представляется весьма актуальной. Одной из задач такого рода является решение вопроса о том, с какими симметриями уравнений движения основных физических систем можно ассоциировать законы сохранения энергии, импульса и т. д. С ней связана и другая задача, в некотором смысле обратная первой,— какие выводы о законах сохранения можно заключить из инвариантности уравнений относительно известных симметрий. Первые шаги в этом направлении были сделаны в работах Г. Денмэна, рассмотревшего простейшую задачу одномерного движения классической частицы и получившего весьма неожиданные результаты. Он, например, показал, что если требования симметрии предъявлять к уравнению движения, то закон сохранения импульса ассоциируется не с однородностью пространства, а с более сложной комбинированной симметрией, представляющей собой произведение групп пространственных трансляций, подобий и пространственно-временны́х отражений [43].

Иногда считают, что подход к квантовой теории поля на основе S-матрицы является существенно более общим, чем лагранж-гамильтоновский, и потому известное значение приобретает анализ взаимосвязи симметрия — сохранение в S-матричной схеме. Но в действительности суть дела при таком подходе по существу не меняется: квантовый вариант взаимосвязи почти без изменения переносится в теорию S-матрицы, только роль гамильтониана при этом играет сама S-матрица [44]. С другой стороны, в настоящее время имеются веские основания в пользу возможности представления S-матричной теории в лагранж-гамильтоновской форме [45]. Тем не менее всесторонний анализ проблемы взаимосвязи в различных теоретических схемах, в той или иной мере выходящих за рамки лагранж-гамильтоновского формализма и нетеровской концепции, может оказаться небесполезным при разработке удовлетворительной теории поля и частиц.

в) *Теория локальной инвариантности и компенсирующих полей* представляет собой одно из наиболее блестящих обобщений первоначальных теорем Нетер, достигнутых в последнее десятилетие. Согласно первой теореме Нетер, законы сохранения связаны с конечнопараметрическими группами симметрии. Например, все зарядовые законы сохранения могут быть ассоциированы с однопараметрическими группами калибровочных преобразований первого рода, физический смысл которых заключается в том, что не сама волновая функция, а лишь ее квадрат могут быть измерены непосредственно. Но такие преобразования означают одновременное преобразование фазы во всех точках пространства — времени, что не может быть удовлетворительным ни с физической, ни с методологической точек зрения. Поэтому более оправдано рассмотрение локализованных калибровочных групп (требование локальной инвариантности), нарушающее, однако, инвариантность теории, которая естественным образом восстанавливается, если дополнительные члены интерпретировать как новые (компенсирующие) поля.

Хорошо и давно известный пример — электромагнитное поле, связанное с локализацией группы симметрии закона сохранения электрического заряда. При таком подходе концепция взаимосвязи симметрия — сохранение существенно углубляется, приобретая характер взаимосвязи симметрия — сохранение — взаимодействие. На этом пути были получены некоторые результаты, относящиеся не только к физике элементарных частиц, но и к теории гравитации [46]. Заметим, что новое направление, связанное прежде всего с именами Янга и Миллса, Утиямы, Сакураи, Швингера, а также Иваненко, Соколика и других, не является внутренне единым и сталкивается с некоторыми трудностями [47]. Несмотря на это, простота, методологическая удовлетворительность (естественное обобщение лагранжева формализма, локальная инвариантность, введение взаимодействий и т. д.) и экспериментальное подтверждение некоторых предсказаний теории компенсирующих полей свидетельствуют о ее плодотворности. Локально-инвариантное расширение первой теоремы Нетер, лежащее в основе этой теории, представляется поэтому весьма важным шагом вперед в развитии концепции взаимосвязи симметрия — сохранение. Интересно, что теория компенсирующих полей восходит к 20-м годам нашего столетия и тесно связана с открытием и дальнейшей разработкой калибровочных симметрий (Вейль, Фок и др.) [48].

Названных проблем, а число их можно было бы умножить, по-видимому, достаточно, чтобы, несмотря на известную законченность и алгоритмичность нетеровских теорем, убедиться в существовании разнообразных возможностей их обобщения и дальнейшего развития.

ПРИМЕЧАНИЯ

К введению

1 *Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс.* Фейнмановские лекции по физике, в. 4. М., «Мир», 1966, с. 242.

2 *Э. Нетер.* Инвариантные вариационные задачи. В сб. «Вариационные принципы механики». Ред. *Л. С. Полак.* М., Физматгиз, 1959.

3 Теоремы Нетер, вообще говоря, выражают взаимосвязь симметрия—вариационный принцип—сохранение, но для краткости, а также имея в виду некоторые варианты этой взаимосвязи, не содержащие вариационного аспекта, мы используем выражение взаимосвязь симметрия—сохранение.

4 Это обоснование с различных точек зрения можно, например, найти в работах ведущих физиков и математиков XX в.: *Л. де Бройль.* По тропам науки. М., ИЛ, 1962, с. 296; *Д. Гильберт.* Математические проблемы. В сб. «Проблемы Гильберта». М., Физматгиз, 1969, с. 13; *Л. И. Мандельштам.* Полное собр. трудов, т. V. Изд-во АН СССР, 1950, с. 94; *Ч. Янг.* Элементарные частицы. М., Госатомиздат, 1963, с. 4; *Ф. Клейн.* О геометрических основаниях лоренцевой группы. В сб. «Новые идеи в математике», № 5. СПб., 1914, с. 146; *М. Лауэ.* История физики. М., ГИТТЛ, 1956, с. 13.

5 Более детальное определение принципа симметрии с рассмотрением физической сущности вопроса можно найти в ряде работ Е. П. Вигнера. См., например, *E. P. Wigner.* Relativistic invariance in quantum mechanics. Nuovo Cimento, 3, № 3, 1956; *E. P. Wigner, H. Van Dam, R. M. Hautappel.* The conceptual basis and use of the geometric invariance principles. Revs. Mod. Phys., 37, 1965, p. 595.

6 Эта аргументация фундаментальности принципов симметрии и неизбежности теоретико-группового описания природы восходит к Ф. Клейну, Э. Картану, А. Эйнштейну, Г. Вейлю и содержится в ряде работ Г. А. Соколика. См., например, *Г. А. Соколик.* Групповые методы теории элементарных частиц. М., Атомиздат, 1965; *Г. А. Соколик.* Симметрия в современной физике. В сб. «Философские проблемы теории тяготения Эйнштейна и релятивистской космологии». Киев, «Наукова думка», 1965; *Г. А. Соколик, К. Г. Станюкович.* Предисловие к сб. «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц». М., Атомиздат, 1966.

7 *Е. П. Вигнер.* События, законы природы и принципы инвариантности (Нобелевская лекция). УФН, 85, 1965, с. 727.

8 См., например, «Элементарные частицы и компенсирующие поля». Ред. *Д. Д. Иваненко.* М., «Мир», 1964.

9 См. примеч. 5, 6, 7, а также: *R. Hagedorn.* Note on symmetry operations in quantum mechanics. Nuovo Cimento, 12, ser. 10, Suppl. 1, 1959, p. 73; *С. Швебер.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., ИЛ, 1963.

10 *Дж. Макки.* Лекции по математическим основам квантовой механики. М., «Мир», 1965, с. 11.

11 *А. Траутман.* Общая теория относительности. УФН, 89, 1966, с. 3.

12 См. примеч. 5, 6, 7, 9, 11, а также: *Дж. Андерсон.* Принципы относительности и роль координат в физике. В сб. «Гравитация и относительность». М., «Мир», 1965; *Г. Вейль.* Симметрия. М., Физматгиз, 1968; *Р. Фейнман.* Характер физических законов. М., «Мир», 1968.

13 *А. Эйнштейн.* Собр. науч. трудов. М., «Наука», 1965, с. 10.

14 *Г. Минковский.* Пространство и время. В сб. «Принцип относительности». Л., ОНТИ, 1935, с. 187.

15 *А. Эйнштейн.* См. примеч. 13, с. 650.

16 Обсуждение этих понятий — см. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Механика. М., Физматгиз, 1958; а также: *Н. Ф. Овчинников.* Принципы сохранения. М., «Наука», 1966.

17 Обсуждение локального характера законов сохранения в релятивистской физике можно найти в ряде книг по теории относительности и теории поля. См. также: *Р. Фейнман.* Характер физических законов. М., Мир, 1968.

18 Имеется обширная литература, посвященная проблеме сохранения в общей теории относительности. См. примеч. к гл. V.

19 См. цитированное выше соч. *Е. П. Вигнера* и *Р. Фейнмана,* а также: *К. Форд.* Мир элементарных частиц. М., «Мир», 1965.

20 *К. Форд.* См. примеч. 19, с. 112.

21 *В. Н. Веселовский.* Философское значение законов сохранения материи и движения. М., «Мысль», 1964; *В. С. Готт.* Симметрия и асимметрия. М., «Знание», 1965.

22 См., например, *Л. С. Полак.* Вариационные принципы механики. М., Физматгиз, 1960.

23 *Э. Нетер.* Инвариантные вариационные задачи. В сб. «Вариационные принципы механики». Ред. *Л. С. Полак.* М., Физматгиз, 1959.

24 См. гл. II.

25 *Э. Нетер.* См. примеч. 23, с. 613.

26 *Е. П. Вигнер.* Симметрия и законы сохранения. УФН, 83, 1964, с. 729.

27 *Дж. Макки.* Лекции по математическим основам квантовой механики. М., «Мир», 1965.

28 Этот подход, вообще говоря, основан на некотором усилении первой обратной теоремы Нетер, доказательство которой недавно обсуждалось Т. Дассом. См. *T. Dass.* Conservation laws and symmetries II. Phys. Rev., **150**, N 4, 1966.

29 См., например, работы по механике сплошной среды, небесной механике: *Л. И. Седов.* Математические методы построения моделей сплошных сред. УМН, **20**, 1965, с. 121; *E. Hölder.* Mathematische Untersuchungen der Himmelsmechanik. Math. Zs., **31**, 1930, S. 198.

30 См., например, *Г. Д. Биркгоф.* Гидродинамика. М., ИЛ, 1963; *Л. В. Овсянников.* Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск, СО АН СССР, 1966.

31 См., например, *Г. А. Соколик.* Групповые методы в теории элементарных частиц. М., Атомиздат, 1965; сб. «Элементарные частицы и компенсирующие поля». См. примеч. 8.

32 См., например, сб. «Физика высоких энергий и теория элементарных частиц». Киев, «Наукова думка», 1967.

33 Помимо работ, указанных в примеч. 31 и 32, см. также: *Г. Бартон.* Дисперсионные методы в теории поля. М., Атомиздат, 1968; *Р. Йост.* Общая теория квантованных полей. М., «Мир», 1967; *В. Гейзенберг.* Введение в единую полевую теорию элементарных частиц. М., «Мир», 1968; *И. Сигал.* Математические проблемы релятивистской физики. М., «Мир», 1968.

34 Теория локальной инвариантности. См. примеч. 8. Взаимосвязь симметрия—сохранение без вариационного принципа. См., например, *H. Denman.* Invariance and conservation laws in classical mechanics. J. Math. Phys., **6**, 1965, p. 1611; 7, p. 1910.

35 Усиление обратной теоремы Нетер. См. примеч. 28.

36 См., например, примеч. 4.

37 *E. Bessel-Hagen.* Über die Erhal-

tungssätze der Electrodynamik. Math. Ann., 84, 1921, S. 258.

38 *G. Herglotz.* Über die Mechanik der deformierbaren Körpers vom Standpunkte der Relativität. Ann. d. Phys., 36, 1911, S. 493.

39 *F. Engel.* Über die 10 allgemeinen Integralen der klassischen Mechanik. Gött. Nachr., 1916, S. 270.

40 *Э. Нетер.* См. примеч. 23.

41 *G. Hamel.* Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik, Zs. f. Math. u. Phys., 50, 1904, S. 1; Über die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik. Math. Ann., 59, 1904, S. 3.

42 *F. Klein.* Über die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinischen Gravitationstheorie (1918), Gesammelte math. Abhandlungen, Bd. I. Berlin, Springer, 1921.

43 *А. Уинтнер.* Аналитические основы небесной механики. М., Физматгиз, 1967, с. 507.

44 *E. P. Wigner* и др. См. примеч. 5.

45 Там же, с. 607.

46 См. гл. III.

47 *Л. С. Полак.* См. примеч. 22.

48 См. примеч. 23.

49 *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. М., ГИТТЛ, 1957; *P. Roman.* Theory of elementary particles. Amsterdam, North-Holland, 1964; *С. Швебер.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., ИЛ, 1963; *E. L. Hill.* Hamilton's principle and conservation theorems of mathematical physics. Revs. Mod. Phys., 23, 1951, p. 253; *M. Fierz.* Einführung in die relativistische Quantenfeldstheorie und Elementarteilchen. Anhang 1, Zürich, 1965; *U. E. Schröder.* Noether's theorem and the conservation laws in classical field theory. Fortschritte der Phys., 16, 1968, p. 357.

50 *Р. Курант, Д. Гильберт.* Методы математической физики, т. I. М.— Л., ГТТИ, 1933; *И. М. Гельфанд, С. В. Фомин.* Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961; *H. Rund.* The Hamilton—Jacoby theory in the calculus of variations. London, D. Van Nostrand Comp., 1966.

51 *A. Trautman.* Foundations and current problems of general relativity. Lecturs on general relativity. Prentice-Hall, 1965; *А. Траутман.* Законы сохранения в общей теории относительности. «Эйнштейновский сборник, 1967». М., «Наука», 1967. *А. Траутман.* Общая теория относительности. УФН, 89, 1966, с. 3; *Дж. Андерсон.* Принципы относительности и роль координат в физике. В сб. «Гравитация и относительность». М., «Мир», 1965; *E. Schmutzer.* Relativistische Physik. Leipzig, Teubner, 1968.

К главе I

1 *К. Маркс* и *Ф. Энгельс.* Соч., т. 12, Изд. 2, с. 731.

2 См. гл. II.

3 См. Введение.

4 См., например, следующие работы: *Г. Вейль.* Симметрия. М., Физматгиз, 1968; *А. Т. Григорьян, В. П. Зубов.* Очерки развития основных понятий механики. М., Изд-во АН СССР, 1962; *M. Jammer.* Concept of space. Harvard. Univ. Press., Cambridge, 1954; *М. Джеммер.* Понятие массы. М., «Прогресс», 1967; *Н. Ф. Овчинников.* Принципы сохранения. М., «Наука», 1966; *S. Sambursky.* The physical world of the Greeks. London, 1960; *Б. Г. Кузнецов.* Принцип относительности в античной, классической и квантовой физике. М., Изд-во АН СССР. 1959.

5 См., например, *А. Ф. Лосев.* История античной эстетики. М., «Высшая школа», 1963; *J. Vlastos.* Equality and justice in early greek cosmologies. Classical Philology, 42, № 2, 1947, p. 156; *J. Vlastos.* Isonomia. Am. J. Philology, 74, № 4, 1953, p. 337; *J. Charbonneaux.* Rytme et symétrie dans la statuaire grecque. Intern. Congr. on aesthetics, IV. Aphines, 1960; *Ch. Mugler.* L'isonomie des atomists. Rev. de Philologie, 30, № 12, 1956, p. 231.

6 Анаксимандру это высказывание приписывает Аристотель: *Aristo-*

teles. De coelo. II, 13, 295b-FVS⁶, 12A26 (I, 98). Цитируется по книге: *А. Т. Григорьян, В. П. Зубов.* Очерки развития основных понятий механики. М., Изд-во АН СССР, 1962, с. 25.

7 Ref. 1, 6, 3-FVS⁶, 12A11, I, 84. Цитируется по книге: *А. Т. Григорьян, В. П. Зубов,* с. 25.

8 *Aëtius.* Placita, III, 15, 7 (Dox. 380)-FVS⁶ 28A44 (I,225). Цитируется по книге: *А. Т. Григорьян, В. П. Зубов,* с. 25.

9 *Платон.* Федр. 99в. Цитируется по книге: *А. Т. Григорьян, В. П. Зубов,* с. 26.

S. Sambursky. The physical world of the Greeks. London, 1960, p. 13. См. также: *С. Я. Лурье.* Механика Демокрита. Архив истории науки и техники, в. 7. М.— Л., 1935, и книгу: *А. Т. Григорьян, В. П. Зубов,* с. 25.

11 *J. Vlastos.* Equality and justice in early greek cosmologies. Classical Philology, 42, N 2, 1947, p. 156.

12 ДК, 28, B8. См., например, *И. Д. Рожанский.* Анаксагор. М., «Наука», 1972.

13 ДК, 28, B8. См. книгу И. Д. Рожанского.

14 *J. Vlastos.* Isonomia. Am. J. Phylology, 74, N 4, 1953, p. 337.

15 *А. Ф. Лосев.* История античной эстетики. М., «Высшая школа», 1963, с. 303.

16 См., например, *Э. Я. Кольман.* История математики в древности. М., Физматгиз, 1961; *Д. Я. Стройк.* Краткий очерк истории математики. М., «Наука», 1964.

17 Там же.

18 Там же.

19 *А. Ф. Лосев,* Цит. соч., с. 83, 129; *К. Гильберт* и *Г. Кун.* История эстетики. М., ИЛ, 1960, с. 19, 22.

20 *А. Ф. Лосев.* Цит. соч., с. 168—183.

21 *А. Ф. Лосев.* Цит. соч.; *Б. Л. Ван дер Варден.* Пробуждающаяся наука. М., Физматгиз, 1959; см. также литературу, приведенную в примеч. 4 и 5.

Платон. Тимей. Сочинения Платона. Перев. В. Н. Карпова. М., 1879.

23 *В. Гейзенберг.* Физика и философия. М., ИЛ, 1966, с. 46.

24 *А. Ф. Лосев.* Цит. соч.

25 *Г. А. Соколик.* Групповые методы в теории элементарных частиц. М., Атомиздат, 1965, с. 10.

26 *А. Ф. Лосев.* Цит. соч., с. 271—272; см. также: *Б. Л. Ван дер Варден.* Пробуждающаяся наука. М., Физматгиз, 1959.

27 *В. Гейзенберг.* См. примеч. 26, с. 50.

28 *А. Ф. Лосев.* Цит. соч.

29 *J. Vlastos.* См. примеч. 11.

30 *А. Ф. Лосев.* Цит. соч.

31 *И. Д. Рожанский.* Цит. соч., примеч. 12.

32 *А. Ф. Лосев.* Цит. соч.

33 «Материалисты Древней Греции». М., ГИПЛ, 1955, с. 65.

34 *Н. Ф. Овчинников.* Принципы сохранения. М., «Наука», 1966.

35 *И. Д. Рожанский.* Цит. соч.

36 *Н. Ф. Овчинников.* Цит. соч., с. 43—46.

37 *А. О. Маковельский.* Древнегреческие атомисты. Баку, 1946, с. 229, 233.

38 *А. Т. Григорьян, В. П. Зубов.* Цит. соч., примеч. 6, с. 25.

39 «Материалисты Древней Греции». См. примеч. 36, с. 72.

40 *М. Джеммер.* Понятие массы. М., «Прогресс», 1967, с. 37.

41 *А. Т. Григорьян, В. П. Зубов.* Цит. соч., с. 27.

42 *Аристотель.* Физика. М., Соцэкгиз, 1936, с. 70.

43 *Ф. Франк.* Философия науки. М., ИЛ, 1960, с. 206.

44 *Аристотель.* Цит. соч., с. 71.

45 *В. П. Зубов.* Физические идеи древности. В сб. «Очерки развития основных физических идей». Ред. *А. Т. Григорьян, Л. С. Полак.* М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 36.

46 *Б. Г. Кузнецов.* Принцип относительности в античной, классической и квантовой физике. М., Изд-во АН СССР, 1956.

47 *Аристотель.* Цит. соч., с. 124.

48 Там же, с. 135.

49 *А. Н. Крылов.* Очерк истории установления основных начал механики. УФН, II, в. 2, 1921, с. 152.

50 О представлении аристотелевой динамики посредством уравнения (1); *А. Н. Крылов.* См. примеч. 49; *E. P. Wigner.* Conservation laws in classical and quantum physics. Progr. Theor. Phys. (Kyoto), 11, N 4—5, 1954; *H. J. Treder.*

Galilei Transformationen. Wiss. Zs. Humb. Univ., 14, 1965, S. 417. Иная интерпретация динамических представлений Аристотеля была дана И. Н. Веселовским (см., например, его вступительную статью к «Сочинениям» Архимеда: *Архимед*. Соч. М., 1962, с. 12). Подчеркнем, что у Аристотеля речь может идти о симметриях некоторой сплошной среды, так как пустое пространство в его схеме отсутствует. Поэтому уравнение (1) соответствует скорее некоторой модификации аристотелевой динамики, развитой в V—VI вв. н. э. комментатором Аристотеля Филопоном. В этой схеме аристотелевы динамика и симметрии могут быть отнесены уже к пустому пространству. Соответствующие высказывания Филопона можно найти в книге: Source book in greek science. *Ed. M. Cohen* and *I. Drabkin*. Harvard Univ. Press. Cambridge, 1958, p. 217—221.

51 См. примеч. 23, 25.

52 Надо иметь в виду, что у Эпикура можно усмотреть определенную «поляризацию» пространства: атомы падают сверху вниз.

53 *В. П. Зубов*. Физические идеи древности. См. примеч. 48; *В. П. Зубов*. Аристотель. М., Изд-во АН СССР, 1963; *Б. Г. Кузнецов*. Цит. соч., примеч. 46.

54 См. примеч. 50.

55 Действительно, уравнение (1), будучи уравнением первого порядка, может быть лишь вырожденным случаем уравнения Лагранжа — Эйлера, т. е. если $\mathscr{L}$ — лагранжиан, то $d^2\mathscr{L}/d\dot{x}^2 = 0$ и $\mathscr{L} = A(x, t) + \dot{x}B(x, t)$, и уравнение Лагранжа — Эйлера имеет вид $dA/dx = dB/dt$, которое может быть только алгебраическим в отличие от дифференциального уравнения (1).

56 См. стр. 24 настоящей работы.

57 См., например, *В. П. Зубов*. Физические идеи древности, примеч. 45; *R. Dugas*. A History of mechanics. Routledge Kegan P. LTD, London, 1957; *Б. Л. Ван дер Варден*. См. примеч. 21; *S. Sambursky*. The physical world of the Greeks. London, 1960.

58 *Г. А. Соколик*. См. примеч. 25, с. 5—6.

59 *В. П. Зубов*. Физические идеи средневековья. См. примеч. 45; *P. Duhem*. Le système du monde. Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic. Paris, 1913—1959, t. I—X; *А. Т. Григорьян, В. П. Зубов*. Цит. соч.; *R. Dugas*. См. примеч. 57, а также глубокие исследования М. Клагетта, А. Койре, А. Майер, Э. Декстерхейса; ссылки на них можно найти в цитированной книге А. Т. Григорьяна и В. П. Зубова.

60 *В. П. Зубов*. Физические идеи средневековья. См. примеч. 45, с. 123.

61 Там же, с. 124.

62 Цитируется по книге: *М. Джеммер*. Понятие массы. См. примеч. 4.

63 *Н. Кузанский*. Избр. философские соч. М., Соцэкгиз, 1937.

64 Цитируется по статье: *В. В. Соколов, З. А. Тажуризина*. Николай Кузанский. «Вопросы философии», 10, 134, 1964, с. 137.

65 Там же, с. 138.

66 См., например, примеч. 46.

67 Там же.

68 Там же.

69 См. стр. 25 настоящей работы.

70 *В. П. Зубов*. См. примеч. 45, с. 136.

71 *G. W. Leibniz*. Illustratio ulterior objections contra Cartesianam natural legem, novaque in ejus locum regulae propositae. В собрании: Leibnizens gesammelte Werke aus den Handschriften der Königl. Bibliothek zu Hannover. Hrsg. von C. H. Pertz, Folge 3, Mathematik (Leibnizens mathematische Schriften, hrsg. von C. J. Gerhardt, Abth. 2, Bd. II). Schmidt, Halle, 1860, S. 127.

72 *M. Jammer*. Concept of space. См. примеч. 4; *А. Т. Григорьян, В. П. Зубов*. Цит. соч.; *Б. Г. Кузнецов*. См. примеч. 46; *A. Koyre*. Etudes galileennes. I—III. Paris, Hermann, 1939; *R. Dugas*. La mécanique au XVII siècle. Neuchatel, 1954; *R. Dugas*. См. примеч. 57.

73 *И. Ньютон*. Математические начала натуральной философии. Изд-во Николаевской морской академии, 1915, с. 3.

74 Там же, с. 45.

75 Там же, с. 30—31.

76 *Г. В. Лейбниц*. Полемика Г. Лейб-

ница и С. Кларка. Изд. ЛГУ, 1960, с. 47.

[77] Там же, с. 47. Сравнительную оценку концепций Ньютона и Лейбница см. в предисловии А. Эйнштейна к книге: *М. Jammer*. Concept of space. См. примеч. 4.

[78] См., например, *Ph. Jourdain*. Anmerkungen zu N 191 Ostwalds Klassiker. Leipzig, 1914; *М. Планк*. Закон сохранения энергии. М.— Л., ГОНТИ, 1938; *Ж. Л. Лагранж*. Аналитическая механика. Т. 1. М.— Л., ГИТТЛ, 1950; *Э. Мах*. Принцип сохранения работы. СПб., 1909.

[79] Помимо книг Журдэна и Лагранжа, указанных в примеч. 78, обеих книг Дюга — примеч. 72, см. также: *Э. Мах*. Механика. СПб., 1909; *Н. Д. Моисеев*. Очерки развития механики. Изд. МГУ, 1961; *В. А. Фабрикант*. И. Ньютон, И. Бернулли и закон сохранения количества движения. УФН, 70, № 3, 1960.

[80] См., например, указанные в примеч. 79 и 78 работы Лагранжа, Маха, Журдэна, Моисеева.

[81] *Ж. Даламбер*. Динамика. М.— Л., Гостехиздат, 1950, с. 38.

[82] Там же, с. 38—40.

[83] *Л. Эйлер*. Основы динамики точки. М.— Л., ОНТИ, 1937, с. 68.

[84] Там же, с. 73.

[85] Там же, с. 69.

[86] См. эпиграф к настоящему разделу.

[87] См. примеч. 71.

[88] Модификация античного варианта взаимосвязи симметрия — сохранение в духе Эйлера и Даламбера, утратив по существу свое значение после Лагранжа, была хорошо известна философам и часто ими использовалась вплоть до XX в. См., например, в книге М. Джеммера (примеч. 4) ссылки на Канта, Шопенгауэра, Лотце, Дюринга, Лассвица, Вундта и т. д.: *М. Джеммер*. Понятие массы, с. 95.

[89] *Х. Гюйгенс*. Три мемуара по механике. М., Изд-во АН СССР, 1951.

[90] *В. Паули*. Законы сохранения в теории относительности и квантовой механике. В сб. «Современные проблемы физической химии и химической технологии», в. 2, 1937.

[91] См. гл. III.

[92] См. примеч. 89.

[93] *К. К. Баумгарт*. Работы Х. Гюйгенса по механике. Приложение к книге. См. примеч. 89.

[94] *Х. Гюйгенс*. См. примеч. 89, с. 231.

[95] См. примеч. 83.

[96] *Л. С. Полак*. Вариационные принципы механики. М., Физматгиз, 1960; *R. Dugas*. См. примеч. 57; *Н. Д. Моисеев*. См. примеч. 79; *К. Ланцош*. Вариационные принципы механики. М., «Мир», 1965.

К главе II

[1] *К. Ланцош*. Вариационные принципы механики. М., «Мир», 1965, с. 20.

[2] *Ф. Клейн*. Лекции о развитии математики в XIX столетии, ч. 1. М.— Л., ОНТИ, 1937, с. 232.

[3] *J.-L. Lagrange*. Méchanique analytique. Desaint, Paris, 1788.

[4] Об «аналитическом» направлении в механике и выражении «аналитическая механика» см. книги Ланцоша и Клейна, указанные в примеч. 1 и 2, и а также: *Ф. Р. Гантмахер*. Лекции по аналитической механике. М., Физматгиз, 1960, с. 9.

[5] *И. Б. Погребысский*. От Лагранжа к Эйнштейну, гл. 2 и 3. М., «Наука».

[6] *В. Р. Гамильтон*. Об общем методе в динамике. В сб. «Вариационные принципы механики». Ред. *Л. С. Полак*. М., Физматгиз, 1959, с. 176.

[7] *А. В. Дорофеева*. Развитие вариационного исчисления как исчисления вариаций. Историко-математические исследования, в. 14. М., Физматгиз, 1961.

[8] Детальный анализ этой статьи дан в работе А. В. Дорофеевой (см. примеч. 7); см. также: *Л. С. Полак*. Вариационные принципы механики. М., Физматгиз, 1960.

[9] Перевод этой статьи с небольшими сокращениями имеется в сб. (см. примеч. 6). Обсуждение име-

ется в упомянутой книге Л. С. Полака (см. примеч. 8).

[10] В современной литературе «общая формула динамики» Лагранжа известна под названием принцип Даламбера — Лагранжа; реже используется название, более близкое к первоначальному выражению Лагранжа,— «общее уравнение динамики». См., например, *Ф. Р. Гантмахер.* Лекции по аналитической механике. М. Физматгиз, 1960, с. 25.

[11] Здесь и в дальнейшем мы используем, как правило, обозначения авторов исследуемых сочинений, лишь иногда их модернизируя. В частности, Лагранж везде пользовался выражением для сил, отнесенных к единичным массам.

[12] *Ж. Л. Лагранж.* Применение метода, изложенного в предыдущем мемуаре, для решения различных задач динамики. В сб. «Вариационные принципы механики», с. 120.

[13] Там же, с. 126.

[14] Там же, с. 127.

[15] Например, уравнения «аристотелевой динамики»: $F = mv$ трансляционно-инвариантны, но неинвариантны относительно галилеевских преобразований.

[16] *Ж. Л. Лагранж.* См. примеч. 12, с. 128.

[17] См. стр. 35 настоящей работы.

[18] *J.-L. Lagrange.* Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent mutuellement en raison inverse des carres des distances (1777). Oeuvres, Gauthier-Villars, 1867—1892, 4, 401.

[19] *Ph. Jourdain.* Anmerkungen zu N 191 Ostwald's Klassiker. Leipzig, 1914.

[20] *J.-L. Lagrange.* См. примеч. 18, p. 404.

[21] Там же, р. 405.

[22] *Ж. Л. Лагранж.* Аналитическая механика, т. 1. М.— Л., ГИТТЛ, 1950 (перевод со второго французского издания 1813 г.), с. 9. Места, цитируемые по второму изданию, с точностью до редакции совпадают с соответствующими местами первого издания.

[23] Общее рассмотрение «Аналитической механики» Лагранжа и значения ее в механике имеются в следующих работах: *И. Б. Погребысский.* См. примеч. 5; *R. Dugas.* Histoire de la mécanique. Editions de Griffon, Neuchatel, 1950; *C. Truesdell.* A programm toward rediscovering the rational mechanics of the Age of Reason. Archives for History of Exact Sciences, 1, N 1, 1960, p. 3.

[24] См. примеч. 12.

[25] *Л. С. Полак.* Цит. соч., с. 65.

[26] *Ж. Л. Лагранж.* Аналитическая механика. См. примеч. 22, с. 314.

[27] Лагранж, а вслед за ним Гамильтон, Якоби и другие механики XIX в. отождествляли законы сохранения импульса и движения центра тяжести, считая их, по-видимому, различными формулировками одного и того же закона (см. обсуждение этого вопроса на стр. 48 настоящей работы).

[28] *Ж. Л. Лагранж.* Аналитическая механика, с. 332.

[29] Там же, с. 334—335.

[30] Там же, с. 338.

[31] Там же, с. 369.

[32] Там же, с. 314.

[33] Там же, с. 316—317.

[34] Весьма эффективно использовал галилеевский принцип относительности Гюйгенс в задачах теории удара (см. стр. 34 настоящей работы).

[35] *И. Б. Погребысский.* Цит. соч., с. 74.

[36] Там же, с. 75—76.

[37] См. примеч. 27.

[38] *В. Р. Гамильтон.* Об общем методе в динамике. См. примеч. 6, с. 184.

[39] *В. Р. Гамильтон.* Второй очерк об общем методе в динамике. В сб. «Вариационные принципы механики», с. 239.

[40] См. уже упомянутые книги Л. С. Полака, И. Б. Погребысского, Р. Дюга, К. Ланцоша.

[41] См., например, книги Л. С. Полака и И. Б. Погребысского.

[42] *И. Б. Погребысский.* Цит. соч., с. 192.

[43] *В. Р. Гамильтон.* См. примеч. 6 и 38.

[44] Там же, с. 176.

[45] Там же, с. 181.

[46] См. примеч. 41.

[47] *В. Р. Гамильтон.* См. примеч. 6, с. 184.

[48] Там же, с. 232.

[49] См. примеч. 39.

50 См., например, *Р. Курант* и *Д. Гильберт.* Методы математической физики. Т. 1. М.— Л., ГТТИ, 1933, с. 246—252; *И. М. Гельфанд, С. В. Фомин.* Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961, § 33.

51 *А. В. Дорофеева.* Цит. соч. — см. примеч. 7.

52 См. примеч. 8.

53 См., например, книги по вариационному исчислению — см. примеч. 50, а также *O. Bolza.* Lectures on the calculus of variations. Dover Publ., N. Y., 1961, p. 102.

54 *В. Р. Гамильтон.* Второй очерк. См. примеч. 39, с. 239.

55 См. гл. IV—VI настоящей работы.

56 *К. Ланцош.* Цит. соч., с. 116.

57 *М. В. Остроградский.* Лекции по аналитической механике. Собр. соч., т. 1, ч. 2. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1946.

58 *К. Г. Якоби.* Лекции по динамике. М.— Л., ОНТИ, 1936.

59 См. упомянутые книги Л. С. Полака, И. Б. Погребысского и Р. Дюга.

60 См., например, *Н. Н. Бухгольц.* Основной курс теоретической механики, ч. II. М.— Л., Гостехиздат, 1945, гл. II, § 2; *Е. Н. Березкин.* Лекции по теоретической механике. Изд. МГУ, 1968, гл. 1, § 3.

61 *F. Klein.* Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, t. II. Springer, Berlin, 1927, S. 56—59; см. также: *E. P. Wigner.* The conceptual basis and use of the geometric invariance principles. Revs. Mod. Phys., **37**, 1965, p. 607.

62 Точнее, к закону сохранения импульса — см. примеч. 27.

63 *К. Г. Якоби.* Цит. соч., с. 16.

64 Там же, с. 29.

65 Там же, с. 19.

66 *Г. Кирхгоф.* Механика. М., Изд-во АН СССР, 1962.

67 Там же, с. 32.

68 Там же, с. 36.

69 *Н. Е. Жуковский.* Теоретическая механика. М.— Л., ГТТИ, 1952.

70 Там же, с. 563.

71 *А. Г. Вебстер.* Механика материальных точек. М.— Л., ГТТИ, 1933.

72 См. примеч. 60.

73 Цитирование по книге: *Э. Т. Уиттекер.* Аналитическая динамика. М.— Л., ОНТИ, 1936, с. 351.

74 *H. Wußing.* Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes. Berlin, 1969.

75 См. упомянутые выше книги Р. Дюга, Л. С. Полака, И. Б. Погребысского, К. Ланцоша.

76 Такую или аналогичные формулировки без ссылки на С. Ли можно найти в немногих современных книгах по аналитической механике: *Э. Т. Уиттекер.* См. примеч. 73, с. 351; *Г. Гольдстейн.* Классическая механика. М., Гостехиздат, 1957, с. 283; *H. Corben, Ph. Stehle.* Classical mechanics. J. Wiley, 1965, p. 216.

77 См. упомянутые книги Л. С. Полака, И. Б. Погребысского, Э. Т. Уиттекера, Р. Дюга.

78 *Э. Т. Уиттекер.* Цит. соч., с. 294.

79 См. упомянутые книги Л. С. Полака, И. Б. Погребысского, Р. Дюга.

80 *Ф. Клейн.* См. примеч. 2; *К. Ланцош.* См. примеч. 1.

81 *Ф. Клейн.* Цит. соч., с. 245.

82 *Э. Т. Уиттекер.* Цит. соч.

83 «... С. Ли открыл контактные преобразования и тем самым ключ ко всей гамильтоновой динамике как части теории групп» и несколько далее: «Всю жизнь Ли посвятил систематическому изучению групп непрерывных преобразований и их инвариантов, выявляя их основное значение в качестве классификационного принципа в геометрии, механике, в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных» (*Д. Я. Стройк.* Краткий очерк истории математики. М., «Наука», 1964, с. 212).

84 *C. Jordan.* Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris, 1870. С. Ли впервые познакомился с теорией групп подстановок в 1863 г., прослушав краткую лекцию Л. Силова по теории Галуа. См., например, *H. Wußing.* Цит. соч., S. 134.

85 *Ф. Клейн.* Эрлангенская программа. В сб. «Об основаниях геометрии». Ред. *А. П. Норден.* М., ГИТТЛ, 1956.

86 *Г. Вусинг.* О генезисе абстрактного понятия группы. Историко-математические исследования, в. 17. М., Физматгиз, 1966, с. 25.

87 *Г. Дарбу, Ф. Клейн.* Памяти С. Ли. Казань, 1899.

88 См., например, соответствующие высказывания С. Ли и Ф. Клейна, приведенные в цитируемой книге Г. Вусинга,— см. примеч. 74.

89 *Г. Дарбу, Ф. Клейн.* См. примеч. 87.

90 См., например, *Б. А. Розенфельд.* Многомерные пространства. М., «Наука», 1966, с. 624.

91 О некоторых различных толкованиях этих терминов — см. *Г. Гольдстейн.* Классическая механика. М., Гостехиздат, 1957.

92 *S. Lie.* Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen (1874). Gesammelte Abhandlungen. Bd. 4, Abh. I.

93 *К. Ланцош.* Цит. соч.

94 *Э. Т. Уиттекер.* Цит.соч., с. 333.

95 Там же, с. 337—338.

96 *Т. Леви-Чивита, У. Амальди.* Курс теоретической механики. Т. 2, ч. 2. М., ИЛ, 1951, с. 301.

97 *Ф. Клейн.* Лекции о развитии математики в 19 столетии. Т. 1. См. примеч. 2; *К. Ланцош.* Цит. соч.

98 *Д. Я. Стройк.* Цит. соч., с. 212.

99 *Э. Т. Уиттекер.* Цит. соч., с. 336.

100 Там же, с. 336.

101 *Г. Гольдстейн.* Цит. соч.

102 См., например, *Г. Гольдстейн.* Цит. соч.

103 См., например, книги Э. Т. Уиттекера и Г. Корбена и Ф. Стила — см. примеч. 76.

104 *Ф. Клейн.* Лекции о развитии математики в 19 столетии. Т. 1, с. 246.

105 *S. Lie.* Gesammelte Abhandlungen. Bd. 3—4. Berlin—Oslo, 1922; Anmerkungen zum Bd. 3—4 von F. Engel.

106 *S. Lie.* Kurzes Resume mehrer neuer Theorien (1872). Ges. Abh., Bd. 3, Abh. I.

107 *F. Engel.* Anmerkungen zum Bd. 3, S. 616 (см. примеч. 105).

108 *S. Lie.* См. примеч. 92.

109 *Ф. Клейн.* См. примеч. 104.

110 См., например, *S. Lie.* Ges. Abh., Bd. 3, Abh. XVI, Bd. 4, Abh. IV.

111 *S. Lie.* Diskussion aller Integrationsmethoden der partiellen Differentialgluchungen erster Ordnung (1875). Ges. Abh., Bd. 3, Abh. XVI.

112 *F. Engel.* Über die 10 allgemeinen Integralen der klassischen Mechanik. Gött. Nachr., 1916, S. 272.

113 См. примеч. 108.

114 См. примеч. 106.

115 См. примеч. 108.

116 См. примеч. 92.

117 См. примеч. 108.

118 См., например, упомянутые книги Э. Т. Уиттекера, К. Ланцоша, а также Г. Корбена и Ф. Стила.

119 *F. Klein.* Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, t. II. Berlin, Springer, 1927, S. 56.

120 См. примеч. 112.

121 *G. Hamel.* Die Lagrange—Eulerschen Gleichungen der Mechanik. Zs. f. Math. u. Phys., **50**, 1904, S. 1.

122 См. гл. III.

123 *Ф. Клейн.* Высшая геометрия. М.—Л., ГОНТИ, 1939; *Э. Т. Уиттекер.* Цит. соч.

К главе III

1 *И. Б. Погребысский.* Цит. соч., с. 253.

2 См., например, *Г. Д. Биркгоф.* Гидродинамика. М., ИЛ, 1963, § 59.

3 См., например, упомянутые книги И. Б. Погребысского, Л. С. Полака.

4 *Э. Картан.* Интегральные инварианты. М.—Л., ГИТТЛ, 1940.

5 *R. Dugas.* History of mechanics. London, Routledge, Kegan Paul LTD, 1957; *М. Джеммер.* Понятие массы. М., «Прогресс», 1967.

6 См. названные книги Л. С. Полака, И. Б. Погребысского, Р. Дюга, М. Джеммера.

7 См. названные книги Л. С. Полака, И. Б. Погребысского.

8 *Ж. Л. Лагранж.* Аналитическая механика. Т. 2, с. 406.

9 Там же, с. 406.

10 *К. Г. Якоби.* Лекции по динамике, с. 57.

[11] См., например, книги Л. С. Полака, И. Б. Погребысского.
[12] Там же.
[13] *К. Ланцош.* Вариационные принципы механики. М., «Мир», 1965.
[14] *W. R. Hamilton.* Lectures on quaternions. Dublin, 1853.
[15] Об истории и применениях винтового исчисления: *Б. А. Розенфельд.* А. П. Котельников. Историко-математические исследования, в. IX. М., 1956. *Т. В. Путята, Б. Л. Лаптев, Б. А. Розенфельд* и др. Александр Петрович Котельников. М., «Наука», 1968; *Ф. М. Диментберг.* Винтовое исчисление и его приложения к механике. М., «Наука», 1965.
[16] См. примеч. 15.
[17] *Б. А. Розенфельд.* А. П. Котельников. См. примеч. 15.
[18] Там же.
[19] *Л. Пуансо.* Начала статики. М., 1920.
[20] *А. П. Котельников.* Винтовое счисление и некоторые его приложения к геометрии и механике. Уч. зап. Казанского ун-та, 1895.
[21] Там же, с. 209.
[22] Там же, с. 194.
[23] Там же, с. 206.
[24] Там же, с. 207.
[25] Там же, с. 209.
[26] Ссылки на эти работы см. в работах, указанных в примеч. 15.
[27] См. книгу Ф. М. Диментберга, указанную в примеч. 15.
[28] См. стр. 94 настоящей работы.
[29] См. примеч. 15.
[30] См. стр. 34 настоящей работы.
[31] *В. Паули.* Законы сохранения в теории относительности и квантовой механике. Сб. «Современные проблемы физической химии и химической технологии», в. 2, 1937.
[32] *I. Schütz.* Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie. Gött. Nachr., 1897, S. 110.
[33] *И. Б. Погребысский.* От Лагранжа к Эйнштейну. М., «Наука», 1966, с. 304.
[34] *Г. Минковский.* Пространство и время. В сб. «Принцип относительности». Ред. *В. К. Фредерикс* и *Д. Д. Иваненко.* Л., ОНТИ, 1935, с. 198.
[35] *F. Klein.* Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, t. 2. Berlin, Springer, 1927.
[36] См., например, *М. Планк.* Принцип сохранения энергии. М.— Л., ГОНТИ, 1938.
[37] *М. Джеммер.* Понятие массы. М., «Прогресс», 1967.
[38] *I. Schütz.* Das Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie. Gött. Nachr., 1897, S. 110.
[39] См., например, *Г. А. Соколик.* Групповые методы в теории элементарных частиц. М., Атомиздат, 1965, а также: *Г. А. Соколик, Н. П. Коноплева.* Проблема тождества и принцип относительности. В «Эйнштейновском сборнике, 1967». Ред. *И. Е. Тамм* и *Б. Г. Кузнецов.* М., «Наука», 1967.
[40] Там же.
[41] *F. Klein.* Цит. соч. — см. примеч. 35.
[42] См. гл. IV.
[43] См. стр. 90 настоящей работы.
[44] *F. Engel.* Über die 10 allgemeinen Integralen der klassischen Mechanik. Gött. Nachr., 1916, S. 270.
[45] См. гл. IV.
[46] Ссылки на эти работы можно найти в книге: *В. Паули.* Теория относительности. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
[47] *A. Kneser.* Das Prinzip der kleinsten Wirkung und Galileische Relatiwität. Math. Zs. 2, 1918, S. 326.
[48] См. примеч. 47, а также: *Gertrude Weyl.* Die Form des Wirkungsprinzips bei der Bewegung starrer Körper. Math. Zs., 11, 1921, S. 97.
[49] *Д. Я. Стройк.* Краткий очерк истории математики. М., «Наука», 1964, с. 212.
[50] *G. Hamel.* Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik. Zs. f. Math. u. Phys., 50, 1904, S. 23.
[51] *S. Lie, F. Engel.* Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig, Teubner, 1930.
[52] *G. Hamel.* Цит. соч., S. 24.
[53] *L. Boltzmann.* Über die Form der Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome generalisierte Koordinaten. Sitzber. d. Wiener Akad. d. Wiss., **111**, Dez., 1902; *П. В. Воронец.* Уравнения движения твердого тела, катящегося без скольжения по наклонной плоскости. Киев, 1903.
[54] Современное изложение метода квазикоординат содержится, на-

пример, в книге *А. И. Лурье.* Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.

55 *А. Пуанкаре.* Новая форма уравнений механики. Казань, 1901. (Compt. Rend., 132, N 7, 1901).

56 Там же.

57 В связи с методом квазикоординат на упомянутую работу Пуанкаре обычно не ссылаются, хотя она предшествовала публикациям Г. Гамеля, Л. Больцмана и Л. В. Воронца.

58 См., например, книгу А. И. Лурье (примеч. 54).

59 См. также книгу А. И. Лурье (примеч. 54).

60 Термин «Impulsgleichungen» введен Г. Гамелем.

61 *А. Пуанкаре.* См. примеч. 55.

62 *Э. Нетер.* Инвариантные вариационные задачи. В сб. «Вариационные принципы механики». М., Физматгиз, 1959, с. 611.

63 См. гл. IV.

64 См., например, исторические примечания к книге: *А. Уинтнер.* Аналитические основы небесной механики. М., «Наука», 1967.

65 Ссылки на работы Пуанкаре и Брунса и доказательства этих теорем можно найти, например, в книге: *Э. Т. Уиттекер.* Аналитическая динамика. М.— Л., ОНТИ, 1936.

66 Там же.

67 Функция $y = f(x)$ называется алгебраической, если существует такой многочлен $F(y, x)$, что $F(y, x) = 0$ при $y = f(x)$.

68 *Э. Т. Уиттекер.* См. примеч. 65, с. 392.

69 Там же, с. 417—423.

70 *Г. Н. Дубошин.* Небесная механика. М., Физматгиз, 1963, с. 568.

71 См. упомянутые выше книги А. Уинтнера, Э. Т. Уиттекера, Г. Н. Дубошина; *Л. Бриллюэн.* Научная неопределенность и информация. М., «Мир», 1966.

72 См. упомянутую в примеч. 71 книгу Л. Бриллюэна, а также: *М. Борн.* Физика в жизни моего поколения. М., ИЛ, 1963, с. 440.

73 Там же.

74 *А. Пуанкаре.* Наука и гипотеза. СПб., 1906, с. 147.

75 *Л. Бриллюэн.* См. примеч. 71, с. 165.

К главе IV

1 *Ч. Янг.* Закон сохранения четности и другие законы симметрии. УФН, 66, 1958, с. 79.

2 *Г. Минковский.* Пространство и время. В сб. «Принцип относительности». Ред. *В. К. Фредерикс, Д. Д. Иваненко.* Л., ОНТИ, 1935, с. 189.

3 *E. T. Whittaker.* A history of the theories of ather and electricity. V. I, II. Nelson, 1951—1953.

4 См., например, *Л. И. Мандельштам.* Лекции по физическим основам теории относительности. Полное собр. трудов. Т. V. Изд-во АН СССР, 1950.

5 Там же, с. 114.

6 Там же, с. 126.

7 См. упомянутые книги Э. Т. Уиттекера, Л. И. Мандельштама.

8 *Ph. Frank.* Das Relativitätsprinzip der Mechanik und Gleichungen für die electromagnetishen Vorgänge in bewegten Körpern. Ann. d. Phys., 27, 1908, S. 897.

9 *А. Пуанкаре.* Электричество и оптика (введение к книге). В сб. «Вариационные принципы механики», с. 773—779.

10 См. упомянутые выше книги Э. Т. Уиттекера и Л. И. Мандельштама; сб. «Принцип относительности» (примеч. 2), а также следующие работы: *М. Борн.* Физика в жизни моего поколения. М., ИЛ, 1963; *R. Dugas.* A history of mechanics. Routledge Kegan Paul LTD. London, 1957; *В. Паули.* Теория относительности. М. — Л., Гостехиздат, 1947; *Ch. Scribner.* H. Poincare and principle of relativity. Am. J. Phys., 32, 1964, p. 672; *Д. Холтон.* К генезису специальной теории относительности. «Эйнштейновский сборник, 1966». Ред. *И. Е. Тамм* и *Б. Г. Кузнецов.* М., «Наука», 1966; *T. Hirosige.* Electrodynamics before the theory of relativity 1890—1905. Japanese in the hist. of sci., N 5, 1966; *C. H. Keswani.* Origin of concept of relativity. Brit. J. Phil. Sci., 15, 1965, p. 286.

[11] *W. Voigt.* Über das Dopplerische Prinzip. Gött. Nachr., 1887, S. 41.

[12] См., например, упомянутые выше книги Л. И. Мандельштама, Э. Т. Уиттекера, В. Паули, Р. Дюга.

[13] См. ссылки, указанные в примеч. 10.

[14] См. книгу Э. Т. Уиттекера и работы Ч. Скрибнера и Д. Холтона, указанные в примеч. 10.

[15] См. книги В. Паули, Э. Т. Уиттекера.

[16] Детальный анализ работ Умова, Пойнтинга, Ми, Хевисайда, Вина, Герца о локализации и движении энергии содержится в работе: *Д. Д. Гуло.* Из истории учения о движении энергии. В сб. «История и методология естественных наук», физика, в. 11, Изд. МГУ, 1963.

[17] См. упомянутую выше книгу В. Паули, а также: *H. A. Lorentz.* Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Encyklopädie der math. Wissenschaften, 14, 1903.

[18] *А. Эйнштейн.* Закон сохранения движения центра тяжести и инерция энергии. Собр. науч. трудов. Т. 1 М., «Наука», 1965.

[19] Подробное изложение можно найти в книге: *Л. С. Полак.* Вариационные принципы механики. М., Физматгиз, 1960.

[20] Там же.

[21] Следует заметить, однако, что релятивистски-инвариантный принцип действия был сформулирован Шварцшильдом еще в 1903 г. (см., например, упомянутую книгу Л. С. Полака).

[22] *Ф. Клейн.* О геометрических основаниях лорентцевой группы. В сб. «Новые идеи в математике», № 5. Принцип относительности в математике. СПб., 1914, с. 154.

[23] *F. Klein.* Vorlesungen über die Mathematik im 19. Jahrhundert, t. II, Berlin, Springer, 1927, S. 52.

[24] См. примеч. 10.

[25] См., например, работы Ч. Скрибнера, Д. Холтона, Кесвэни и др., указанные в примеч. 10.

[26] См. примеч. 25. Среди открывателей релятивизма М. Борн выделяет четырех: «Можно сказать, что специальная теория относительности не является трудом одного человека, она возникла в результате совместных усилий группы великих исследователей — Лоренца, Пуанкаре, Эйнштейна, Минковского». См. упомянутую выше (примеч. 10) книгу М. Борна, с. 408.

[27, 28, 29] Классические работы Лоренца, Пуанкаре, Эйнштейна собраны в сб. «Принцип относительности». Л., ОНТИ, 1935.

[30] *Ф. Клейн.* Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований (Эрлангенская программа). В сб. «Об основаниях геометрии». М., ГИТТЛ, 1956.

[31] *H. Minkowsky.* Das Relativitätsprinzip. Ann. d. Phys., 47, 1915, S. 927; *Г. Минковский.* Пространство и время. В сб. «Принцип относительности»; *H. Minkowsky.* Die Grundgleichungen für die electromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Gött. Nachr., 1908, S. 53; *Ф. Клейн.* О геометрических основаниях лорентцевой группы (см. примеч. 22).

[32] Более подробно о введении «Эрлангенской программы» в физику см.: *В. П. Визгин.* Введение «Эрлангенской программы» в физику. XIII Международный конгресс по истории науки. Тезисы докладов. М., «Наука», 1971.

[33] *H. Minkowsky.* Das Relativitätsprinzip. См. примеч. 31, S. 928.

[34] Там же, S. 928.

[35] *Ф. Клейн.* См. примеч. 31, S. 170.

[36] Там же, S. 170.

[37] Клейн в своем докладе подчеркивал, что развитая им схема — естественное продолжение идей Минковского, который, «без сомнения, для себя вполне продумал эти вещи». *Ф. Клейн.* О геометрических основаниях лорентцевой группы, с. 172. Об эвристическом значении введения Эрлангенской программы в физику — см. примеч. 32.

[38] См. примеч. 6 к введению.

[39] Детальное описание $\mathcal{P}$-группы содержится, например, в работах: *И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро.* Представления группы вращения и группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958; *Г. А. Зайцев.* О связи теории относительности с теорией групп. В кн.: *М.-А. Тоннела.* Основы

электромагнетизма и теории относительности. М., ИЛ, 1962; *М. Хамермеш.* Теория групп и ее применение к физическим проблемам. М., «Мир», 1966; *Р. Стритер, А. С. Вайтман.* РСТ, спин и статистика и все такое. М., «Наука», 1966. Описание $\mathcal{G}$-группы — см. названные здесь работы М. Хамермеша, Г. А. Зайцева, а также: *J. M. Levi-Leblond.* Galilei group and non-relativistic quantum mechanics. J. Math. Phys., 4, 1963, p. 776. *Ф. Кемпфер.* Основные положения квантовой механики. М., «Мир», 1967.

40 Необходимые определения и факты теории групп Ли можно найти в упомянутой книге М. Хамермеша, а также: *Г. Я. Любарский.* Теория групп и ее применение в физике. М., ГИТТЛ, 1957; *Ф. Гюрши.* Введение в теорию групп. В сб. «Теория групп и элементарные частицы». М., «Мир», 1967.

41 См. примеч. 39.

42 Законы сохранения в $\mathcal{P}$-инвариантных теориях подробно описаны в ряде книг по теории относительности. Наиболее полезны в этом отношении названные выше книги В. Паули, Э. Т. Уиттекера; работы Эйнштейна, напечатанные в первом томе Собрания научных трудов, «Фейнмановские лекции по физике». М., «Мир», 1965, в. 6; *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теория поля. М., Физматгиз, 1960; *Н. Möller.* Theory of relativity. Oxford, 1952; *H. Weyl.* Space — Time — Matter. N. Y., Dover. Publication, 1952.

43 См. упомянутые выше книги Л. С. Полака, В. Паули, Г. Вейля.

44 См. примеч. 21.

45 *F. Engel.* Über die 10 allgemeinen Integralen der klassischen Mechanik. Gött. Nachr., 1916, S. 270.

46 См. стр. 54 настоящей работы.

47 *G. Herglotz.* Über die Mechanik des deformierbaren Körpers vom Standpunkte der Relativitätstheorie. Ann. d. Phys., 36, 1911, S. 493.

48 Статья Герглотца была опубликована в журнале «Annalen der Physik», в котором печатались классические статьи Эйнштейна, Планка, Лауэ и других выдающихся физиков по теории относительности. Она была, по существу говоря, первой систематической работой по релятивистской механике сплошной среды; не случайно поэтому В. Паули в своей энциклопедической статье (см. упомянутую выше книгу В. Паули,— примеч. 10) уделил работе Герглотца почти целый параграф.

49 Об этом можно судить по статье Энгеля, точнее, по письму Энгеля Клейну (см. примеч. 45), см. также эпиграф к этой главе.

50 *F. Engel.* Цит. статья.

51 См. стр. 78 настоящей работы.

52 См. примеч. 47.

53 *В. Паули.* Теория относительности, с. 191.

54 Там же, с. 191—192.

55 Там же, с. 192.

56 *Ф. Нетер* — известный немецкий физик-теоретик, брат Э. Нетер, см. с. 179 настоящей работы.

57 *В. Паули.* Цит. соч., с. 192.

58 Там же, с. 192.

59 Там же, с. 193.

60 См., например, *E. Hellinger.* Die Allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua. Encykl. der math. Wiss., IV, Leipzig, Teubner, 1914.

61 Или A_{ij}, которые однозначно выражаются через a_{ij}.

62 $$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} P_{\alpha\beta}\, d\xi_\alpha d\xi_\beta \quad \text{и} \quad ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} e_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta.$$

63 О лагранжевом и эйлеровом представлении в механике сплошной среды — см., например, *Н. Е. Кочин.* Теоретическая гидромеханика. М.— Л., ГОНТИ, 1938.

64 Возможность этой процедуры основывалась на том, что $\mathcal{G}$-группа, особенно после работ Минковского и Клейна (см. примеч. 31), могла рассматриваться как предельный случай $\mathcal{P}$-группы при $c \to \infty$.

65 См., например, *В. Паули.* Цит. соч., с. 192.

66 *В. Паули.* Цит. соч., с. 191—193.

67 *Г. Герглотц,* род. в 1881 г., приват-доцент Геттингенского уни-

верситета с 1904 г.; в 1903—1904 гг. публикует две работы по электродинамике (см. цитир. выше книгу В. Паули). В 1905—1906 гг. он выполняет несколько работ по теории рядов и алгебраических кривых. Начиная с 1908 г. он публикует серию работ по релятивистской электродинамике, релятивистской теории твердого тела и релятивистской механике. Впоследствии под влиянием общей теории относительности Герглотц выполняет несколько интересных работ по римановой геометрии (см. цитир. выше книгу В. Паули).

68 Помимо Клейна, Гильберта, Минковского, в Геттингене в начале XX в. работали такие исследователи, как К. Шварцшильд, А. Зоммерфельд, М. Борн, Р. Курант, Г. Вейль и др., в творчестве которых новейшие разделы математики сочетались с разработкой наиболее актуальных и принципиальных проблем теоретической физики.

69 Работа Герглотца была хорошо известна (см. примеч. 48), но никто до Ф. Клейна не обратил внимание на установленную Герглотцем взаимосвязь.

70 См. гл. II.

71 *Ф. Клейн.* «Эрлангенская программа». См. примеч. 30, с. 429.

72 См. эпиграф к настоящей главе.

73 *Ф. Клейн.* «Эрлангенская программа», с. 428.

74 *Р. Фейнман.* Развитие пространственно-временной трактовки квантовой электродинамики. Нобелевская лекция. УФН, 91, 1967, с. 37.

75 *F. Klein.* Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, t. II. Berlin, Springer, 1927.

76 Там же, предисловие.

77 *E. Bessel-Hagen.* Über die Erhaltungssätze der Electrodynamik. Math. Ann., 84, 1921, S. 259.

78 Там же, S. 259.

79 См. примеч. 58 к гл. II.

80 См. примеч. 38 к гл. II.

81 См. стр. 47 настоящей работы.

82 *F. Klein.* См. примеч. 75, с. 58.

83 См. стр. 90 настоящей работы.

84 *F. Klein.* Цит. соч.

85 *Ф. Клейн.* См. примеч. 22.

86 *F. Klein.* Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. I, Berlin, Springer, 1921, Abh. XXXI—XXXIII.

87 *F. Klein.* См. примеч. 75.

88 См. стр. 31 настоящей работы.

89 Закону сохранения энергии и его истории развития посвящена обширная историко-научная литература. См., например, *М. Планк.* Закон сохранения энергии. М.— Л., ГОНТИ, 1938; *T. Kuhn.* Energy conservation as an example of simultaneous discovery. «Critical problems in the history of science». Ed. *M. Clagett.* London, 1959; *N. Rentschler.* Die Erhaltungssätze der Physik. Phys. Bl., 22, N 5, 1966.

90 См. литературу, указанную в примеч. 89.

91 *В. Паули.* Цит. соч.; *Р. Фейнман, Р. Лэйтон, М. Сэндс.* Фейнмановские лекции по физике. М., «Мир», вып. 6, 1966.

92 *К. Форд.* Мир элементарных частиц. М., «Мир», 1965.

93 Работы Ф. Клейна, Д. Гильберта, Э. Нетер, Г. А. Лоренца, Г. Вейля, Фоккера, Э. Шредингера и др. по общей теории относительности; точные ссылки можно найти в цитируемой книге В. Паули и книге Г. Вейля (см. примеч. 42). См. также: *А. З. Петров.* Понятие энергии в общей теории относительности. В сб. «Гравитация и теория относительности». Изд. Казан. ун-та, 1963.

94 См., например, *H. H. Wubing.* Die Entstehungsgeschichte der sogenannten «Erlangen Programm». Math. in d. Schule, 1, 1967.

95 См., например, *A. Sommerfeld.* Klein, Riemann und die Mathematische Physik. Naturwiss., N 17, 1919; *H. Weyl.* F. Kleins Stellung in der mathematische Gegenwart. Naturwiss., 18, 1930, S. 4.

96 *A. Sommerfeld.* Цит. соч., S. 301.

97 Там же.

98 *F. Klein.* Gesammelte mathematische Abhandlungen. Bd. I, Springer, 1921, Abh. XXIX—XXXIII.

99 *F. Klein.* Zur Schraubentheorie von Sir R. Ball (см. примеч. 98, Abh. XXIX).

[100] См. примеч. 22.

[101] *F. Klein*. См. примеч. 98, Abh. XXXI—XXXIII.

[102] См. *В. П. Визгин*. Эрлангенский подход к истории физики. Труды X и XI научных конференций аспирантов и младших научных сотрудников Института истории естествознания и техники АН СССР. М., 1968.

[103] *Н. Н. Парфентьев*. Научный очерк работ Ф. Клейна. Изв. физ.-матем. общ-ва при Казан. ун-те, 25, серия 2, 1925, с. 33.

[104] *S. Lie, F. Engel*. Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig, Teubner, 1930.

[105] См., например, *J. M. Poggendorf*. Biografische-literarische Handwörterbuch für Mathematik, Physik, Astronomie, Chemie und verwandte Wissenschaftsgebiete. Bd. V, VI, VII, Leipzig — Berlin, 1926—1958.

[106] *S. Lie*. См. примеч. 105 к гл. II.

[107] Первая статья — см. примеч. 45, вторая статья: *F. Engel*. Nochmals die allgemeinen Integralen der klassischen Mechanik. Gött. Nachr. 1917, S. 189, была непосредственным продолжением первой и так же, как и первая, была ответным письмом Ф. Клейну. В этой работе на основе лиевской методики, развитой в первой статье, исследуется вопрос о группе подобия:

$$x' = \lambda^2 x, \quad y' = \lambda^2 y, \quad z' = \lambda^2 z, \quad t' = \lambda^3 t,$$

которую допускает задача n тел. Весьма громоздкий анализ приводит к выводу, что эта симметрия не дает нового интеграла и не приводит к упрощению проблемы интегрирования уравнений задачи. Значительно более простой анализ, основанный на лагранжевом формализме, показывает, что интеграл действия задачи неинвариантен относительно этой группы, и потому теорема Нетер неприменима. Аналогичная симметрия давала бы инвариантность действия, если бы силовая функция была обратно пропорциональна квадрату расстояния; тогда группа подобия имела бы вид

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y, \quad z' = \lambda z, \quad t' = \lambda^2 t.$$

В этом случае теорема Нетер приводила бы к одиннадцатому интегралу вида:

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \boldsymbol{p}_i - 2Et = \text{const}.$$

См., например, *Г. Л. Коткин* и *В. Г. Сербо*. Сборник задач по классической механике. М., Физматгиз, 1969, задача 4.13. Анализ этой проблемы на основе картановой теории интегральных инвариантов, которая позволяет сформулировать еще один, «картанов», вариант взаимосвязи симметрия — сохранение, содержится в книге: *Э. Картан*. Интегральные инварианты. М. — Л., ГИТТЛ, 1940. Мы не рассматривали этот метод и соответствующий вариант взаимосвязи, который был разработан уже после установления теорем Нетер (в 1920—1921 гг.) и имеет основное значение для классической механики.

[108] *R. Courant*. F. Klein. Naturwiss., 13, 1925, S. 765.

[109] *Н. Н. Парфентьев*. Научный очерк работ Ф. Клейна. Изв. физ.-матем. об-ва при Казан. ун-те, 25, серия 2, 1925, с. 31.

[110] Более того, если H и $\mathscr{L}$ (лагранжиан) не зависят от времени, то действие системы можно в соответствии с формализмом Энгеля переписать так:

$$S = \int \mathscr{L}\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{q_1'}{t'}, \ldots, \frac{q_n'}{t'}\right) t' \, d\tau,$$

где штрих означает производную по τ. Тогда время t является циклической переменной, и ей отвечает сохранение циклического импульса p:

$$p = \frac{\partial (\mathscr{L} t')}{\partial t'} = \mathscr{L} - \left(\sum \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{q_i'}{t'^2}\right) t' = \mathscr{L} - \sum_i p_i \dot{q}_i = -H = \text{const},$$

откуда следует, что $p = -H$. (См. *К. Ланцош.* Вариационные принципы механики. М., «Мир», 1965; там же содержится полезный анализ расширенного канонического формализма.)

[111] См. гл. II.
[112] См. гл. III.
[113] *F. Engel.* См. примеч. 45, с. 276.
[114] Там же, с. 276.

К главе V

[1] *Э. Нетер.* Инвариантные вариационные задачи. В сб. «Вариационные принципы механики». Ред. *Л. С. Полак.* М., ГИФМЛ, 1959, с. 611.
[2] *Д. Гильберт.* Основания физики. В сб. «Вариационные принципы механики», с. 589.
[3] *А. Эйнштейн.* Собр. науч. трудов, т. 1. М., «Наука», 1965, соч. 21.
[4] Эйнштейн использовал термины «материя», «материальная система» для обозначения всех физических объектов (частиц, полей и т. д.), кроме гравитационного поля.
[5] Детальное разъяснение этого вопроса содержится в работе: *D. Hilbert.* Grundlagen der Physik, II Mitteilung, Gött. Nachr, H. 1, 1917, S. 53.
[6] Здесь, как и повсюду в книге, мы используем обозначения авторов, в данном случае — Эйнштейна.
[7] *А. Эйнштейн.* См. примеч 3, с. 236.
[8] Термин «псевдотензор» был введен Эйнштейном.
[9] *А. Эйнштейн.* См. примеч. 3, соч. 24 и 28.
[10] *А. Эйнштейн.* См. примеч. 3, соч. 29.
[11] Имеется в виду конечная, или конечнопараметрическая группа Ли.
[12] *А. Эйнштейн.* См. примеч. 3, соч. 34.
[13] *А. Эйнштейн.* См. примеч. 3.
[14] Т. е. с условием обращения в нуль следа тензора $T_{\mu\nu} : \sum_{\mu} T_{\mu\mu} = 0$.
[15] *А. Эйнштейн.* См. примеч. 3.
[16] *А. Эйнштейн.* См. примеч. 3, соч. 35.
[17] См., например, *П. К. Рашевский.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М., «Наука», 1964.
[18] *Д. Гильберт.* См. примеч. 2.
[19] *А. Эйнштейн.* См. примеч. 3, соч. 38.
[20] *А. Эйнштейн.* См. примеч. 19, с. 460.
[21] Там же, с. 472, 484.
[22] *А. Эйнштейн.* См. примеч. 3, соч. 32, 34.
[23] *D. Hilbert.* Gesammelte Abhandlungen. Bd. III, Berlin, Springer, 1935, S. 262.
[23a] *F. Klein.* Gesammelte math. Abhandlungen. Bd. 1, Springer, 1921, S. 585.
[24] *Д. Гильберт.* См. примеч. 2.
[25] См., например, *В. Паули.* Теория относительности. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
[26] См., например, *Д. Гильберт.* Основания геометрии. М.— Л., Гостехиздат, 1948; *Д. Гильберт.* Математические проблемы. В сб. «Проблемы Гильберта». М., «Наука», 1969.
[27] *Д. Гильберт.* Математические проблемы (1900). В сб. «Проблемы Гильберта». Ред. *П. С. Александров.* М., «Наука», 1969.

Среди ряда глубоких замечаний Гильберта, сохранивших существенное методологическое значение и для современных исследований по аксиоматике физических теорий, одно является несомненно пророческим, тем более что оно было сделано за пять лет до открытия специальной теории относительности и за 15 лет до открытия общей теории относительности. Приведем его полностью: «Для того чтобы построение физических аксиом провести по образцу аксиом геометрии, следует попробовать сначала небольшим количеством аксиом охватить возможно более общий класс физических явлений, а затем присоединением каждой следующей аксиомы прийти к более специальным теориям, а тогда, возможно, возникнет принцип классификации, который сможет использовать глубокую теорию бесконечных групп преобразований Ли» (сб. «Проблемы Гильберта», стр. 35). Здесь явно намечен «эрлангенский» подход к физике, который после открытия теории относительности постепенно утвердился в физике XX в. в качестве основного (см. стр. 108 настоящей работы).

28 *D. Hilbert.* См. примеч. 23, S. 258.
29 О нелинейной теории поля Г. Ми — см. *G. Mie.* Grundlagen einen Theorie der Materie. Ann. d. Phys., 37, 1912, S. 511; а также: *В. Паули.* Теория относительности; *М.-А. Тоннела.* Основы электромагнетизма и теории относительности. М., ИЛ, 1962.
30 См. примеч. 29, а также: *H. Weyl.* Space — Time — Matter. N. Y., Dover Publ., 1952; *Л. С. Полак.* Вариационные принципы механики. М., Физматгиз, 1960.
31 *В. Паули.* Теория относительности, с. 278.
32 *D. Hilbert.* См. примеч. 23, S. 252.
33 *А. Эйнштейн.* См. примеч. 3, соч. 14, 17, 21, 22.
34 *А. Эйнштейн.* См. примеч. 3, соч. 34, 35, 37.
35 *Д. Гильберт.* См. примеч. 2.
36 По существу говоря, нетривиальный частный случай второй теоремы Нетер.
37 *Д. Гильберт.* См. примеч. 2, с. 589.
38 Там же, с. 590.
39 Там же, с. 590.
40 Там же, с. 590.
41 Там же, с. 590.
42 См. примеч. 36.
43 *Э. Нетер.* См. примеч. 1.
44 *Д. Гильберт.* См. примеч. 2, с. 590.
45 Там же, с. 591.
46 *А. Эйнштейн.* См. примеч. 19.
47 В этом отношении наиболее значительны его работы: *Э. Мах.* Механика. СПб., 1909; *Э. Мах.* Принцип сохранения работы. СПб., 1909.
48 На этот вывод Э. Маха, по-видимому, впервые обратил внимание В. Паули: *В. Паули.* Цит. соч., с. 233.
49 *Э. Мах.* Принцип сохранения работы. СПб., 1909, с. 42.
50 *D. Hilbert.* См. примеч. 5.
51 *А. Эйнштейн.* См. примеч. 19, с. 492.
52 *А. Эйнштейн.* См. примеч. 19.
53 Эти доказательства носят чисто вычислительный характер; *Д. Гильберт.* См. примеч. 2.
54 См., например, *В. Паули.* Цит. соч.
55 *D. Hilbert.* См. примеч. 5.
56 *D. Hilbert.* См. примеч. 23.
57 *D. Hilbert.* См. примеч. 23, S. 262.
58 *Д. Гильберт.* См. примеч. 2, с. 592.
59 *А. Эйнштейн.* См. примеч. 3, соч. 37.
60 В модернизированное издание «Оснований физики» (1924) Гильберт не включил материал, относящийся к «вектору энергии» e^l, заменив его более простым и общим формализмом, развитым Ф. Клейном и Э. Нетер в 1918 г.
61 *F. Klein.* См. примеч. 23а, Abh. XXXII. Эта работа Клейна подробно обсуждается на стр. 160—167 настоящей книги.
62 *F. Klein.* См. примеч. 23а, Abh. XXXI и XXXII.
63 *H. A. Lorentz.* On Einstein theory of gravitation, I—IV. Collected papers, 5. The Hague, Martinus Nijoff, 1937, p. 246—313.
64 *H. Weyl.* Zur Gravitationstheorie. Ann. d. Phys., 54, 1917, а также: *H. Weyl.* См. примеч. 30.
65 *F. Klein.* См. примеч. 62.
66 *Д. Гильберт.* См. примеч. 2, с. 598.
67 Там же, с. 598.
68 *D. Hilbert.* См. примеч. 60.
69 См., например, *В. Паули.* Цит. соч.
70 См., например, *Дж. Вебер.* Общая теория относительности и гравитационные волны. М., ИЛ, 1962; *М.-А. Тоннела.* Основы электромагнетизма и теории относительности. М., ИЛ, 1962.
71 *А. Эйнштейн.* См. примеч. 3, соч. 34.
72 *А. Эйнштейн.* См. примеч. 3, соч. 37.
73 *А. Эйнштейн.* См. примеч. 3, соч. 17, 21, 23, 28, 29.
74 *Ф. Клейн.* См. примеч. 23а, с. 568.
75 *Л. Инфельд.* Мои воспоминания об Эйнштейне. В сб. «Эйнштейн и современная физика». М., ГИТТЛ, 1956, с. 71.
76 *Л. Инфельд.* История развития

теории относительности. УФН, 57, 1955, с. 210.

77 *Б. В. Медведев, М. К. Поливанов.* Физический энциклопедический словарь. Т. 3. М., 1963, с. 426.

78 *F. Klein.* См. примеч. 23а, соч. XXXI.

79 Там же, соч. XXXII.

80 См. два предыдущих раздела этой главы.

81 Ее перевод имеется в ЖРФХО: *Г. А. Лорентц.* О принципе Гамильтона в эйнштейновской теории тяготения. ЖРФХО, 47, в. 8, 1915, с. 516.

82 *F. Klein.* См. примеч. 62, соч. XXXII.

83 *H. A. Lorentz.* См. примеч. 63.

84 *F. Klein.* См. примеч. 62, соч. XXXII.

85 См. первый раздел гл. VI настоящей книги.

86 *F. Klein.* См. примеч. 62, соч. XXXI.

87 Там же, с. 559.

88 Там же, с. 560.

89 См. стр. 119 настоящей работы.

90 Там же, соч. XXXI.

91 Там же, с. 553.

92 *Д. Гильберт.* См. примеч. 2.

93 *F. Klein.* См. примеч. 23а, с. 559.

94 Там же, с. 561.

95 Там же, с. 561.

96 Там же, с. 565.

97 Там же, с. 565.

98 Еще раз подчеркнем, что активно, хотя и неявно, в переписке принимала участие Э. Нетер, на результаты которой ссылались и Клейн, и Гильберт (см. стр. 155 настоящей работы).

99 К началу 1918 г. различные выражения для энергии-импульса и соответствующего закона сохранения были получены Эйнштейном, Гильбертом, Лоренцом, Вейлем и Клейном (см. примеч. 3, соч. 17, 21, 23, 28, 29, 32, 38, 42; примеч. 2; примеч. 63; примеч. 64; примеч. 86).

100 См. примеч. 61 и примеч. 1.

101 *F. Klein.* См. примеч. 23а, с. 568.

102 Доказательство того, что эти выражения являются инвариантами относительно $\mathscr{E}$-группы,— см. *Л. Д. Ландау* и *Е. М. Лифшиц.* Теория поля. М., Физматгиз, 1960, с. 295.

103 См. примеч. 99.

104 См. стр. 146 настоящей работы.

105 *F. Klein.* См. примеч. 23а, с. 585.

106 См. гл. VI настоящей работы.

107 *F. Klein.* См. примеч. 23а, с. 584.

108 См., например, *Л. де Бройль.* По тропам науки. М., ИЛ, 1962, с. 12, 18, 29—34.

109 *H. A. Lorentz.* Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Electronentheorie. Encyklopädie der math. Wissenschaften, V. 1, 4, 1903.

110 Ссылки на работы Лармора и Шварцшильда можно найти в книге: *Л. С. Полак.* Вариационные принципы механики. М., Физматгиз, 1960.

111 Обсуждение соответствующих работ Лоренца содержится в упомянутой книге Л. С. Полака.

112 См., например, *В. Паули.* Цит. соч.

113 *Л. де Бройль.* См. примеч. 108, с. 30—31.

114 *Г. А. Лоренц.* См. примеч. 81.

115 *H. A. Lorentz.* См. примеч. 63.

116 *F. Klein.* См. примеч. 23, с. 579.

117 Там же, с. 579.

118 *H. A. Lorentz.* См. примеч. 63.

119 Там же, с. 295.

120 См., например, *А. З. Петров.* Понятие энергии в общей теории относительности. Уч. зап. Казан. ун-та, 123, кн. 12. Казань, изд. Казан. ун-та, 1963.

121 *А. Эйнштейн.* См. примеч. 3, соч. 51.

122 См., например, *А. З. Петров* (примеч. 120) и *А. Эйнштейн* (примеч. 121, стр. 645).

123 *А. Эйнштейн.* См. примеч. 3, соч. 42.

124 Там же, с. 524.

125 Там же, соч. 38.

126 См., например. *И. М. Яглом.* Герман Вейль. М., «Знание», 1967.

127 *H. Weyl.* См. примеч. 64.

128 Там же, S. 117.

129 Там же, S. 122.

130 *H. Weyl.* Raum, Zeit, Materie. Berlin, Springer, 1918.

131 *H. Weyl.* Raum, Zeit, Materie. Berlin, Springer, 1921; см. также английский перевод этого издания (примеч. 30).

132 *А. Эйнштейн.* См. примеч. 3, соч. 51.

133 *А. З. Петров.* См. примеч. 120; а также: *В. Паули.* Цит. соч.

[134] Ссылки на работы Шредингера и Бауэра можно найти в книге В. Паули, цит. соч., статье А. З. Петрова, примеч. 120 и статье А. Эйнштейна, примеч. 3, соч. 51.

[135] *А. Эйнштейн.* См. примеч. 3, соч. 51, с. 651.

[136] Там же, с 651.

[137] *F. Klein.* См. примеч. 23а, Abh. XXXIII.

[138] Существует обширная современная литература, посвященная проблеме сохранения энергии-импульса в общей теории относительности; отметим наиболее интересные, на наш взгляд, работы, в которых можно найти многочисленные ссылки: *Д. Андерсон.* Принципы относительности и роль координат в физике. В сб. «Гравитация и относительность». Ред. *Х. Цзю* и *В. Гоффманн.* М., «Мир», 1965; *P. G. Bergmann.* Conservation laws in general relativity as the generators of coordinate transformations. Phys. Rev., 112, 1958; *J. X. Goldberg.* Conservation laws in general relativity. Phys. Rev., 111, 1958, p. 315; *А. Траутман.* Законы сохранения в общей теории относительности. «Эйнштейновский сборник, 1967». М., «Наука», 1967; *A. Trautman.* Foundations and current problems of general relativity. «Lectures on general relativity» (Brandeis Summer Institute, 1964). Prentice-Hall, 1965; *А. Траутман.* Общая теория относительности. УФН, 89 (1966), с. 3; сб. «Новейшие проблемы гравитации», ред. *Д. Д. Иваненко.* М., ИЛ, 1961; сб. «Гравитация и топология», ред. *Д. Д. Иваненко.* М., «Мир», 1966 (особенно две статьи Х. Мёллера); *E. Schmutzer.* Relativistische Physik. Leipzig, Teubner, 1968; *Н. В. Мицкевич.* Физические поля в общей теории относительности. М., «Наука», 1969.

[139] См., например, работы А. Траутмана (примеч. 138).

[140] Строгое доказательство «утверждения Гильберта» было дано Э. Нетер (см. примеч. 1; см. также с. 195 настоящей работы).

К главе VI

[1] *П. С. Александров.* Памяти Э. Нетер. УМН, в. 2, 1936, 257.

[2] *П. С. Александров.* См. примеч. 1; *H. Weyl.* E. Noether. Scripta mathematica, VIII, N 3, 1935; *B. L. Van der Waerden.* Nachruf auf E. Noether. Math. Ann., 111, 1935, S. 469.

[3] *H. Weyl.* См. примеч. 2.

[4] Ф. Клейн сам был учеником Клебша, хотя идейно ему был ближе Б. Риман. В 1875 г. Клейн покинул Эрланген.

[5] Биография П. Гордана написана М. Нетером и опубликована в Math. Ann., Bd. 75, 1914.

[6] *Ф. Клейн.* Лекции о развитии математики в XIX веке, ч. 1. М.— Л., ОНТИ, 1937, с. 352.

[7] Там же, с. 352.

[8] *H. Weyl.* См. примеч. 2.

[9] *H. Weyl.* См. примеч. 2; *Ф. Клейн.* См. примеч. 6.

[10] *Г. Вейль.* Классические группы, их инварианты и представления. М., ИЛ, 1947, с. 46.

[11] *H. Weyl.* См. примеч. 2; *Ф. Клейн.* См. примеч. 6, с. 379.

[12] *Ф. Клейн.* См. примеч. 6, с. 379.

[13] *H. Weyl.* См. примеч. 2; *H. Weyl.* Philosofy of mathematics and natural sciences. Princeton, Univ. Press, 1949.

[14] *H. Weyl.* См. примеч. 2.

[15] *H. Weyl.* См. примеч. 2.

[16] *H. Weyl.* См. примеч. 2; *B. L. Van der Waerden.* См. прим. 2.

[17] *I. C. Poggendorff.* Biographische-literarische Handwörterbuch für Mathematik, Astronomie, Physik, Chemie und verwandte Wissenschaftsgebiete. Bd. V, VI, VIIa. Leipzig, 1926—1958.

[18] *Д. Гильберт.* Основания физики (1915). В сб. «Вариационные принципы механики». М., Физматгиз, 1959, см. гл. V.

[19] *Э. Нетер.* Инварианты любых дифференциальных выражений (1918). В сб. «Вариационные принципы механики». М., Физматгиз, 1959.

[20] См., например, *О. Веблен.* Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М., ИЛ, 1948. *О. Веблен* и *Дж. Уайтхед.*

Основания дифференциальной геометрии. М., ИЛ, 1949.

21 *Э. Нетер.* Инвариантные вариационные задачи. В сб. «Вариационные принципы механики». М., Физматгиз, 1959, с. 611.

22 *F. Klein.* Über die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinischen Gravitationstheorie (1918). Gesammelte mathematische Abhandlungen. Bd. I, Berlin, Springer, 1921, S. 584.

23 См. гл. IV настоящей книги.

24 *П. С. Александров.* См. примеч. 2, с. 258.

25 *П. С. Александров.* См. примеч. 2, с. 262.

26 «Idealtheorie in Ringbereichen». Mathem. Ann., 83, 1921, S. 24. Понятие идеала для кольца аналогично понятию нормального делителя для групп.

27 *П. С. Александров.* См. примеч. 2, с. 262.

28 Цитируется по книге: *А. Дальма.* Эварист Галуа, революционер и математик. М., Физматгиз, 1960, с. 98.

29 *П. С. Александров.* См. примеч. 2, с. 262.

30 *П. С. Александров*; *H. Weyl*; *B. L. Van der Waerden.* См. примеч. 2.

31 *B. L. Van der Waerden.* См. примеч. 2, S. 471.

32 *Н. Бурбаки.* Очерки по истории математики. М., ИЛ, 1963.

33 *Б. Л. Ван дер Варден.* Современная алгебра. Ч. I. М. — Л., ГТТИ, 1934.

34 *П. С. Александров.* См. примеч. 2, с. 257.

35 Там же, с. 258.

36 Там же, с. 460.

37 Там же, с. 461.

38 *Э. Нетер.* См. примеч. 21, с. 611.

39 *Э. Нетер.* См. примеч. 21.

40 См. предыдущий раздел этой главы, а также гл. V настоящей работы.

41 См. гл. IV настоящей работы.

42 См. гл. V настоящей работы.

43 Об этом можно судить по переписке Ф. Клейна и Д. Гильберта, опубликованной в «Собрании математических сочинений Клейна» (см. гл. V настоящей работы).

44 См. гл. IV настоящей работы.

45 *F. Klein.* Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, t. 2. Berlin, Springer, 1927, S. 56.

46 См., например, *Д. Гильберт.* Основания физики (1915). В сб. «Вариационные принципы механики». М., Физматгиз, 1959, с. 598: «Таким путем мы приближаемся к возможности превратить в принципе физику в науку, подобную геометрии, которая составляет несомненно прекраснейший образец аксиоматического метода, пользующегося в данном случае услугами мощных инструментов математического анализа, а именно вариационного исчисления и теории инвариантов».

47 *Д. Гильберт.* См. примеч. 18.

48 *Э. Нетер.* См. примеч. 21, с. 611.

49 Там же, с. 611.

50 Там же, с. 611.

51 Там же, с. 613.

52 Современное изложение теории непрерывных групп, в частности групп Ли: *Л. С. Понтрягин.* Непрерывные группы. М., ГИТТЛ, 1954; *Ж. П. Серр.* Алгебры Ли и группы Ли. М., «Мир», 1969.

53 В ряде современных изложений теорем Нетер для вариаций Δu принято обозначение δu, а для вариаций δu — $\bar{\delta} u$ или $\delta^* u$.

54 Исключение тривиального случая, когда преобразования групп могут зависеть от $\partial u/\partial x$, может привести к нарушению группового характера преобразований, оставшихся после исключения.

55 *E. Bessel-Hagen.* Über die Erhaltungssätze der Electrodynamik. Math. Ann., 84, 1921, S. 258.

56 Там же, S. 261.

57 *Э. Нетер.* См. примеч. 21, с. 621.

58 Там же, с. 623.

59 *А. Эйнштейн.* Принцип Гамильтона и общая теория относительности. Собр. науч. трудов, т. I. М., «Наука», 1965, соч. 42.

60 *D. Hilbert.* Zur Hilberts erster Note über die Grundlagen der Physik; *F. Klein.* Gesammelte mathematische Abhandlungen. Bd. I. Berlin, Springer, 1921, S. 561.

61 *Э. Нетер.* См. примеч. 21, с. 628.

62 Там же, с. 628.

63 Там же, с. 630.

64 Там же, с. 611.
65 *F. Klein*. См. примеч. 22.
66 *F. Klein*. См. примеч. 60, S. 558.
67 См. гл. V настоящей работы.
68 См. гл. V настоящей работы.
69 См. гл. IV настоящей работы.
70 *Э. Нетер*. См. примеч. 21, § 5.
71 Там же, см. примеч. Э. Нетер на стр. 625 ее статьи.
72 Там же.
73 См. литературу, указанную в примечаниях к введению и главе VII.
74 См., например, *И. М. Гельфанд* и *С. Ф. Фомин*. Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961; *H. Rund*. The Hamilton-Jacoby theory in the calculus of variations. London, Van Nostrand. Comp., 1966.
75 *Р. Курант* и *Д. Гильберт*. Методы математической физики. Т. I. М.— Л., ГТТИ, 1933.
76 См. примеч. 74.
77 *Р. Курант* и *Д. Гильберт*. См. примеч. 75, с. 187.
78 *E. Bessel-Hagen*. См. примеч. 55.
79 См., например, *Н. Н. Боголюбов* и *Д. В. Ширков*. Введение в теорию квантованных полей. М. ГТТИ, 1957.
80 *E. Bessel-Hagen*. См. примеч. 55, S. 258.
81 Группа конформных преобразований пространства — времени — 15-параметрическая простая группа Ли 3-го ранга, содержащая $\mathcal{P}$-группу как подгруппу,— может быть определена как группа инвариантности уравнения «светового конуса»: $ds^2 = \sum_i dx_i^2 = 0$. Значение ее в физике определяется прежде всего тем, что она является группой инвариантности уравнений электромагнитного поля (Бэйтмэн, Коннингхэм, 1909) и, как было выяснено позже, вообще «безмассовых» полей. Некоторый материал об истории применений конформной группы в физике и современном состоянии вопроса можно найти в работах: *T. Fulton*, *F. Rohrlich*, *L. Witten*. Conformal invariance in physics. Revs. Mod. Phys., **34**, 1962, p. 442; *H. A. Kastrup*. Zur physykalische Deutung und darstellungstheoretische Analyse der Konformgruppe von Raum und Zeit. Ann. d. Phys., **9**, N 7—8, 1962, S. 288; *H. A. Kastrup*. Conformal group in space-time. Phys. Rev., **142**, 1966, p. 1060.
82 Помимо работ, указанных в примеч. 81, см., например, работы: *H. A. Kastrup*. Quantum mechanics as a broken symmetry. Nucl. Phys., B. 7, N 5, 1968, p. 574; *A. Wyler*. On the conformal group in the theory of relativity and their unitary representations. Arch. Ration. Mech. a. Anal., **31**, 1968, p. 35; *J. Rosen*. The conformal group and causatity. Ann. Phys. (USA), **47**, N 3, 1968, p. 468; *L. Castell*. The physical aspect of the conformal group SO_0 (4, 2). Nucl. Phys., B 4, 1968, p. 343; *D. Gross*, *J. Wess*. Scale invariance, conformal invariance and the high-energy behavior of scattering amplitudes. Phys. Rev., **2**, N 4, 1970, p. 753.
83 Действие классической механики инвариантно относительно галилеевских преобразований лишь с точностью до дивергенции; см., например, *Г. А. Коткин* и *В. Г. Сербо*. Сборник задач по классической механике. М., Физматгиз, 1969, задача № 4, 14.

К главе VII

1 *Е. П. Вигнер*. Симметрия и законы сохранения. УФН, **83**, № 4, 1964, с. 730.
2 *E. P. Wigner*. Die Erhaltungssätze der Quantenmechanik. Gött. Nachr., 375, 1927; *Е. П. Вигнер*. Теория групп и ее приложения к квантово-механической теории спектров. М., ИЛ, 1961; *H. Weyl*. Theory of groups and quantum mechanics. N. Y., Dover Publ., 1931; *П. Дирак*. Принципы квантовой механики. М., Физматгиз, 1960; *В. Паули*. Общие принципы волновой механики. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
3 *E. P. Wigner*. См. примеч. 2.
4 См., например: *P. Roman*. Theory of elementary particles. Amster-

dam, North-Holland, 1964; *Ч. Янг.* Законы сохранения четности и другие законы симметрии. УФН, 1958, **66**, с. 79; *Р. Маршак* и *Э. Судершан.* Введение в физику элементарных частиц. М., ИЛ, 1962; *G. C. Wick.* Group theory, invariance principles, symmetry. «High energy physics», Les Houches, 1965; *M. A. Melvin.* Elementary particles and symmetry principles. Revs. Mod. Phys., **32**, N 3, 1969.

[5] *E. P. Wigner.* Conservation laws in classical and quantum physics. Progr. Theor. Phys. (Kyoto), **11**, N 4—5, 1954; *Е. П. Вигнер.* Симметрия и законы сохранения. УФН, **83**, 1964, с. 729.

[6] *Дж. Макки.* Лекции по математическим основам квантовой механики. М., «Мир», 1965.

[7] См. примеч. 2.

[8] См. примеч. 2.

[9] См. примеч. 2, а также: *Б. Л. Ван дер Варден.* Принцип запрета и спин. В сб. «Теоретическая физика в XX веке». М., ИЛ, 1962.

[10] *И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Л. Шапиро.* Представления группы вращения и группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958; *М. А. Наймарк.* Линейные представления группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958.

[11] *W. Heisenberg, W. Pauli.* Quantendynamik der Wellenfelder, 1, Zs. f. Phys., **56**, 1929, S. 1.

[12] *M. A. Markoff.* Diracsche Theorie des Electrons. Phys. Zs. d. Sowjetunion, **10**, H. 6, 1936.

[13] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теория поля. М., Физматгиз, 1960; *В. Паули.* Релятивистская теория элементарных частиц. М.— Л., ИЛ, 1947. Ссылки на работы Белифанте, Розенфельда и некоторых других можно найти в работах: *E. L. Hill.* Hamilton's principle and conservation theorems of mathematical physics. Revs. Mod. Phys., **23**, 1951, p. 253; *U. E. Schröder.* Noether's theorem and conservation laws in classical field theory. Fortschritte d. Phys., **16**, 1968, p. 357.

[14] *Г. Вентцель.* Введение в квантовую теорию волновых полей. М.— Л., ГИТТЛ, 1947.

[15] *E. L. Hill.* См. примеч. 13.

[16] *Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов.* Классическая теория поля. М. — Л., ГИТТЛ, 1949; *Н. Н. Боголюбов* и *Д. В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. М., ГИТТЛ, 1957.

[17] *С. Швебер.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., ИЛ, 1963; *P. Roman.* См. примеч. 4; *M. Fierz.* Einführung in die relativistische Quantenfeldstheorie und Elementarteilchen. Anhang I, Zürich, 1965

[18] *H. Weyl.* Geometrie und Physik. Naturwiss., 19, 1931, S. 49. *H. Weyl.* Electron und Gravitation. Zs. f. Phys., **36**, 1929, S. 330.

[19] См. примеч. 18, а также: *H. Weyl.* Theory of groups and quantum mechanics. N. Y. Dover. Publ., 1931; *В. Паули.* Теория относительности. М.— Л., Гостехиздат, 1947.

[20, 21] См. примеч. 18 и 19.

[22] *В. Паули.* См. примеч. 13.

[23] *E. P. Wigner.* On the law of conservation of heavy particles. Proc. Natl. Acad. Sci. (USA), 38, N 5, 1952; *Е. П. Вигнер.* События, законы природы и принципы инвариантности. УФН, 85, 727, 1965.

[24] Ссылки можно найти в работах: *Р. Маршак, Э. Сударшан.* Введение в физику элементарных частиц. М., ИЛ, 1962; *P. Roman.* См. примеч. 4.

[25] См., например, сб. «Элементарные частицы и компенсирующие поля». М., «Мир», 1964.

[26] *Р. Маршак, С. Окубо.* К единой полевой теории элементарных частиц. УФН, 86, 1963, с. 650; *M. A. Melvin.* См. примеч. 4; сб. «Теория групп и элементарные частицы». Ред. *Д. Д. Иваненко.* М., «Мир», 1967; *Нгуен Ван Хьеу.* Лекции по теории унитарной симметрии элементарных частиц. М., Атомиздат, 1967.

[27] См. примеч. 25.

[28] *В. Гейзенберг.* Нелинейные проблемы в физике. УФН, **94**, в. 1, 1968, с. 155.

[29] *E. Hölder.* Mathematische Untersuchungen zur Himmelsmechanik. Math. Zs., 31, 1930, S. 198.

[30] *А. Уинтнер.* Аналитические основы небесной механики. М., «Наука», 1967.

[31] *Г. Д. Биркгоф.* Гидродинамика. М., ИЛ, 1963.

[32] *Л. В. Овсянников.* Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск, СО АН СССР, 1966.

[33] *Л. И. Седов.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред. УМН, 20, 1965, с. 121.

[34] *А. В. Соколов, В. П. Широковский.* Метод теории групп в квантовой физике твердого тела. УФН, 60, 1956, с. 717; *Г. Л. Любарский.* Теория групп и ее применение в физике. М., ГИТТЛ, 1957.

[35] *А. Эйнштейн.* Закон сохранения энергии в общей теории относительности. Собр. науч. трудов, т. I, соч. 51. М., «Наука», 1965; *В. Паули.* См. примеч. 19; *А. З. Петров.* Понятие энергии в общей теории относительности. Уч. зап. Казан. ун-та, 123, кн. 12, 1963.

[36] См., например, *А. Эйнштейн* (примеч. 35); *А. З. Петров* (примеч. 35).

[37] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* См. примеч. 13.

[38] *J. X. Goldberg.* Conservation laws in general relativity. Phys. Rev., 111, 1958, p. 315; *P. G. Bergmann.* Conservation laws in general relativity as the generators of coordinate transformations. Phys. Rev., 112, N 1, 1958.

[39] См. конец гл. V настоящей работы.

[40] *Дж. Андерсон.* Принципы относительности и роль координат в физике. В сб. «Гравитация и относительность». М., «Мир», 1965; *А. Траутман.* Общая теория относительности. УФН, 89, 1966, с. 1; *А. Траутман.* Законы сохранения в общей теории относительности. В «Эйнштейновском сборнике, 1967». М., «Наука», 1967; *A. Trautman.* Foundations and current problems of general relativity. Lectures on general relativity. Prentice-Hall, 1965.

[41] *T. Dass.* Conservation laws and symmetries, 1. Phys. Rev., 145, N 4, 1966; *T. Dass.* Conservation laws and symmetries, 2, Phys. Rev., 150, N 4, 1966; а также *D. Horn.* Conserved vector currents and invariant properties in lagrangian field theory. Ann. Phys. (USA), 32, 1965, p. 444; *U. E. Schröder.* См. примеч. 13.

[42] *E. P. Wigner.* Conservation laws in classical and quantum physics. Progr. Theor. Phys. (Kyoto), 11, N 4—5, 1954; *Е. П. Вигнер.* События, законы природы и принципы инвариантности. УФН, 85, 1965, стр. 727; *Е. П. Вигнер.* Симметрия и законы сохранения. УФН, 83, 1964, с. 729. *E. P. Wigner, H. Van Dam, R. M. Hautappel.* The conceptual basis and use of the geometric invariance principles. Revs. Mod. Phys., 37, 1965, p. 595.

[43] *H. H. Denman.* Invariance and conservation laws in classical mechanics. J. Math. Phys., 6, 1965, p. 1611; J. Math. Phys., 7, 1966, p. 1910.

[44] *К. Нишиджима.* Слабые взаимодействия при высоких энергиях. УФН, 86, в. 4, 1965.

[45] *Б. В. Медведев.* К аксиоматическому построению матрицы рассеяния, 4. Лагранжев формализм. ЖЭТФ, 49, 1965, с. 1518.

[46] См., например, примеч. 25, а также *Г. А. Соколик.* Групповые методы в теории элементарных частиц. М., Атомиздат, 1965; *Г. А. Соколик, Н. П. Коноплева.* Инвариантность и теория элементарных частиц. В сб. «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц». М., Атомиздат», 1966.

[47] *Р. Маршак, С. Окубо.* См. примеч. 26; *Е. П. Вигнер.* Симметрия и законы сохранения. См. примеч. 42; *Г. А. Соколик.* См. примеч. 46.

[48] См. примеч. 18 и 19.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Основные классические работы о взаимосвязи симметрия — сохранение (1703—1924 гг.)

Примерно треть перечисленных ниже работ переведена на русский язык и большей частью опубликована в следующих двух изданиях: I. Вариационные принципы механики. Сборник статей. Ред. *Л. С. Полак*. М., Физматгиз, 1959; II. *А. Эйнштейн*. Собр. науч. трудов, т. 1. М., «Наука», 1967.

1. (1703). *Ch. Huygens.* De motu corporum ex percussione. Christiani Hugenii opuscula postuma. Lugduni Batavorum, 1703; русск. перев.: *Х. Гюйгенс.* О движении тел под влиянием удара; в сб.: *Х. Гюйгенс.* Три мемуара по механике. М., Изд-во АН СССР, 1951.
2. (1760—1761). *J.-L. Lagrange.* Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution des différents problèmes de dynamique. Oeuvres, **1**, Paris, 1867, p. 365—468; перев. в (I)
3. (1777). *J.-L. Lagrange.* Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent mutuellement en raison inverse des carres des distances. Oeuvres, **1**, p. 401.
4. (1788). *J.-L. Lagrange.* Méchanique analytique. Desaint. Paris, 1788; русск. перев.: *Ж. Лагранж.* Аналитическая механика. Т. 1—2. М. — Л., Гостехиздат, 1950.
5. (1834). *W. R. Hamilton.* On a general method in dynamics. Mathematical papers, **2**. Cambridge, 1940, p. 103—162; перев. в (I).
6. (1835). *W. R. Hamilton.* Second essay on a general method in dynamics. Mathematical papers, **2**. Cambridge, 1940, p. 162—212; перев. в (I).
7. (1836). *М. В. Остроградский.* Лекции по аналитической механике. Собрание соч. Т. **1**, ч. 2. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1946.
8. *C. G. J. Jacobi.* Vorlesungen über Dynamik. Berlin, 1866; русск. перев.: *К. Г. Якоби.* Лекции по динамике. М.— Л., ОНТИ, 1936.
9. (1872). *S. Lie.* Kurzes Resume mehrer neuer Theorien. Gesammelte Abhandlungen. Berlin — Oslo, Bd. 3, Abh. I.
10. (1874). *S. Lie.* Bergründung einer Invarianttheorie der Berührungstransformationen. Gesammelte Abhandlungen, Bd. 4, Abh. I.
11. (1875). *S. Lie.* Diskussion allen Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Gesammelte Abhandlungen, Bd. 3, Abh. XVI.
12. (1875). *S. Lie.* Die Störungstheorie und die Berrührungstransformationen. Gesammelte Abhandlungen, Bd. 3; перев. в (I).
13. (1878). *V. Cerruti.* Nuova teorema generale di meccanica. Accad. Lincei Atti, **2**, 1878, p. 1.
14. (1888). *S. Lie.* Zur Theorie der Berührungstransformationen. Gesammelte Abhandlungen, Bd. 4, Abh. IV.
15. (1895) *А. П. Котельников.* Винтовое счисление и некоторые его приложения к геометрии и

механике. Уч. зап. Казан. ун-та. Казань, 1895.
16. (1897). *I. Schütz.* Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie. Gött. Nachr., H. 2, 1897, S. 110.
17. (1904). *G. Hamel.* Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik. Zs. für Math. Phys., Bd. 50, 1904, S. 1.
18. (1904). *G. Hamel.* Über die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik. Math. Ann., 59, 1904, S. 3.
19. (1911). *G. Herglotz.* Über die Mechanik des deformierbaren Körpers vom Standpunkte der Relativität. Ann. Phys., Bd. 36, 1911, S. 493.
20. (1913). *A. Einstein, M. Grossman.* Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und Theorie der Gravitation. Zs. f., Math. Phys., 62, 1913, S. 225; перев. в (II).
21. (1915). *D. Hilbert.* Grundlagen der Physik. Gött. Nachr., H. 3, 1915, S. 395; перев в (I).
22. (1916). *F. Engel.* Über die zehn allgemeinen Integralen der klassischen Mechanik, Gött. Nachr., H. 2, 1916, S. 270.
23. (1916). *H. A. Lorentz.* On Einstein theory of gravitation, I—III. Collected papers, 5, The Hague, M. Nijoff, 1937.
24. (1916). *A. Einstein.* Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. d. Phys., Bd. 49, 1916, S. 769; перев. в (II).
25. (1916). *A. Einstein.* Das hamiltonisches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie. Sitzber. preuss. Akad. Wiss., 2, 1916, S. 111; перев. в (II).
26. (1917). *F. Klein.* Seminarvorträge über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert (машинописная копия лекций, читанных в 1915—1917 гг.; в 1927 г. лекции были изданы в виде отдельной книги: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, t. 2. Berlin, Springer, 1927.
27. (1917). *F. Engel.* Nochmals über die allgemeinen Integralen der klassischen Mechanik. Gött. Nachr., 1917, S. 189.
28. (1917). *H. A. Lorentz.* On Einstein theory of gravitation, IV, Collected papers, 5.
29. (1917). *D. Hilbert.* Die Grundlagen der Physik. II Mitteilung. Gött. Nachr., 1917, S. 53.
30. (1917). *F. Klein, D. Hilbert.* Zur Hilberts Note über die Grundlagen der Physik; *F. Klein.* Gesammelte math. Abhandlungen. Bd. I. Berlin, Springer, 1921 (два письма Клейна Гильберту и одно Клейну от Гильберта).
31. (1917). *H. Weyl.* Zur Gravitationstheorie. Ann. d. Phys., 54, 117, 1917, S. 117.
32. (1918). *A. Einstein.* Der Energiesatz in der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzber. Preuss. Akad. Wiss., 1, 1918, S. 448; перев. в (II).
33. (1918). *F. Klein.* Über die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinischen Gravitationstheorie. Ges. Math. Abh. Bd. I, Abh. 32.
34. (1918). *H. Weyl.* Raum, Zeit, Materie. Berlin, Springer, 1918.
35. (1918). *E. Noether.* Invariante Variationsprobleme. Gött. Nachr., H. 2, 1918, S. 235; перев. в (I).
36. (1921). *E. Bessel-Hagen.* Über die Erhaltungssätze der Electrodynamik. Math. Ann., Bd 84, 1921, S. 258.
37. (1921). *W. Pauli.* Relativitätstheorie. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. V, H. IV, 1921; русск. перев.: *В. Паули.* Теория относительности. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
38. (1921). *H. Weyl.* Raum, Zeit, Materie (4-te Ausgabe). Berlin, Springer, 1921.
39. (1922). *E. Cartan.* Leçons sur les invariants intégraux. Paris, 1922; русск. перев.: *Э. Картан.* Интегральные инварианты. М.— Л., ГИТТЛ, 1940.
40. (1924). *R. Courant, D. Hilbert.* Methoden der mathematischen Physik. Bd. I. Berlin, Springer, 1924; русск. перев.: *Р. Курант, Д. Гильберт.* Методы математической физики. Т. I. М.— Л., ГТТИ, 1933.
41. (1924). *D. Hilbert.* Die Grundlagen der Physik. Math. Ann., 92, 1924, S. 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Некоторые современные работы по теоремам Нетер (1951—1971 гг.)

1. (1951). *E. L. Hill.* Hamilton's principle and conservation theorems of mathematical physics. Revs. Mod. Phys., **23**, 1951, p. 253 (подробное обсуждение I теоремы в теории поля).
2. (1957). *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. М., ГИТТЛ, 1957 (I теорема, применение в теории поля).
3. (1960). *P. Roman.* Theory of elementary particles. Amsterdam, North-Holland, 1960 (I теорема в теории элементарных частиц).
4. (1961). *И. М. Гельфанд, С. В. Фомин.* Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961 (I теорема как теорема вариационного исчисления).
5. (1961). *S. Schweber.* An introduction to relativistic quantum flield theory. New York, Row, Peterson a. Co., 1961; русск. перев.: *С. Швебер.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., ИЛ, 1963 (I теорема в квантовой теории поля).
6. (1962). *A. Trautman.* Conservation laws in general relativity. In: Gravitation. Ed. *L. Witten*, 1962; русск. перев.: *А. Траутман.* Законы сохранения в общей теории относительности. «Эйнштейновский сборник, 1967». М., «Наука», 1967 (обе теоремы, применение в общей теории относительности — ОТО).
7. (1962). *P. Bergmann.* The special theory of relativity. Handbuch der Physik, Bd. IV Berlin, Springer, 1962 (обе теоремы, применение в теории поля и ОТО).
8. (1962). *W. R. Davis, G. H. Katzin.* Mechanical conservation laws and physical properties of groups of motions in flat and curved space-time. Amer. Journ. Phys., **30**, 1962, p. 750 (I теорема в терминах векторов Киллинга, применение в механике и теории относительности).
9. (1963). *Б. В. Медведев, М. К. Поливанов.* Нетер теорема. Физический энциклопедический словарь. Т. 3. М., «Советская энциклопедия», 1963.
10. (1964). «Элементарные частицы и компенсирующие поля». Сб. статей под ред. *Д. Д. Иваненко.* М., «Мир», 1964 (локально-инвариантное расширение I теоремы).
11. (1964). *J. L. Anderson.* Principles of relativity and the role of the coordinate in physics. In: «Gravitation and relativity». *Ed. H. Y. Chiu, W. F. Hoffmann.* New York — Amsterdam, Benjamin, 1964; русск. перев.: *Дж. Л. Андерсон.* Принципы относительности и роль координат в физике. В сб.: «Гравитация и относительность». М., «Мир», 1965 (принципы симметрии и теоремы Нетер, главным образом в ОТО).
12. (1964). *E. P. Wigner.* Symmetry and conservation laws. Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), **51**, N 5, 1964; русск. перев.: *Е. Вигнер.* Симметрия и законы сохранения. В сб.: *Е. Вигнер.* Этюды о симметрии. М., «Мир», 1971 (неформальное обсуждение проблемы взаимосвязи симметрия — сохранение в современной физике; см. также другие статьи этого сборника — № 1—5, 18, 20).
13. (1965). *E. P. Wigner, H. Van Dam, R. M. Hautappel.* The conceptual basis and use of the geometric invariance principles. Revs. Mod. Phys., **37**, 1965, p. 595 (значение и применение геометрических принципов симметрии, а также I теоремы и ее аналогов).
14. (1965). *P. Roman.* Advanced quantum theory. Amsterdam, North-Holland, 1965 (квантовые аналоги I теоремы, применение в квантовой теории поля).
15. (1965). *A. Trautman.* Foundations and current problems of

general relativity. Ch. 6. In: «Lectures on general relativity». Brandeis Summer Institute in theoretical physics, v. I. New-Jersey, Prentice-Hall, 1965 (обе теоремы и проблема сохранения энергии-импульса в ОТО).
16. (1965). *S. Albeverio.* Der Lagrangesche Formalismus in der klassische Feldtheorie. Anhang I zu: *M. Fierz.* Einführung in die Quantenfeldstheorie und die Physik der Elementarteilchen. München, 1965 (обе теоремы в теории поля).
17. (1965). *H. Denman.* Invariance and conservation laws in classical mechanics. Journ. Math. Phys., 6, 1965, p. 1611; 7, 1965, p. 1910 (невариационный аналог I теоремы в классической механике).
18. (1965). *R. Feynman.* The character of physical law. Cox a. Wyman LTD. London, 1965; русск. перев.: *Р. Фейнман.* Характер физических законов. М., «Мир», 1968 (I теорема «для пешеходов»).
19. (1965). *D. Horn.* Conserved vector currents and invariance properties in Lagrangian field theory. Ann. Phys. (USA), 32, 1965, p. 444 (вопросы обращения I теоремы, применение в квантовой теории поля).
20. (1965). *Л. И. Седов.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред. УМН, 20, 1965, с. 121 (применение I теоремы в механике сплошных сред).
21. (1966). *H. Rund.* The Hamilton-Jacobi theory in the calculus of variations. London, Van Nostrand, 1966 (I теорема в рамках вариационного исчисления).
22. (1966). *T. Boyer.* Derivation of conserved quantities from symmetry of the lagrangian field theory. Amer. Journ. Phys., 34 1966, p. 475 (I теорема, упрощение доказательства, применение в теории поля).
23. (1966). *T. Dass.* Conservation laws and symmetries I, II. Phys. Rev., 145, 1966, 1011; 150, N 4, 1966 (вопросы обращения I теоремы, применение в квантовой теории поля).
24. (1966). *А. Траутман.* Общая теория относительности. УФН, 89, 1966, с. 3 (применение нетеровских теорем в ОТО, симметрия и законы сохранения в ОТО).
25. (1967). *C. Oliveira, A. Vidad.* The second Noether theorem for local field theories. Notas de Fisica, XIII, N 2, 1967, p. 11 (обзор применения обеих теорем в теории поля и элементарных частиц).
26. (1967). *D. Williams.* Energie-momentum conservation implies translation invariance: some didactic remarks. Journ. Math. Phys., 8, N 9, 1967, p. 1807 (обращение квантового аналога I теоремы).
27. (1967). *T. Boyer.* Continuous symmetries and conserved currents. Ann. Phys. (USA), 42, N 3, 1967, p. 445 (обобщение I теоремы, смежные проблемы).
28. (1968). *J. R. Ray.* Covariant Noether identities in covariant field theory. Nuovo Cimento, A56, N 1, 1968, p. 189 (применение II теоремы в теории поля).
29. (1968). *U. E. Schröder.* Noether's theorem and conservation laws in classical field theories. Fortschr. Phys., 16, N 6, p. 357 (подробный обзор вопросов, связанных с I теоремой и ее применениями в теории поля).
30. (1968). *Ph. Pearle.* Construction of an invariance from a conservation laws, and vice versa, in classical mechanics. Journ. Math. Phys., 9, N 7, 1968, p. 1092 (вопросы обращения I теоремы в классической механике).
31. (1968). *E. Schmutzer.* Relativistische Physik. Leipzig, Teubner, 1968 (применения нетеровских теорем в ОТО).
32. (1968). *H. Gourdin.* Formalisme lagrangian et lois de symétrie. New York, Gordon and Breach, 1968 (I теорема в теории поля и классической механике).
33. *А. А. Богуш, Л. Г. Мороз.* Введение в теорию классических полей. Минск. «Наука и техника», 1968 (I теорема в теории поля).
34. (1968). *T. Dass.* Gauge invariance, broken symmetry and

field-current identities. Phys. Rev. Lett., **21**, N 4, 1968, p. 242 (новые применения нетеровских теорем в квантовой теории поля).
35. (1969). *Н. В. Мицкевич*. Физические поля в общей теории относительности. М., «Наука», 1969 (применения нетеровских теорем в ОТО).
36. (1969). *Н. Х. Ибрагимов.* Инвариантные вариационные задачи и законы сохранения (замечания к теореме Э. Нетер). Теор. и матем. физ., 1, № 3, 350, 1969 (обобщение I теоремы, вопросы ее обращения).
37. (1969). *И. В. Полубаринов.* Вариационный принцип и несохраняющиеся операторы. Теор. и матем. физ., **1**, № 1, 1969, с. 34 (применение I теоремы для определения несохраняющихся динамических переменных в квантовой теории поля).
38. (1970). *W. Davis*, *J. York.* Identities and conservation law generatos, resulting from general invariance properties of classical field theory. Nuovo Cimento, **B65**, N 1, 1970, p. 1 (обе теоремы в теории поля и ОТО, новые аспекты).
39. (1970). *W. Davis*, *M. Moss*, *J. York.* Conservation law in the general theory of relativity. Nuovo Cimento, **B65**, N 1, 1970, p. 19 (применение обеих теорем в ОТО).
40. (1970). *A. Komar.* The quantitative epistemological content of Bohr's correspondence principle. Syntese, 21, № 1, 1970, p. 83 (применение I теоремы для анализа принципа соответствия).
41. (1970). *D. Edelen.* Groups, conservation laws and the forgotten laws of balance. Nuovo Cimento, **B67**, N 1, 1970, p. 29 (применение I теоремы в геометризованных теориях поля).
42. (1970). *C. Palmeiri*, *B. Vitale.* On the inversion of Noether theorem in the Lagrangian formalism. Nuovo Cimento, **A66**, N 1, 1970, p. 299 (обобщение I теоремы, вопросы обращения).
43. (1970). *E. Candotti*, *C. Palmieri*, *B. Vitale.* On the inversion of Noether theorem in the Lagrangian formalism. Nuovo Cimento, **A70**, N 2, p. 233 (обобщение I теоремы, вопросы обращения I теоремы).
44. (1971). *B. F. Plybon.* New approach to the Noether theorem. Journ Math. Phys., **12**, N 1, 1971, p. 57 (обобщение обеих теорем, применение в теории поля и ОТО).

Наиболее полный и детальный обзор и обсуждение основных вопросов, связанных с теоремами Нетер (доказательство, применения, ссылки на более ранние работы), — см. 1, 16, 22, 29 — I теорема; 6, 7, 15, 24, 31 — обе теоремы, в частности II теорема.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Владимир Павлович Визгин

Развитие взаимосвязи принципов инвариантности с законами сохранения в классической физике

Утверждено к печати Институтом истории естествознания и техники Академии наук СССР

Редактор *В. А. Никифоровский*. Художник *Ю. П. Трапаков*
Художественный редактор *Н. Н. Власик*. Технический редактор *П. С. Кашина*

Сдано в набор 30/V 1972 г. Подписано к печати 26/X 1972 г. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага № 2.
Усл. печ. л. 15. Уч.-изд. л. 15,9. Тираж 3000. Т-12394. Тип. зак. 792. Цена 95 к.

Издательство «Наука». 103717 ГСП. Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». 121099. Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
142	13—14 св.	Эйпера	Эйлера
195	13 сн.	не мог	мог
225	20 сн. прав. столб.	Wubing	Wußing
232	14 св. лев. столб.	С. Ф. Фомин	С. В. Фомин