

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОРДЕНА ЛЕНИНА ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ А. Ф. ИОФЕ

ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

К 75-летию
члена-корреспондента АН СССР
Г. А. ГРИНБЕРГА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ЛЕНИНГРАД
1976

Ответственный редактор
академик В. М. ТУЧКЕВИЧ

В $\frac{20204-551}{055 (02)-76}$ 11-76

Издательство «Наука», 1976

ПРЕДИСЛОВИЕ

Выпуск настоящего сборника посвящен 75-летию со дня рождения члена-корреспондента АН СССР профессора Георгия Абрамовича Гринберга, известного советского ученого, старейшего сотрудника Физико-технического института им. А. Ф. Иоффе Академии наук СССР.

Для ФТИ могут считаться традиционными исследования по математической физике. Этими исследованиями в Институте занимались уже в первые годы его существования В. Р. Бурсиан, Ю. А. Крутков, несколько позднее — В. А. Фок. Георгию Абрамовичу Гринбергу принадлежит заслуга организации в Институте систематической «службы математической физики». Вначале его деятельность в этом направлении развивалась в рамках теоретического отдела ФТИ (сотрудником которого он стал в 1919 г.), а затем сосредоточилась в отделе математической физики, который он организовал и бессменно возглавляет с 1946 г.

Успешная работа Г. А. Гринберга и его школы, из которой вышли многие крупные ученые, определяется физическим подходом к математически строго сформулированным задачам, какую бы область физики они не охватывали (теория теплопроводности, теория упругости, электродинамика, физика плазмы и т. д.). Большую роль сыграли и играют сейчас общие методы решения задач математической физики, разработанные Г. А. Гринбергом на протяжении более чем полувековой его научной деятельности и нашедшие применение во многих конкретных проблемах физики и техники.

В сборнике приняли участие 39 авторов; в него включены 26 статей, они распределены по 7 разделам. Открывается сборник статьей о Г. А. Гринберге; затем следует серия работ, посвященных общим вопросам физики, включающим существенную математическую составляющую. Это работы академика Д. В. Скобель-

цына, академика Я. Б. Зельдовича совместно со А. А. Старобинским, чл.-корр. А. И. Лурье, доктора физ.-мат. наук Ю. В. Вандакурова, которые связаны с проблемами электродинамики, квантовой физики, механики и астрофизики.

Следующий раздел посвящен общей теории интегральных преобразований и теории дифракции (он наиболее широко представлен в сборнике). Дальнейшие разделы охватывают вопросы фокусировки заряженных частиц, физики плазмы, магнитной гидродинамики, теории управления. Все они входят в круг активных научных интересов Г. А. Гринберга, внесшего существенный вклад в развитие соответствующих областей науки.

В настоящем издании приняли участие ученые разных поколений. Мы видим здесь и представителя старшего поколения советских физиков Дмитрия Владимировича Скобельцына, много лет проработавшего в Физико-техническом институте; у него Г. А. Гринберг в свое время учился в Политехническом институте. Статьи для сборника прислали научные коллеги Георгия Абрамовича, некоторые из них были его сотрудниками во ФТИ и Политехническом институте. В числе авторов также — большая группа его прямых учеников: от получивших широкую известность своими работами по математической физике профессоров М. И. Конторовича, Н. Н. Лебедева, Я. С. Уфлянда, до совсем еще молодых научных сотрудников и аспирантов, недавно пришедших в отдел математической физики.

Академик *В. М. Тучкевич*



Георгий Абрамович ГРИНБЕРГ

Георгий Абрамович Гринберг родился 16 июня 1900 г. в Петербурге. Его родители были широко образованными людьми, уделявшими много внимания воспитанию двух своих сыновей (старший брат Г. А. Гринберга — Александр Абрамович (1898—1966) — стал известным химиком, действительным членом Академии наук СССР). Георгий Абрамович с детства проявлял интерес к технике, поэтому он начал учиться в реальном училище. Тем самым было заранее определено, что дальнейшее образование он получит, минуя университет. По окончании училища (в 1917 г.) он не колебался в выборе института: им оказался Петроградский политехнический, уже тогда справедливо считавшийся одним из лучших высших технических учебных заведений России. Свои занятия Г. А. Гринберг начал на электромеханическом факультете института. В конце 1918 г., когда он учился на втором курсе этого факультета, М. И. Неменов и А. Ф. Иоффе при поддержке советского правительства организовали в Петрограде Государственный рентгенологический и радиологический институт. Его физико-технический отдел, возглавляемый А. Ф. Иоффе, помещался в нескольких комнатах, гостеприимно предоставленных заведующим кафедрой экспериментальной физики профессором В. В. Скобельцыным. Узнав о работах, которые велись в отделе, Г. А. Гринберг весной 1919 г. обратился к А. Ф. Иоффе и рассказал ему, что интересуется новой физикой. Отвечая на вопросы Иоффе, назвал прочитанные им книги по физике и математике. Из их числа сильное впечатление на Г. А. Гринберга в свое время произвела монография Христиансена, в которой давалось изложение электромагнитной теории Максвелла. Известно, что «Трактат по электричеству и магнетизму» великого английского ученого долгое время считался «книгой за семью замками». И лишь работы Герца и Больцмана сделали его (на рубеже XIX—XX вв.) более доступным. Монография Христиансена была издана в России под редакцией одного из учителей А. Ф. Иоффе — профессора Н. А. Гезехуса; Иоффе хорошо ее знал. Мы подробно остановились на этой книге, поскольку она во многом определила первоначальные научные интересы Г. А. Гринберга и подготовила его к самостоятельной работе в области электродинамики.

В конце беседы с А. Ф. Иоффе Гринберг добавил, что проделал все лабораторные работы курса экспериментальной физики, предусмотренные программой электромеханического факультета, и что он мечтает о работе в физико-техническом отделе Государственного рентгенологического и радиологического института (в дальнейшем — Физико-технический институт (ФТИ)).

Спустя неделю после этого разговора Г. А. Гринберг случайно встретил А. Ф. Иоффе, который спросил: «Что же Вы не приходите? Мы избрали Вас научным практикантом в наш отдел Института». Уже потом Г. А. Гринберг узнал, что А. Ф. Иоффе не ограничился разговором с ним, а запросил из архива института и тщательно просмотрел отчеты о проведенных студентом Гринбергом лабораторных работах по физике. Так, с 11 июня 1919 г. началась научная деятельность Георгия Абрамовича во ФТИ.

Примерно в это же время в Политехническом институте по инициативе А. Ф. Иоффе (поддержанной профессорами А. Н. Крыловым, Ф. Ю. Левинсоном-Лёссингом, В. В. Скобельцыным и др.) был организован физико-механический факультет — факультет совершенно нового типа. По замыслу его организаторов основное внимание при обучении студентов должно было уделяться преподаванию физики, математики и механики. Поскольку знания закончившего к тому времени 2-й курс электромеханического факультета студента Г. А. Гринберга намного превышали программу второго курса физико-механического факультета, приступившего к занятиям осенью 1919 г., было решено зачислить его на 3-й курс факультета в качестве единственного студента этого курса. Занятия проходили по специально составленному плану и совмещались с работой во ФТИ. Среди профессоров, которым Г. А. Гринберг сдавал соответствующие курсы (В. Р. Бурсиан, Ю. В. Вульф, А. Ф. Гаврилов, Ю. А. Крутков, В. А. Кистяковский), следует особенно выделить А. А. Фридмана, выдающегося советского ученого, по праву считающегося одним из основоположников релятивистской космологии.

В качестве темы для дипломной работы Г. А. Гринбергу была предложена А. А. Фридманом разработка проблемы формулирования теории упругости и гидродинамики в соответствии с релятивистскими принципами. В 1925 г. Г. А. Гринберг опубликовал три работы на эти темы, сразу же сделавшие его имя известным не только среди ленинградских физиков [1—3].

Несколько раньше, в 1923 г., Г. А. Гринберг закончил физико-механический факультет и оказался первым его выпускником. С 1924 г. он работал сначала в качестве ассистента на факультете, затем профессора кафедры теоретической физики и, наконец, заведующего организованной им кафедры математической физики.

К середине 20-х годов широкую известность получила работа Г. А. Гринберга [5, 6], теснейшим образом связанная с исследова-

ниями школы А. Ф. Иоффе по прочности твердых тел. Между теоретическими и наблюдавшимися на опыте значениями прочности существовал, как известно, огромный разрыв. А. Ф. Иоффе был предложен яркий эксперимент, позволяющий проверить основы теории кристаллических решеток (теория Борна). Из кристалла соли вытачивался шар. Он выдерживался некоторое время в жидком воздухе, а затем сразу опускался в расплавленный свинец (или олово). При этом поверхностные слои шара принимали температуру жидкого металла, а его центральная область оставалась холодной. Возникавшие напряжения, ответственные за тепловое расширение, растягивали шар, и можно было ожидать, что в результате произойдет его разрыв (раскол). Г. А. Гринберг предпринял расчет возникающих в шаре напряжений. Ожидалось в соответствии с представлениями экспериментаторов, что значение напряжений будет намного превосходить реальную прочность на разрыв. Действительно, расчет показал, что при выбранных разностях температур и размерах шара возникающие в его центре напряжения составляют около 70 кг/мм^2 , намного превосходя измеренные в опытах на разрыв (0.5 кг/мм^2) и приближаясь к теоретическому значению (около 200 кг/мм^2). Подойти к этим теоретическим значениям еще ближе мешало то обстоятельство, что при 800°C соль начинает просто плавиться.

Решение Г. А. Гринбергом поставленной перед ним задачи для выполненного А. Ф. Иоффе «экспериментум круцис» окончательно подтвердило правильность представлений о причинах снижения прочности реальных кристаллов и отвело подозрение в неадекватности теории Борна. Результаты работы Гринберга [5] вошли в учебники (в частности, в известный курс С. П. Тимошенко). Кроме того, за ним утвердилась репутация не только искусного математика, но и исследователя, глубоко интересующегося экспериментом. Этим самым было положено начало плодотворной консультационной деятельности Г. А. Гринберга: экспериментаторы охотно обращались к нему с вопросами и встречали неизменно доброжелательный прием, получая ценные для их работы советы.

Для Физико-технического института всегда были традиционными тесные связи с промышленностью. Когда в 20-е годы ленинградский завод «Светлана» начал осваивать производство радиоламп, сотрудники ФТИ (П. И. Лукирский, Н. Н. Семенов, А. А. Чернышев и др.) много времени уделяли оказанию помощи разработчикам новых типов ламп. Такая помощь была тем более действенной, что некоторое время (в первой половине 20-х годов) выпуском радиоламп и рентгеновских трубок интенсивно занимался сам институт и его мастерские.

В эту деятельность был вовлечен и Г. А. Гринберг, причем контакты его с соответствующей лабораторией завода оказались столь действенными, что одновременно с работой во ФТИ (1929 г.) он стал научным консультантом и руководителем созданной им

группы теоретических исследований на «Светлане». На этой должности Г. А. Гринберг оставался вплоть до начала войны, сумев за 12 лет организовать на заводе небольшой, но эффективно работавший коллектив исследователей. В разное время в тесном контакте с ним здесь работали А. И. Ансельм, В. С. Лукошков, А. М. Близнюк, а также некоторые экспериментаторы, в частности С. В. Птицын, выполнивший важные исследования по газоотделению из накаливаемых металлов; теория этого явления была развита Г. А. Гринбергом [8]. Результаты их работы оказали существенное влияние на развитие отечественной промышленности электронных ламп. Однако связи Г. А. Гринберга с промышленностью этим не ограничиваются. Существенным был цикл его работ (выполненных частично совместно с сотрудниками), посвященных теории теплового пробоя кабелей — особенно высоковольтных маслонеполненных [13, 31, 32]. Как и работы других ученых ФТИ (прежде всего В. А. Фока, Н. Н. Семенова, А. Ф. Вальтера), они выполнялись в порядке оказания научно-технической помощи заводу «Севкабель». Г. А. Гринберг рассмотрел также и вопрос о протекании теплового пробоя диэлектриков во времени под действием достаточно большого приложенного напряжения [28]. Упомянем еще работу по теории переходных процессов в трансформаторах [12].

В конце 30-х годов, когда началось интенсивное расширение диапазона длин волн, на которых должны были работать передатчики и соответственно приемно-усилительные лампы, возникли как новые принципы управления электронным потоком, так и новые режимы работы «классических» диодов и триодов. Г. А. Гринберг включается в работы по расчету этих режимов и публикует серию исследований по теории высокочастотных диодов и триодов, физике магнетронов [14—18, 20—22, 60]. Следует указать, что в его работах был предложен новый метод подхода к изучению быстропеременных режимов в таких приборах. Этот метод основан на рассмотрении движения отдельных электронов потока в создаваемом ими самосогласованном поле. При решении задачи оказалось возможным вместо рассмотрения нелинейных уравнений в частных производных перейти к обыкновенным дифференциальным уравнениям. При этом был заново получен (значительно более простым путем, чем раньше) целый ряд уже известных результатов, а главное — решены и совершенно новые задачи. В частности, детально изучен процесс установления стационарного режима в плоском диоде начиная от момента приложения внешнего напряжения и до установления в нем лангмюровского распределения плотности заряда.

Большое значение имеют исследования Г. А. Гринберга по радиоэлектронике, посвященные общей теории фокусирующего действия электрических и магнитных полей [35—38]. К построению этой теории он пришел, занимаясь в разное время расчетами, связанными с проектированием циклотрона ФТИ, исследованием

вторично-электронных умножителей и масс-спектрографов, разработкой теории магнетронов.

Важным стимулом в проведении работ по фокусировке явились успехи телевидения, реально наметившиеся в конце 30-х годов. Обычная формулировка задач электронной оптики сводилась к тому, чтобы рассчитать траектории заряженных частиц в данных электрических и магнитных полях. Г. А. Гринберг был первым, кто обратил эту задачу и поставил вопрос об условиях, необходимых и достаточных для обеспечения движения частиц по заданным траекториям. Для разработчиков конечным и интересующим их вопросом являются данные о движении заряженных частиц — сами по себе поля их практически не интересуют.

Эта поставленная Г. А. Гринбергом задача была им полностью решена. Он определил, заданием скольких произвольных траекторий, входящих в пучок, можно однозначно определить поля, необходимые для обеспечения заданного движения частиц в тех пределах, которые отвечают практически поставленным требованиям фокусировки. Зная положение эквипотенциалей, достаточно расположить соответствующие электроды по каким-либо двум из них. Тем самым решается поставленная задача.

Работы Г. А. Гринберга по фокусировке получили высокую оценку специалистов и были продолжены в послевоенные годы рядом его учеников и последователей. Приведем выдержку из отзыва на цикл этих, а также некоторых других его работ, составленного И. Е. Таммом в декабре 1942 г., который отмечал, что они «в значительной части ставились по прямым заданиям нашей промышленности и оказали весьма существенное влияние в деле повышения научно-технического уровня нашей радиотехнической и смежных отраслей промышленности. С методической стороны работы Г. А. Гринберга характеризуются сочетанием виртуозного владения аппаратом математического анализа с умением выделить в трудных и сложных проблемах основное звено, отбросить все второстепенное, дать часто поразительное по остроумию, изяществу и простоте решение проблемы и довести это решение до формы (часто в виде таблиц и графиков), могущей быть непосредственно использованной экспериментаторами и инженерами».¹

В конце 30-х годов Г. А. Гринберг был привлечен Н. Д. Папалекси и М. А. Леонтовичем к исследованиям по актуальному в то время вопросу о береговой рефракции электромагнитных волн. В фундаментальной работе, посвященной этой проблеме [44], Г. А. Гринбергом получено решение интегрального уравнения,² описывающего распространение волны над плоской поверхностью суши и моря; при его выводе использованы приближенные гра-

¹ Тамм И. Е. Архив АН СССР. Фонд 1654 (акад. И. Е. Тамма).

² Это уравнение в литературе о береговой рефракции называют уравнением Леонтовича—Гринберга. Вопросом его решения занимался впоследствии и В. А. Фок (его результат опубликован в совместной с Г. А. Гринбергом работе [47]).

ничные условия М. А. Леонтовича (выведенные, впрочем, несколько другим путем).

Существенным результатом, полученным Г. А. Гринбергом при анализе решения, явилось то обстоятельство, что вдали от берега направление распространения радиоволны, несмотря на пмевшую место береговую рефракцию, совпадает с первоначальным ее направлением (над морем).

В математической физике хорошо известен способ решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными — так называемый метод Фурье—Ламе (нашедший широкое применение и в квантовой механике). Однако при всей своей эффективности этот метод требует в случае неоднородности граничных условий применения искусственных приемов (приведение к однородным граничным условиям и др.), чуждых существу задачи. Выбор их в заметной степени произволен и влияет на форму получаемого решения; иногда это может привести к определенным трудностям в понимании его структуры.

Занимаясь проблемами математической теории электричества и магнетизма, Г. А. Гринберг обратил внимание на то обстоятельство, что интегральные преобразования, столь успешно использовавшиеся им для решения задач электростатики и теории распространения электромагнитных волн, можно с соответствующими изменениями применить и к решению широкого класса задач математической физики с хотя бы одной отделяющейся переменной при задании на границах ее изменения неоднородных граничных условий. В этом случае следует искать разложение решения задачи в ряды по собственным функциям той же переменной, найденным при однородных граничных условиях.

Интересно отметить, что, как выяснилось позднее, эта последняя идея была задолго до того сформулирована Стоксом в работе «О критических значениях сумм периодических рядов» (опубликованной в «Transactions of Cambridge Philosophical Society», 1847, 8, p. 533), которая в течение целого столетия оставалась незамеченной³ и не оказала влияния на развитие соответствующих областей математической физики. В работах Г. А. Гринберга [45, 46, 49, 50] создан метод, связанный с теорией интегральных преобразований и нашедший ряд важных приложений в самых разных областях физики и техники.

Изложенный общий прием, являющийся развитием и обобщением метода Фурье—Ламе, часто называют методом 15-го пара-

³ Насколько нам известно, лишь в книге Карслоу (C a r s l a w H. S. Introduction to the Mathematical Theory of the Conduction of Heat in Solids, London, 1902) по теории теплопроводности приводится решение одного примера, относящегося к распространению тепла в стержне конечной длины, в котором дается (без указания первичного источника) упоминание о методе Стокса, использованном им в различных задачах теории потенциала. Стокс рассмотрел только случай тригонометрических собственных функций.

Систематическое исследование такого круга задач началось существенно позднее, в 1967 г. Идея подхода к их решению, развитая в первых двух работах Г. А. Гринберга, посвященных проблеме Стефана [91, 93], сводилась к тому, что им была применена методика, являющаяся в определенном смысле обобщением общего метода конечных интегральных преобразований, развитого им в середине 40-х годов.⁴ Искомые решения дифференциальных уравнений задач стефановского типа представлялись в виде рядов по собственным функциям аналогичных задач, но при условии как бы неподвижности границ (стационарные граничные условия). Таким образом, для этой цели вводилась «мгновенные» собственные функции задачи. При этом оказывается возможным подойти к нахождению решения как тогда, когда известен закон, по которому происходит движение, так и в случае необходимости определить аналитическое выражение для этого закона. Другой метод решения таких задач был предложен Г. А. Гринбергом в работах [95—98].

В октябре 1974 г. Г. А. Гринберг опубликовал статью [103], в которой представлен еще один эффективный метод решения обсуждаемого круга проблем. Он основан на введении в рассмотрение особых последовательностей функций, дающих возможность свести задачу к бесконечной системе простых по своей структуре дифференциально-разностных уравнений и, далее, к интегральным уравнениям для определения движения границ в случае стефановских задач (или неизвестных функций на границах, движение которых известно). Нет сомнений в том, что методы Гринберга будут находить все более широкое применение и уже в самое ближайшее время войдут в специальную монографическую литературу.

Выше отмечалось, что вскоре после окончания Политехнического института Г. А. Гринберг начал в нем преподавательскую деятельность. За три десятилетия, в течение которых он (с января 1924 г.) проработал на физико-механическом факультете, им было прочитано множество курсов. Это — лекции по специальным разделам физики (электродинамика, электронная теория, строение атома, теория относительности), механики (теоретическая и аналитическая механика, теория упругости) и математики (теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения, векторный и тензорный анализ, операционное исчисление). Большое значение для подготовки кадров высококвалифицированных инженеров-физиков имели специальные семинары, организованные Г. А. Гринбергом в конце 20-х годов при факультете. Здесь студенты получали необходимые навыки по применению математических методов для решения конкретных технических проблем, проходили школу инженерных расчетов. В конце 40-х—начале

⁴ Впервые методика такого рода в задаче с подвижными граничными условиями была использована, по-видимому, в работе В. Г. Меламеда.

50-х годов Г. А. Гринберг читал рассчитанный на два семестра курс математической физики.

Существенной составляющей в научной, педагогической и общественной деятельности Г. А. Гринберга являются консультации, которые он охотно и неизменно дает всем к нему обращающимся: не только сотрудникам Физико-технического института, но и инженерам, работающим в промышленности и отраслевых институтах. Георгий Абрамович всегда быстро схватывает суть задачи и очень часто случается так, что после не слишком продолжительного разговора пришедший к профессору Гринбергу на консультацию уходит от него если и не с доведенным до конца решением, то уж наверняка с четким планом его проведения. В отделе математической физики ФТИ рассказывают, что как-то заведующий одной из лабораторий Института, направляя к Г. А. Гринбергу своего молодого сотрудника, специально просил Георгия Абрамовича постараться не очень быстро излагать этому сотруднику ход решения задачи, над которой молодой человек долго и безуспешно бился. Просьба эта имела под собой то основание, что стремительность, с которой, как правило, Г. А. Гринберг находит правильный путь к решению сложных задач, могла породить у консультирующегося определенную неуверенность в собственных силах. Эпизод очень характерный. Вместе с тем думается, что такая опасность все же не грозит приходящим к Г. А. Гринбергу на консультацию. Он ценит правильную постановку задачи, а свои советы дает неизменно деликатно, в форме доброжелательной беседы на равных, так, словно идея решения приходит к нему не без помощи того, кто в ней нуждается.

Заслуги Г. А. Гринберга перед наукой отмечены избранием его в число членов-корреспондентов АН СССР (1946 г.) и высокими правительственными наградами: орденом Ленина, тремя орденами Трудового Красного Знамени и медалями. В 1949 г. он был удостоен Государственной премии за цикл работ по математической физике.

Вот уже более полувека на страницах физических и математических журналов Георгий Абрамович Гринберг публикует свои работы. Темп этих публикаций отличается удивительным постоянством; отступление от него приходится лишь на годы, когда он занимался исследованиями по специальной тематике. Его работоспособность, острота мысли не подвластны годам. Советская наука ждет от одного из своих старейших и выдающихся представителей много новых, отмеченных неизменной печатью его таланта работ.

БИБЛИОГРАФИЯ ПЕЧАТНЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ

Г. А. ГРИНБЕРГА

1. Теория упругости и гидродинамика специальной теории относительности. — ЖРФХО, часть физич., 1925, 56, с. 368—412.
2. О разыскании частных решений уравнений гидродинамики специального принципа относительности. — ЖРФХО, часть физич., 1925, 56, с. 593—612.
3. Die Grenzform der hydrodynamischen Grundgleichungen der Relativitätstheorie im Falle einer unendlich grossen Lichtgeschwindigkeit. — Z. Phys., 1925, 31, p. 584—591.
4. О получении однородного магнитного поля. — ЖРФХО, часть физич., 1926, 58, с. 483—494.
5. Über den einer isotropen Kugel durch ungleichförmige Erwärmung erregten Spannungszustand. — Z. Phys., 1926, 35, p. 548—555.
6. On the stresses produced within an isotropic ball by non-uniform heating. — In: Reports of the Phys.-Techn. Roentgen Institute and the Leningrad Phys.-Techn. Laboratory, 1918—1926, p. 36—40.
7. Основы новой квантовой теории Гейзенберга—Борна. — В кн.: Основания новой квантовой механики. Л., 1927, с. 21—42.
8. К вопросу о газоотделении металлов при нагревании. — ЖЭТФ, 1931, 1, с. 245—250.
9. О разложении функций в ряды вида $f(x) = \sum_{(k)} A_k F(a_k x)$. — Изв. ЛПИ им. М. И. Калинина, 1933, 33, с. 22—45.
10. Об интегралах вида $J_r^{(m)} = \int_0^\infty \frac{\sin^m(\xi)}{\xi^r} d\xi$. — Изв. ЛПИ им. М. И. Калинина, 1933, 33, с. 46—54.
11. Некоторые приближенные формулы для эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода. — ПММ, 1933, 1, с. 61—69.
12. Теория переходных процессов в трансформаторах. (Совместно с М. И. Конторовичем и Н. Н. Лебедевым). — Тр. пленума всесоюзной электротехнической ассоциации, 1934, № 42.
13. Методика теплового расчета кабеля. (Совместно с А. З. Фрадиным). — ЖТФ, 1935, 5, с. 1711—1722.
14. К теории магнетрона с разрезным анодом. (Совместно с В. С. Лукошковым). — ЖТФ, 1935, 5, с. 1426—1435; Techn. Phys. USSR, 1935, 2, p. 1—11.
15. К теории прохождения нестационарных токов через термоионные приборы. — ЖЭТФ, 1936, 6, с. 126—138; Techn. Phys. USSR, 1936, 3, p. 65—80.
16. Über den Anfangsstrom der durch eine Elektronenröhre beim plötzlichen Anlegen einer Stossspannung fliesst. I. — Techn. Phys. USSR, 1936, 3, p. 101—110.

17. Über den Anfangsstrom der durch eine Elektronenröhre beim plötzlichen Anlegen einer Stossspannung fließt. II — Techn. Phys. USSR, 1937, 4, p. 485—492.
18. Влияние однородного магнитного поля на движение электронов между коаксиальными цилиндрическими электродами. (Совместно с В. С. Волькенштейн). — ЖТФ, 1938, 8, с. 19—36; Techn. Phys. USSR, 1937, 4, p. 1—21.
19. Об одном методе решения основной задачи электростатики и родственных ей проблем. I. — ЖЭТФ, 1938, 8, с. 221—252; Techn. Phys. USSR, 1938, 5, p. 525—560.
20. О работе цилиндрического диода при приложении быстропеременного напряжения. (Совместно с А. М. Близнюком). — ЖТФ, 1938, 8, с. 798—811.
21. Über die Wirkungsweise einer zylindrischen Diode bei deren Beanspruchung durch eine hochfrequente Anodenspannung. (Совместно с А. М. Близнюком). — Techn. Phys. USSR, 1938, 5, p. 3—18.
22. К теории работы плоского диода на высокой частоте. — ЖТФ, 1938, 8, с. 1137—1154; Techn. Phys. USSR, 1938, 5, p. 696—714.
23. Об одном методе решения основной задачи электростатики и родственных ей проблем. II. ЖЭТФ, 1939, 9, с. 725—728; J. of Phys. USSR, 1940, 2, p. 213—216.
24. О некоторых теоремах теории возмущений и их приложениях. — ДАН СССР, 1939, 25, с. 22—25; C. R. de l'Acad. d. Sci. URSS, 1939, 25, p. 22—25.
25. О решении определенного класса электростатических и родственных им проблем. — ЖЭТФ, 1940, 10, с. 1087—1104; J. of Phys. USSR, 1940, 3, p. 401—416.
26. О распространении волн от вертикального излучателя в атмосфере с меняющимися по высоте диэлектрической постоянной и проводимостью. — ДАН СССР, 1940, 26, с. 532; Comptes Rendus (Doklady) de l'Acad. Sci. URSS, 1940, 26, p. 573—577.
27. О распространении волн от вертикального излучателя в атмосфере с меняющимися по высоте ϵ и σ . — Изв. АН СССР, сер. физ., 1940, 4, с. 401—406.
28. О протекании теплового пробоя во времени. (Совместно с М. И. Конторовичем и Н. Н. Лебедевым). — ЖТФ, 1940, 10, с. 199—216; J. of Phys. USSR, 1941, 5, p. 339—356.
29. О распределении электричества на тонких незамкнутых проводящих поверхностях. ЖЭТФ, 1941, 11, с. 536—543; J. of Phys. USSR, 1943, 7, p. 93—98.
30. О прохождении мощных электронных пучков сквозь замкнутые металлические полости. (Совместно с М. И. Певзнером). — ЖТФ, 1941, 11, с. 1332—1339.
31. Методика теплового расчета режима короткого замыкания высоковольтного маслонаполненного кабеля. (Совместно с М. Т. Сонцем). — ЖТФ, 1941, 11, с. 113—137; J. of Phys. USSR, 1941, 4, p. 97—112.

32. О нагревании высоковольтного маслонеполненного кабеля током короткого замыкания. — ЖТФ, 1941, 11, с. 138—148; J. of Phys. USSR, 1941, 4, с. 463—472.
33. О влиянии проводящей полуплоскости на поле точечного заряда. (Совместно с И. И. Цуккерманом). — ЖТФ, 1942, 12, с. 36—44.
34. К теории прохождения электронного тока через диоды и многосеточные лампы и к обоснованию понятия управляющего напряжения при наличии в лампе объемного заряда. — ЖТФ, 1942, 12, с. 462; J. of Phys. USSR, 1943, 7, р. 279—285.
35. Основы общей теории фокусирующего действия электростатических и магнитных полей. I. Цилиндрические поля. — ДАН СССР, 1942, 37, с. 197—204; C. R. Acad. Sci. URSS, 1942, 37, р. 172—178.
36. Основы общей теории фокусирующего действия электростатических и магнитных полей. II. Пространственные электростатические поля. — ДАН СССР, 1942, 37, с. 295—303; C. R. Acad. Sci. URSS, 1942, 37, р. 261—268.
37. Основы общей теории фокусирующего действия электростатических и магнитных полей. III. Пространственные траектории при одновременном наличии электростатического и магнитного полей. — ДАН СССР, 1943, 38, с. 89—92; C. R. Acad. Sci. URSS, 1943, 38, р. 78—81.
38. Основы общей теории фокусирующего действия статических электрических и магнитных полей. — ЖТФ, 1943, 13, с. 361—388.
39. Связь между операционными выражениями двух произвольных функций и операционным представлением их произведения. — ДАН СССР, 1943, 40, с. 159—161; C. R. Acad. Sci. URSS, 1943, 40, р. 141—143.
40. Некоторые теоремы, относящиеся к вычислению потенциалов и зарядов, наводимых на проводниках, внесенных в произвольное внешнее электрическое поле. — ДАН СССР, 1943, 38, с. 225—228.
41. Интегральные преобразования в электростатике и теории распространения электромагнитных волн. — Изв. АН СССР, сер. физич., 1943, 7, с. 20—25.
42. О распространении радиоволн над поверхностью земли при учете сферичности ее и неоднородности атмосферы. — Изв. АН СССР, сер. физич., 1943, 7, с. 99—113.
43. Theory of coastal refraction. — Phys. Rev., 1943, 63, р. 185—189.
44. К теории так называемой береговой рефракции электромагнитных волн. — ЖЭТФ, 1944, 14, с. 84—111; J. of Phys. USSR, 1942, 6, р. 185—209.
45. Новый метод решения некоторых краевых задач для уравнений математической физики, допускающих разделение переменных. — Изв. АН СССР, сер. физич., 1946, 10, с. 141—168; J. of Phys. USSR, 1946, 10, р. 301—320.

46. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.—Л., Изд. АН СССР, 1948, 727 с.
47. К теории береговой рефракции электромагнитных волн. (Совместно с В. А. Фоком). — В кн.: Исследования по распространению радиоволн, сборник второй. М.—Л., Изд. АН СССР, 1948, с. 69—96.
48. Об изгибе прямоугольной пластины с закрепленным контуром под действием произвольной нагрузки. (Совместно с Я. С. Уфляндом). — ПММ, 1949, 13, с. 413—434.
49. О решении уравнений математической физики с частично или полностью разделяющимися переменными. — В кн.: К 70-летию академика А. Ф. Иоффе. М.—Л., Изд. АН СССР, 1950, с. 50—60.
50. К теории теплового расчета анодов мощных рентгеновских трубок, работающих в импульсном режиме. (Совместно с Н. Н. Лебедевым, Э. Д. Пергаменцевой, И. П. Скальской, Я. С. Уфляндом). — ЖТФ, 1950, 20, с. 1452—1463.
51. О решении плоской задачи теории упругости и задачи об изгибе тонкой плиты с закрепленным контуром. — ДАН СССР, 1951, 76, с. 661—664.
52. О статье В. Л. Шевелькова «Нахождение температурного поля в изотропной среде перед фронтом движущегося источника тепла», напечатанной в ЖТФ (XVI, 207, 1946), и о правильном решении поставленной в ней задачи. — ЖТФ, 1951, 21, с. 382—384.
53. О некоторых классах статических осесимметричных электрических и магнитных полей, для которых основное уравнение электронной оптики допускает решение в известных функциях. — ЖТФ, 1953, 23, с. 1904—1914.
54. О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях. — ПММ, 1953, 17, с. 211—228.
55. Метод решения общей бигармонической задачи для прямоугольной области при задании на контуре значений функции и ее нормальной производной. (Совместно с Н. Н. Лебедевым, Я. С. Уфляндом). — ПММ, 1953, 17, с. 73—86.
56. Волновая задача для параболического зеркала. (Совместно с Н. Н. Лебедевым, И. П. Скальской, Я. С. Уфляндом). — ДАН СССР, 1954, 95, с. 961—963.
57. Основы точной теории волнового поля линий передачи. (Совместно с Б. Э. Бонштедтом). — ЖТФ, 1954, 24, с. 67—95.
58. О магнитном поле стационарных токов, находящихся в полостях или каналах внутри железа, проницаемость которого может считаться бесконечно большой. — ДАН СССР, 1954, 94, с. 839—842.

59. Об изгибе полукруглой тонкой плиты с закрепленным дуговым краем и свободным диаметром. (Совместно с Р. П. Поплавским). — Инженерный сборник, 1954, 18, с. 83—88.
60. К теории устанавливающихся процессов в электронных приборах или в цепях, содержащих такие приборы. — ЖТФ, 1955, 25, с. 2183—2192.
61. О характере напряженного состояния упругой тонкой клиновидной плиты с закрепленной и свободной сторонами. (Совместно с А. Н. Покровским, Я. С. Уфляндом). — Инженерный сборник, 1955, 22, с. 193—198.
62. Электромагнитное поле линейного излучателя, находящегося внутри идеально-проводящего параболического экрана. (Совместно с Н. Н. Лебедевым, И. П. Скальской, Я. С. Уфляндом). — ЖЭТФ, 1956, 30, с. 528—543.
63. К вопросу о дифракции электромагнитных волн на бесконечно тонких идеально проводящих плоских экранах. (Совместно с Ю. В. Пименовым). — ЖТФ, 1957, 27, с. 2326—2339.
64. Новый метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на плоскости с безграничной прямолинейной щелью и родственных ей проблем. — ЖТФ, 1957, 27, с. 2595—2605.
65. По поводу критики П. П. Касьянковым моего метода получения основных электроннооптических уравнений для пучков с криволинейной осью. — ЖТФ, 1957, 27, с. 2425—2431.
66. По поводу статьи П. П. Касьянкова «Об уравнениях траектории электрона в электроннооптических системах с криволинейной осью. — Опт. и спектроск., 1957, 3, с. 673.
67. Плоская задача дифракции для параболического цилиндра конечного размера. (Совместно с Ю. В. Пименовым). — ЖТФ, 1958, 28, с. 2302—2309.
68. Метод решения задач дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих плоских экранах, основанный на изучении наводимых на экранах теневых токов, ч. I. Общие основы метода. — ЖТФ (серия Б), 1958, 28, с. 542—554.
69. Метод решения задач дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих плоских экранах, основанный на изучении наводимых на экранах теневых токов, ч. II. Дифракция на полуплоскости и на плоскости с безграничной прямолинейной щелью. — ЖТФ, 1958, 28, с. 555—568.
70. Метод решения некоторого класса осесимметричных задач теории потенциала и его приложение к расчету полей электроннооптических линз. (Совместно с И. А. Шукейло). — ЖТФ, 1959, 29, с. 1293—1303.
71. Об интегральных уравнениях с ядром, зависящим от абсолютной величины разности аргументов и конечным промежутком изменения переменных. — ДАН СССР, 1959, 128, с. 450—453.
72. О дифракции электромагнитных волн на полосе конечной ширины. — ДАН СССР, 1959, 129, с. 295—298.

73. К вопросу о дифракции электромагнитных волн на идеально проводящей плоскости с круглым отверстием. (Совместно с Ю. В. Пименовым). — ЖТФ, 1959, 29, с. 1206—1211.
74. О расчете электростатического поля системы плоских диафрагм с круглыми отверстиями. (Совместно с Э. Н. Колесниковой). — ЖТФ, 1960, 30, с. 723—733.
75. О магнитогидродинамической задаче обтекания источников магнитного поля потоком идеальной идеально проводящей несжимаемой жидкости. — ЖТФ, 1961, 31, с. 23—28.
- 76—77. Об установившемся течении проводящей жидкости по трубам, находящимся в поперечном магнитном поле. — ЖТФ, 1961, 31, с. 18—22 и 892 (поправка).
78. Об установившемся течении проводящей жидкости по находящейся во внешнем магнитном поле прямоугольной трубе с двумя проводящими и двумя непроводящими стенками. — ДАН СССР, 1961, 141, с. 330—333.
79. О вычислении средних по поверхности и по объему значений функций расстояния до точки. — ЖТФ, 1961, 31, с. 3—12 и 892 (поправка).
80. Дифракция плоской электромагнитной волны на идеально проводящем плоском кольце и электростатическая задача для такого кольца. (Совместно с В. Н. Курицыным). — ЖТФ, 1961, 31, с. 1017—1025.
81. К вопросу о дифракции электромагнитных волн на идеально проводящем плоском кольце. (Совместно с Э. Н. Колесниковой). — ЖТФ, 1961, 31, с. 13—17.
82. Об установившемся течении проводящей жидкости в прямоугольной трубе с двумя непроводящими стенками и двумя проводящими, параллельными внешнему магнитному полю. — ПММ, 1961, 25, с. 1024—1034.
83. О некоторых случаях течения проводящей жидкости по трубам прямоугольного сечения, находящимся в магнитном поле. — ПММ, 1962, 26, с. 80—87.
84. О диффузионном распаде плазмы в магнитном поле при наличии нелинейных эффектов. — ЖТФ, 1963, 33, с. 1430—1443.
85. О решении нелинейного уравнения, описывающего распад плазмы в магнитном поле. (Совместно с В. Е. Голантом). — ЖТФ, 1963, 33, с. 1139—1141.
86. О плоскопараллельном течении жидкости, электропроводимость которой зависит от времени, в поперечном магнитном поле. — ЖТФ, 1963, 33, с. 1384—1387.
87. О решении пространственных статической и волновой задач для экрана, имеющего форму неограниченной тонкой секторальной пластинки. — ЖТФ, 1963, 33, с. 1387—1391.
88. О решении статической и волновой задач для экранов, имеющих форму конуса или части конической поверхности. — ЖТФ, 1963, 33, с. 1392—1394.

89. Об установившемся течении вязкой проводящей жидкости по прямолинейным трубам, находящимся в поперечном внешнем магнитном поле. — ЖТФ, 1964, 34, с. 1721—1731.
90. Об интегральных уравнениях с ядром, зависящим от абсолютной величины разности аргументов, и конечным промежутком изменения переменных. — ДАН СССР, 1965, 163, с. 1310—1313.
91. Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых при наличии движущихся границ. — ПММ, 1967, 31, с. 393—403.
92. О характере пристеночных слоев и об их перекрытии при магнитогидродинамическом течении проводящей жидкости по каналу прямоугольного сечения. (Совместно с О. М. Конторович). — ПММ, 1967, 31, с. 564—567.
93. О решении обобщенной задачи о промерзании жидкости, а также родственных задач теории теплопроводности, диффузии и других. — ЖТФ, 1967, 37, с. 1598.
94. О нестационарном режиме работы охлаждающих термоэлементов. — ЖТФ, 1968, 38, с. 418—424.
95. О решении задач диффузионного типа для расширяющихся или сжимающихся областей. — ПММ, 1969, 33, с. 269—273.
96. О решении задач диффузионного типа для расширяющихся или сжимающихся областей (Совместно с В. А. Коссом). — ПММ, 1969, 33, с. 753—756.
97. О температурных или концентрационных полях, создаваемых внутри бесконечной или конечной области движущимися поверхностями, на которых задан временной ход температуры или концентрации. — ПММ, 1969, 33, с. 1051—1060.
98. О консолидации непрерывно растущего в высоту слоя водонасыщенного грунта. — Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, 1969, 90, с. 368—372; 1970, 92, с. 399 (поправка).
99. О движении поверхности раздела фаз в задачах стефановского типа. (Совместно с О. М. Чекмаревой). — ЖТФ, 1970, 40, с. 2025—2031.
100. О некоторых точных решениях уравнения Фурье для изменяющихся со временем областей. (Совместно с В. А. Коссом). — ПММ, 1971, 35, с. 759—760; 1973, 37, с. 1145—1146.
101. О решении двумерной задачи дифракции электромагнитных волн на системе прямолинейных отрезков (экранов). — ЖТФ, 1974, 44, с. 906—915.
102. Об одном общем методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии и им подобных при наличии границ, движение которых задано или подлежит определению (проблема Стефана и др.). — ЖТФ, 1974, 44, с. 2033—2042.

В. Я. Френкель