КОММУНИЗМ — ЭТО ЕСТЬ СОВЕТСКАЯ ВЛАСТЬ ПЛЮС ЭЛЕКТРИФИКАЦИЯ ВСЕЙ СТРАНЫ (Ленин)

ЖУРНАЛ ОСНОВАН в 1880 г.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

1
1974
ЯНВАРЬ

ОРГАН АКАДЕМИИ НАУК СССР, ГОСУДАРСТВЕННОГО КОМИТЕТА СОВЕТА МИНИСТРОВ СССР ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ, ЦП НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА ЭНЕРГЕТИКИ И ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

К 100-летию «Трактата об электричестве и магнетизме» Дж. К. Максвелла

Доктор техн. наук, проф. ПОЛИВАНОВ К. М.
Москва

Трактат Максвелла. В своем труде, изданном 100 лет назад [Л. 1 и 2], Максвелл (1831—1879 гг.) излагает электродинамику, основываясь на теории электромагнитного поля, существующего как физическая реальность; он впервые приводит замечательную систему уравнений, из которой вытекают закономерности всех известных в то время явлений электродинамики, а также многих неизвестных, таких как излучение. Система уравнений и связанная с ней электромагнитная теория света известны из более ранней работы Максвелла «Динамическая теория электромагнитного поля» (1864 г.) [Л. 2 и 4], однако наиболее полно и глубоко они изложены именно в Трактате. В нем дан наглядный рисунок, иллюстрирующий распространение синусоидальной волны [Л. 1, § 791], основные уравнения выражены через векторы и оператор Гамильтона (§ 618) практически в той форме, в какой их пишут сейчас. В современных обозначениях эти уравнения можно представить следующими равенствами:

выражение магнитной индукции через векторный потенциал

$$\mathbf{B}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}; \qquad (1)$$

выражение напряженности электрического поля через векторный и скалярный потенциалы

$$\mathbf{E}=-\partial\mathbf{A}/\partial t-\nabla\varphi. \qquad (2)$$

Из этих двух равенств непосредственно вытекает одно из двух основных уравнений Максвелла:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t. \qquad (3)$$

Существенно отметить, что в другом, более раннем исследовании Максвелл, напротив, сначала находит уравнение (3), а (1) и (2) выводит из него [Л. 4 и 19]. Далее в том же параграфе приводится второе основное уравнение:

$$4\pi\mathbf{J}_{\text{п}}=\mathrm{rot}\,\mathbf{H} \qquad (4)$$

при

$$\mathbf{J}_{\text{п}}=\mathbf{J}+\partial\mathbf{D}/\partial t. \qquad (5)$$

В § 783, 784 и 801 приведены уравнения, определяющие распространение электромагнитных волн как в проводящей, так и в непроводящей средах.

Теория Максвелла привела к радикально важным открытиям (излучение радиоволн), она послужила основой развития современной электротехники и радиотехники, роль которых в нашей жизни трудно переоценить. Только после работ Максвелла возникло и распространилось понимание физического поля как реальной физической сущности, т. е. появилась новая точка зрения на физические явления. Трактат Максвелла по своему значению сравним с трудами Ньютона.

В Трактате, помимо теории поля, много внимания уделено вопросам электромагнитных сил, электротехническим измерениям и расчетам электрических цепей. Нужно отметить, что две основные формы применения уравнений Кирхгофа (система уравнений для контурных токов и система уравнений для узловых потенциалов) были изложены Максвеллом в курсе лекций, читавшихся в Кембриджском университете, и вошли в качестве дополнения во второе, посмертное издание Трактата (§ 282*a* и *b*, составленные по запискам Флеминга).

Инженерное образование и теория Максвелла. Изложение теории в Трактате Максвелла было не самым простым. Опасаясь незнакомства специалистов того времени с векторным анализом и кватернионами, Максвелл чаще записывал свои уравнения в координатной форме, вводя вместо самих векторов их составляющие. При этом (3) и (4) принимают для вакуума вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t}&=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y};\\ \frac{1}{V}\frac{\partial Y}{\partial t}&=\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z};\\ \frac{1}{V}\frac{\partial Z}{\partial t}&=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где X, Y, Z — составляющие вектора **E** (напряженность электрического поля); L, M, N — составляющие вектора **H** (напряженность магнитного поля). Эти же уравнения в современных обозначениях записываются короче:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}=\operatorname{rot}\mathbf{H}, \quad -\frac{1}{V}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=\operatorname{rot}\mathbf{E}. \tag{7}$$

Неожиданны и чрезмерно новы были возможные следствия из теории Максвелла, именно поэтому прошло так много времени (15 лет) со дня опубликования Трактата до знаменитых опытов Герца, хотя формулы, выражающие излучение антеннами электромагнитных волн, непосредственно выводятся из уравнений Максвелла.

После открытия Герца и более систематического и простого изложения им теории Максвелла она стала приковывать к себе внимание очень широкого круга ученых. А. Зоммерфельд, студенческие годы которого совпали со временем опубликования результатов опытов Герца, пишет [Л. 5]: «Доценты и студенты прилагали все усилия, чтобы усвоить результаты опытов Герца, которые становились все более и более известными, и объяснить их на основании столь же трудного для понимания оригинального изложения максвелловского «Трактата об электричестве и магнетизме». Вслед за этим в сноске Зоммерфельд рассказывает необыкновенно яркий случай: «Крупный исследователь в области электролиза Вильгельм Гитторф, много слышавший о новом учении об электричестве, попытался уже в преклонном возрасте изучать Трактат, но не смог пробиться через путаницу непривычных формул и понятий. Эта трудность привела его в состояние глубокой депрессии. Мюнстерские коллеги Гитторфа убедили его съездить отдохнуть в Гарц. Но когда они перед его отъездом проверили чемодан, то нашли в нем оба тома «Трактата об электричестве и магнетизме» Дж. К. Максвелла».

И вот, несмотря на то что теория Максвелла лежала в основе всей электрической связи — проволочной, а после открытий А. С. Попова (1895 г.) и радиосвязи, несмотря на широчайшее распространение разных видов передачи и преобразования электромагнитной энергии, преподавание теории Максвелла стало входить в систему образования инженеров-электриков только по прошествии более 50 лет после опубликования Трактата.

Ограничусь ссылкой на Московское высшее техническое училище, где до 30-х годов от студентов электротехнического факультета в курсе основ электротехники не требовалось знания уравнений Максвелла. Правда, студентам были известны:

закон магнитной цепи или уравнение Ампера — Максвелла

$$\oint \mathbf{H}d\mathbf{l}=\oint \mathbf{J}_{п}d\mathbf{S}, \tag{8}$$

где $\mathbf{J}_п$ — плотность полного тока (поэтому само уравнение (8) стали называть «законом полного тока» даже в тех случаях, когда ни о каком токе смещения не шла речь);

закон электромагнитной индукции для неподвижного контура или уравнение Фарадея — Максвелла:

$$э=\oint \mathbf{E}d\mathbf{l}=-\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}d\mathbf{S}. \tag{9}$$

В том же МВТУ, в конце 20-х годов курс теории электромагнитного поля в векторном изложении начал читать проф. Я. Н. Шпильрейн, но курс был факультативным, и к концу года слушателей осталось немного. Только в 30-х годах в курс теоретических основ электротехники В. Ф. Миткевич [Л. 6] и К. А. Круг [Л. 7] ввели изложение уравнений Максвелла, и то первоначально в очень сокращенной форме.

В те годы теория Максвелла иногда излагалась более подробно в специальных курсах студентам, готовившимся к деятельности инженеров-радиотехников. Однако в радиотехнической литературе тех лет неоднократно встречаются попытки обходиться без анализа самих уравнений Максвелла и оперировать более знакомыми и элементарными понятиями. Например, на языке теории цепей говорили о наведенных э. д. с. и токах, поверхностный эффект в проводах объясняли, обходя законы проникновения поля в проводящую среду в согласии с уравнениями Максвелла и основываясь на представлении о вытеснении токов или даже предполагая отталкивание токовых нитей вследствие кулоновского взаимодействия зарядов. Такое же положение существовало и за границей [Л. 8 и 9].

Можно и непосредственно обратиться к учебникам электротехники конца прошлого века. Приведу один характерный пример. Одним из первых в Европе институтов, дававших звание инженера-электрика, был Электротехнический институт Монтефиоре, присоединенный к Льежскому университету (Бельгия). Он носил международный характер, так как среди слушателей одно- или двухгодичного курса было много иностранцев, получивших высшее, но не электротехническое образование у себя на родине. Директор этого института проф. Э. Жерар был автором двухтомного учебника по электротехнике, вышедшего в 1898 г. пятым изданием [Л. 10]. Помимо электроэнергетики и электромеханики, в нем обширные разделы были посвящены телефонии и телеграфии, описывались последние работы многих иностранных ученых и инженеров, в том числе Доливо-Добровольского, Яблочкова, Бенардоса и Линева. В книге, конечно, говорилось о Фарадее и Кирхгофе, однако имя Герца упоминалось только в связи с его конденсаторным телефоном, а имя Максвелла не упоминалось вовсе.

Значительно раньше теория Максвелла стала изучаться физиками: в Германии достаточно полное изложение теории Максвелла было дано Больцманом [Л. 11], во Франции в 1885 г. опубликован превосходный перевод Трактата с обширными комментариями Корню, Потье и Сарро [Л. 12], в России в 1895 г. был издан обстоятельный курс проф.

Петербургского университета И. И. Боргмана [Л. 13].

Сказанное помогает понять, почему многие даже чисто технические достижения тех лет в области радио и электроники принадлежат в первую очередь лицам, имевшим университетское, а не инженерное образование, страдавшее недостаточной полнотой.

Но и среди физиков теория Максвелла встречала недостаточное понимание — слишком многое в ней казалось разительно новым. Выдающийся современный физик Фримен Дж. Дайсон в статье о новаторстве в физике [Л. 14] рассказывает о том, как будущий профессор Колумбийского университета Пупин, желая в студенческие годы понять теорию Максвелла, «был похож на рыцаря, ищущего чашу святого Грааля. Сначала он пришел в Колумбийский университет, но там не нашел никого, кто мог бы ему объяснить Максвелла. Тогда он отправился в Кембридж, где работал Максвелл, но Максвелл уже умер, а наставники Пупина в Кембридже требовали от него главным образом, чтобы он получал хорошие отметки на экзаменах по математике. Наконец, он приехал в Берлин и нашел там Людвига Больцмана. Больцман понял теорию Максвелла, и он научил Пупина тому, что знал сам. Пупин был поражен: как мало физиков, которые уловили смысл этой теории даже через 20 лет после того, как Максвелл создал ее в 1865 г.».

«Сорок лет как теория Максвелла проникла в технику и растет с ней» — под таким выразительным названием, очень верно обрисовывающим положение, появилась в 1972 г. статья американского ученого С. А. Щелкунова [Л. 9]. Она опубликована в журнале, посвященном образованию инженеров-электриков.

В Советском Союзе также в 30-х годах появилось много переводных и оригинальных работ по теории Максвелла. Среди них неоднократно переиздававшаяся книга И. Е. Тамма [Л. 15]; переведенная на немецкий язык и широко известная за границей «Электродинамика» Я. И. Френкеля [Л. 16] — оригинальный курс с полным применением современной математики; монография В. К. Аркадьева [Л. 17], в которой вводится комплексное представление уравнений Максвелла при комплексных проницаемостях (Аркадьев и позже Дебай). Последняя книга в значительной мере связана с инженерными задачами электротехники.

Новая волна интереса к теории Максвелла и последующее включение ее в учебные программы электротехнических специальностей высшей школы возникли в значительной мере в связи с появлением радиолокации.

Выдающийся английский физик Вильям Генри Брэгг, впервые применивший диффракцию рентгеновских лучей в кристаллах для установления их структуры, начинает свою интересную популярную книгу [Л. 18] словами: «В начале 1941 г. выяснилась настоятельная необходимость в значительном количестве людей, способных управлять новыми техническими средствами войны в воздухе». Цель книги — дать беглое описание принципов электромагнетизма и истории их установления.

Понятия волноводов, полых резонаторов и т. п. требовали непривычного для инженеров-электриков подхода к вопросам передачи и преобразования электромагнитной энергии; для отчетливого понимания протекавших явлений, конечно, следовало исходить из уравнений Максвелла.

После второй мировой войны в учебные программы всех электротехнических и электроэнергетических специальностей высшей школы были введены разделы, посвященные уравнениям Максвелла.

Предшественники Максвелла и значение его Трактата. Разумеется, Максвелл пришел к своей теории, имея многих замечательных предшественников. Прежде всего следует назвать Фарадея (1791—1867 гг.), исследования которого [Л. 3] он очень высоко ценил и на работы которого неоднократно ссылался, Ампера (1775—1836 гг.), которого Максвелл называл Ньютоном электричества (§ 528), и Вильяма Томсона, лорда Кельвина (1824—1907 гг.), «указаниям и помощи которого, также как и его опубликованным трудам, — пишет Максвелл, — я обязан большей частью своих знаний того, что мне известно по этому предмету».

Цитированной фразе из предисловия к Трактату предшествует указание на роль Кельвина в развитии у Максвелла понимания идей теории поля: «я знал, что было принято думать о таком различии представлений, сложившихся о явлениях у Фарадея и у математиков, что они не были удовлетворены языком друг друга. Но я убедился, что расхождение возникло не из-за ошибки одной из сторон; и убедил меня в этом сэр Вильям Томсон».

В предисловии также содержатся слова: «По мере того, как я углублялся в изучение Фарадея, я находил, что его метод понимания явлений был также математическим, хотя и не был представлен в форме обычных математических символов»; и такое важное утверждение: «Когда я переводил то, что я считал идеями Фарадея, в математическую форму, я нашел, что в большинстве случаев результаты общих методов совпадали... Таким путем я нашел, что многие из открытых математиками плодотворных методов исследования могли быть значительно лучше выражены с помощью идей, вытекающих из работ Фарадея, чем в их оригинальной форме... Благодаря этому многие из математических открытий Лапласа, Пуассона, Грина и Гаусса находят в этом Трактате надлежащее место и соответствующее выражение с помощью идей, большей частью заимствованных у Фарадея».

В конце предисловия Максвелл пишет: «Если чем-либо из написанного здесь я окажу любому изучающему содействие в понимании способов мышления и выражений Фарадея, я буду считать, что одна из моих основных целей, а именно передать другим то восхищение, которое я испытал сам, читая «Исследования» Фарадея, будет выполнена».

Отмечая работы Ампера как одно из наиболее блестящих достижений науки, Максвелл указывает (§ 528), что «все в совокупности, и теория, и эксперимент, как будто появились в полной силе и полном вооружении из головы Ньютона электричества». «При этом, — пишет он дальше, — мы вынуждены подозревать, в чем, впрочем, признается сам Ампер [Л. 20], что закон открыт им при помощи некоего процесса, который он нам не показывает, и что, когда была построена законченная теория, он удалил все следы лесов, которыми пользовался при постройке».

К сожалению, очень часто в науке дело обстоит именно так. С этим же мы встречаемся, и знакомясь с построением теории Максвелла. Сказанное прежде всего относится к тому, как Максвелл ввел ток смещения. А между тем как раз наличие тока смещения в (4) приводит совместно с уравнением (3) к возможному существованию электромагнитного поля в вакууме при отсутствии зарядов и токов в ранее принятом понимании. Впервые это уравнение появилось в работе Максвелла «О физических силовых линиях» (1861—1862 гг.) [Л. 2]. Оно выглядело так (нумерация сохранена):

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}-\frac{1}{E^2}\frac{dP}{dt}\right);\\ q &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}-\frac{1}{E^2}\frac{dQ}{dt}\right);\\ r &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}-\frac{1}{E^2}\frac{dR}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (112)$$

В немецком переводе этой статьи Л. Больцман непосредственно перед этим уравнением дает примечание. Оно начинается словами: «Сложность представлений, которые лежат в основе этих уравнений Максвелла, требует более подробных объяснений». Вслед за тем они и приводятся на десяти страницах [Л. 2]! Уравнение (112) написано для компонент в координатах x, y, z; представим его в принятой сейчас форме:

$$\mathbf{J} = \operatorname{rot}\mathbf{H} - \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (112) \qquad (10)$$

Затем Максвелл приводит уравнение непрерывности тока (в подленнике оно также дано в координатной форме):

$$\operatorname{div}\mathbf{J} = -\partial\rho/dt. \quad (113) \qquad (11)$$

Приведу следующий за уравнениями текст Максвелла, заменяя только запись формул: «Дифференцируя (112) соответственно по x, y, z и подставляя в (113), находим:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{E}, \quad (114) \qquad (12)$$

откуда следует, что

$$\rho = \varepsilon\varepsilon_0\operatorname{div}\mathbf{E}, \quad (115) \qquad (13)$$

постоянную полагаем равной нулю, так как всегда $\rho=0$ в отсутствие электрических сил».

Таким образом, как будто бы Максвелл выводит «электростатическую теорему Гаусса» из своего уравнения (10) или (4), полученного очень не ясным путем. Между тем «теорема Гаусса» уже давно была хорошо известна, тогда как уравнение (112) или (4) публиковалось впервые.

Можно предположить такой путь: было известно, что (4) и (8), пока в них не вводилось слагаемое $\partial\mathbf{D}/\partial t = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, применимы только при постоянном токе и постоянной напряженности поля $\mathbf{E}(t) = \text{const}$, и Максвелл искал возможности такого обобщения понятия тока (5), при котором (4) и (9) можно распространить и на область переменных величин. К тому же, естественно было сомневаться и в применимости теоремы Гаусса к переменному полю. В таком случае, придя окольным путем к (112) или (10), Максвелл и считал существенным доказательство формулы (13), служившее также и подтверждением правильности введенного им дополнения к току проводимости.

В настоящее время естественным представляется обратный ход рассуждений: ищется дополнительное слагаемое плотности тока, которое обращало бы всегда его расхождение (дивергенцию) в нуль; таким слагаемым и оказывается $\partial\mathbf{D}/\partial t = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, которое и называют плотностью тока смещения [Л. 15 и 16]. При этом заранее допускается справедливость (13).

Анализ того, как Максвелл пришел к введению тока смещения, содержится в интересной статье И. С. Шапиро [Л. 19].

Электромагнитная теория света и теория электромагнитного поля, которое может распространяться как световые волны, представляется всегда как наиболее важное открытие, связанное с именем Максвелла. Однако и здесь он имел Фарадея в качестве признанного им самим предшественника. Автор [Л. 18] рассказывает, что, просматривая какую-то книгу в библиотеке Королевского общества, он нашел вложенную в нее записку, подписанную Максвеллом. В ней значилось:

«Электромагнитная Теория Св. (света), предлож. им (Фарадеем) в «Мыслях о лучевых колебаниях» (Phil, Mag. 1846, May) или в «Эксп. Иссл.» (Experimental Researches, III, p. 447) это по существу то же, что я начал развивать в этой статье «Динамическая теория электрического поля» (Phil. Trans., 1865), за исключением того, что в 1846 г. не было данных для вычисления скорости распространения.

Дж. К. М.»

К тем же идеям приближались и другие выдающиеся исследователи того времени. В одном из последних параграфов (§ 861) своего Трактата Максвелл рассказывает о письме Гаусса к Веберу, написанном еще в 1845 г. Гаусс говорит в нем, что он опубликовал бы свои исследования по электродинамике, если бы ему удалось установить то, что он представляет себе как замок свода в электродинамике, если бы он умел вывести силу, действующую между движущимися электрическими частицами, представляя действие не как мгновенно возникающее, «но распространяющееся во времени аналогично тому, как распространяется свет». Гауссу не удалось сделать этот вывод, но ученик Гаусса и Вебера, выдающийся ученый «Бернгард Риман выводит явление индукции электрических токов (теперь мы бы просто говорили о волновом уравнении) из модифицированной формы уравнения Пуассона:

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}+4\pi\rho = \frac{1}{\alpha^2}\frac{d^2V}{dt^2}, \qquad (14)$$

где V — электростатический (разумеется, лучше бы сказать электрический) потенциал; α — скорость света».

Приведенное (§ 862) уравнение Римана содержалось «в представленной Королевскому обществу в Гетингене в 1858 г. записке, но в дальнейшем взятой обратно и опубликованной только в 1867 г. в анналах Поггендорфа после смерти автора», вероятно, вследствие критических замечаний Клаузиуса о неясности математических выкладок Римана.

Наряду со взглядами Фарадея, Максвелла, Гаусса, Римана существовали и совершенно иные теории. По одной из них «электрическая частица испускает потенциал, величина которого ee'/r зависит не только от e — испускающей частицы, но и от e', — воспринимающей частицы и от расстояния между частицами в момент испускания». Кратко рассказав об этой теории, Максвелл заключает § 863 словами о том, что он сам не в состоянии составить себе рациональное представление о ней.

Сейчас не может не удивить и существование подобной теории, и сомнение Римана в правильности выведенного им выражения, но не так легко отличить истину даже от очевидного (в будущем) заблуждения! Именно поэтому так важно было опубликование Максвеллом своего Трактата.

Большая роль в развитии и распространении теории Максвелла принадлежит Герцу (1857—1894 гг.). После его открытия электромагнитных волн (1888 г.) интерес к теории Максвелла резко возрос; ее пониманию содействовало четкое изложение Герца, исходившего из уравнений Максвелла, представленных в симметричной форме и рассматриваемых как постулаты, из которых следуют все остальные законы электродинамики. Такое изложение, формализованное в духе устанавливавшегося в те годы взгляда на «аксиомы» геометрии, не соответствует более физическим представлениям на изложение своей теории самого Максвелла; не останавливаясь здесь на этом сложном вопросе, замечу только, что и сейчас многие называют основные уравнения Максвелла его постулатами.

Современный вид классическая электродинамика приняла после многих важнейших разъяснений Г. А. Лоренца (1853—1928 гг.), в особенности относящихся к пониманию процессов поляризации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Maxwell J. C.** A Treatise on Electricity and Magnetism, 1873, т. 1, 2, 1881.
2. **Максвелл Дж. К.** Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. М., Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954.
3. **Фарадей М.** Экспериментальные исследования по электричеству. М., Изд. АН СССР, 1947, т. 2, 1951, т. 3, 1954.
4. **Нейман Л. Р., Рахимов Г. Р.,** Максвелл Дж. (к 75-летию со дня смерти).— «Электричество», 1954, № 11.
5. **Зоммерфельд А.** Электродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
6. **Миткевич В. Ф.** Физические основы электротехники, 1928.
7. **Круг К. А.** Основы электротехники. М., Госэнергоиздат, 1932—1933.
8. **Chen-to Tai.** On the Presentation of Maxwell's Theory.— «Proc. IEEE», v. 60, Aug., 1972, pp. 936—945.
9. **Schelkunoff S. A.** Forty Years Ago: Maxwell's Theory Invades Engineering — and Crows with It.— «IEEE Trans. on Education», v. 15, Febr., 1972, pp. 2—14.
10. **Gerard E.** Lecons sur l'électricité. Paris, 1898.
11. **Boltzmann L.** Vorlesungen uber Maxwell Theorie. Berlin, 1893.
12. **Maxwell J. C.** Traité d'électricité et de magnétisme. Traduit de L'anglais sur la deuxiéme édition, par G. Séligmann — Lui, avec notes et éclaircissements par MM. Cornu, Potier et Sarrau. Paris, 1885.
13. **Боргман И. И.** Основания учения об электрических и магнитных явлениях. Петербург, ч. 1, 1893; ч. 2, 1895.
14. Над чем думают физики. Элементарные частицы. М., Государственное издательство физико-математической литературы, 1963, вып. 2. 90 с.
15. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. М., 1930.
16. **Френкель Я. И.** Электродинамика. М., ОНТИ, 1934, т. 1; 1935, т. 2.
17. **Аркадьев В. К.** Электромагнитные процессы в металлах. М., ОНТИ, 1934, ч. 1; 1936, ч. 2.
18. **Брэгг В. Г.** История электромагнетизма. М., Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947.
19. **Шапиро И. С.** К истории открытия уравнений Максвелла.— «Успехи физических наук», 1972, вып. 2, т. 108, с. 319—333.
20. **Ампер А.—М.** Электродинамика М., «Наука», 1954.

(Продолжение см. в № 2)

◇ ◇ ◇

УДК 621.015.532:621.317.32

Измерение напряженности поля коронного разряда в запыленном потоке

МИРЗАБЕКЯН Г. З., УДАЛОВА В. И.
Московский энергетический институт

Для зарядки и управления движением частиц при процессах электронно-ионной технологии (электрогазоочистка, электросепарация, нанесение покрытий и т. д.) используется коронный разряд. Увеличение концентрации, а значит и объемного заряда дисперсной фазы в межэлектродном промежутке приводит к изменению характеристик коронного разряда. В этом случае методы расчета поля коронного разряда в чистом воздухе оказываются неприменимыми и возникает необходимость изучения влияния дисперсной фазы на напряженность и ток коронного разряда.

В [Л. 1—3] показано, что при больших концентрациях дисперсной фазы происходит уменьшение тока коронного разряда вплоть до практически полного запирания последнего и перераспределение напряженности электрического поля. Расчеты проводились для двух предельных случаев, когда перемешивание частиц отсутствует и когда трубулентные пульсации потока приводят к полному пере-

КОММУНИЗМ — ЭТО ЕСТЬ СОВЕТСКАЯ ВЛАСТЬ
ПЛЮС ЭЛЕКТРИФИКАЦИЯ ВСЕЙ СТРАНЫ (Ленин)

ЖУРНАЛ ОСНОВАН в 1880 г.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

2
1974
ФЕВРАЛЬ

ОРГАН АКАДЕМИИ НАУК СССР, ГОСУДАРСТВЕННОГО КОМИТЕТА
СОВЕТА МИНИСТРОВ СССР ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ, ЦП НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА ЭНЕРГЕТИКИ
И ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

К 100-летию «Трактата об электричестве и магнетизме» Дж. К. Максвелла [1]

Доктор техн. наук, проф. **ПОЛИВАНОВ К. М.**

Теория поля. Вероятно, самое существенное в трудах Максвелла заключается в том, что он, следуя Фарадею, представлял себе поле не только как способ математического описания физических явлений, но как самодовлеющую физическую реальность. Понимание Максвеллом поля видно из того, как он характеризует отличие «прямых методов» определения потенциала, например по закону Кулона, в предположении прямого действия на расстоянии, от методов расчета поля по дифференциальным уравнениям в частных производных, например по уравнению Пуассона:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+4\pi\rho=0. \tag{15}$$

Математические идеи, выраженные этим равенством, по своей природе отличны от выражаемых определенным интегралом:

$$V=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho}{r}\,dx'dy'dz'. \tag{16}$$

«Дифференциальным уравнением мы выражаем, что сумма вторых производных V в непосредственной близости от рассматриваемой точки определенным образом связана с плотностью заряда в той же точке; но мы ничего не говорим о связи потенциала V в рассматриваемой точке с плотностью заряда в какой-либо точке, отстоящей на конечное расстояние от первой.

Иначе обстоит дело в определенном интеграле, где r обозначает расстояние от рассматриваемой точки (x, y, z), для которой определяется потенциал V, до точки (x', y', z'), в которой заряд имеет плотность ρ».

При рассмотрении электромагнитных волн еще важнее представление физической реальности поля. После полного решения уравнений для векторного потенциала, в котором отчетливо выступает «запаздывание потенциалов», следует краткий и выразительный § 785: «...состояние в точке O в каждый момент времени зависит от состояний (то есть значений $\mathbf{A}$ и $\dot{\mathbf{A}}$), существовавших на расстоянии Vt в эпоху, удаленную на время t; это значит, что возмущение распространяется в среде со скоростью V.

Предположим, что в момент $t=0$, величины A и $\dot{A}$ повсюду равны нулю за исключением области пространства S. Их значение в точке O равно нулю в момент t, если сфера, проведенная радиусом Vt из O как из центра, не заключает в себе частично или полностью область S. Если точка O лежит вне области S, то в ней не будет никакого возмущения до тех пор, пока Vt не станет равным кратчайшему расстоянию от O до точки пространства S. Тогда начинается возмущение в точке O, и оно будет продолжаться до тех пор, пока Vt не станет равным наибольшему расстоянию от O до любой точки в области S: в этот момент возмущение в области O прекратится навсегда».

Фарадей — максвелловские представления о поле приводят к тому, что механическое взаимодействие между электрическими зарядами, токами и магнитами передается полем подобно тому как механическое взаимодействие передается через напряженное состояние упругой среды. Максвелл пользуется хорошо известным в теории упругости понятием тензора напряжений [2]. Он начинает свой § 641 словами: «Назовем любое напряжение, отнесенное к единице площади, символом P_{hk}, где первый индекс h означает, что нормаль к поверхности, к которой приложено напряжение, параллельна оси

[1] Продолжение (начало см. в № 1).

[2] Очень ясно изложены понятия тензоров напряжения в [Л. 21]. Индексам h и k часто придают смысл, прямо противоположный указанному Максвеллом.

h; второй индекс k — направление напряжения, с которым часть тела, лежащая со стороны положительной нормали, действует на лежащую с отрицательной стороны в направлении оси k».

Для двухмерной системы декартовых координат в случае электрического поля (§ 105—107) в вакууме

$$P_{hk}=\begin{array}{c|c|c} k\diagdown h & x & y \\ \hline x & \varepsilon_0\,(E_x^2-E_y^2)/2 & \varepsilon_0 E_x E_y \\ y & \varepsilon_0 E_y E_x & \varepsilon_0\,(E_y^2-E_x^2)^2 \end{array} \qquad (17)$$

Определение силы через тензоры Максвелла легко иллюстрировать простейшими примерами.

Пусть проволока, несущая заряд τ на единицу длины, внесена во внешнее поле $E_0=E_x$. Удобно вычислить силу, передаваемую через поверхность воображаемого геометрического цилиндра $(r=a)$, коаксиального с проволокой. При этом следует, во-первых, выразить компоненты тензора через радиальные и касательные

$$P_{hk}=\begin{array}{c|c|c} k\diagdown h & r & \alpha \\ \hline r & \frac{\varepsilon_0}{2}\,(E_r^2-E_\alpha^2) & \varepsilon_0 E_r E_\alpha \\ \hline \alpha & \varepsilon_0 E_\alpha E_r & \frac{\varepsilon_0}{2}\,(-E_r^2+E_\alpha^2) \end{array}, \qquad (18)$$

во-вторых, определить r-ю и α-ю слагающие силы, действующие на элемент поверхности цилиндра $dS=rd\alpha$,

$$dF_r=P_{rr}rd\alpha;\; dF_\alpha=P_{r\alpha}rd\alpha, \qquad (19)$$

в-третьих, перейти к компонентам в декартовых координатах (так как бессмысленно говорить о r-й или α-й компонентах для проволоки, лежащей в начале координат):

$$dF_x=\cos\alpha dF_r-\sin\alpha dF_\alpha. \qquad (20)$$

Наконец, надо взять интеграл

$$F_x=\oint\left[P_{rr}\cos\alpha rd\alpha-P_{r\alpha}\sin\alpha rd\alpha\right]=E_0\tau. \qquad (21)$$

Результат очевиден: сила равна напряженности внешнего поля, умноженной на заряд единицы длины. Однако он замечателен тем, что рассматривалось только поле на поверхности, окружающей заряженную проволоку, и, следовательно, рассматриваемая сила передается именно полем.

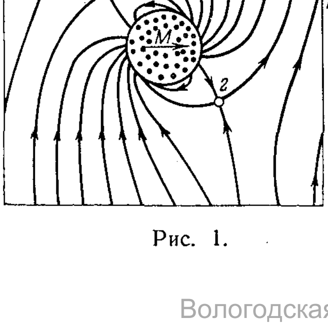

Рис. 1.

Пользуясь тензорами Максвелла, можно найти и передаваемый полем вращающий момент. Покажем это в применении к случаю, изображенному на рис. 1*, когда намагниченный цилиндр (с магнитным моментом $p=p_x=M\pi r_0^2$) находится во внешнем поле $H_0=H_y$. В цилиндрической системе координат результирующее поле имеет составляющие:

$$\left.\begin{aligned} H_r&=H_0\sin\alpha+p\cos\alpha/2\pi r^2;\\ H_\alpha&=H_0\cos\alpha+p\sin\alpha/2\pi r^2. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

В двух последних равенствах первые слагаемые обусловлены внешним полем, вторые — намагниченным цилиндром.

Тензор магнитного поля (§ 641) совпадает с тензором электрического после замены E на H, а в принятой здесь записи и ε_0 на μ_0, поэтому на элементе $dS=rd\alpha$ воображаемого коаксиального цилиндра α-я составляющая силы

$$dF_\alpha=P_{r\alpha}rd\alpha; \qquad (23)$$

$$P_{r\alpha}=\mu_0H_rH_\alpha=\mu_0\left[H_0^2\cos\alpha\sin\alpha+\frac{H_0p\sin^2\alpha}{2\pi r^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{H_0p\cos^2\alpha}{2\pi r^2}+\frac{p^2\cos\alpha\sin\alpha}{(2\pi r^2)^2}\right]. \qquad (24)$$

Для определения вращающего момента, передаваемого полем намагниченному цилиндру, надо силу dF_α помножить на плечо, равное радиусу, и взять интеграл

$$H=\oint rP_{r\alpha}rd\alpha=\mu_0pH_0=\mu_0M_xVH_y,\; r=\text{const}. \qquad (25)$$

Результат находится очень просто, поскольку при интегрировании по α от 0 до 2π обращаются в нуль крайние слагаемые в (24), а сумма двух средних не зависит от α, так как $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$. В итоге, после чрезвычайно простых сокращений получается представленный ответ.

Рассматривая передачу полем силы, а тем более момента, приходится иметь дело с непопулярными и обычно мало знакомыми понятиями и приемами; это и служит причиной подробных разъяснений, приведенных здесь.

Максвелл нашел выражения для силы и энергии. Однако в его работах отсутствует и вектор плотности переносимой энергии (вектор Пойнтинга), и понятие о законах сохранения импульса и энергии. В этом направлении развивались исследования Пойнтинга, Абрагама, Минковского и др. Современный аспект теории обрисовывается в [Л. 22—26]. Последние две работы наиболее близки к инженерным проблемам.

Применение тензоров Максвелла к поляризованным и анизотропным телам требует существенных дополнительных разъяснений, так как после работ Лоренца изменились взгляды на природу этих сил. Частично последний вопрос анализируется в [Л. 27].

* Рисунок упрощенно воспроизводит график Максвелла (Трактат, § 436). Линии, приходящие в особые точки *1* и *2*, служат границами между различного типа областями; они не совпадают ни с одной из силовых линий, иначе в точках *1* и *2* линии имели бы неоднозначное направление.

Электротоническое состояние. В § 540 Трактата Максвелл пишет: «Концепция существования такой величины (электротонического состояния), от изменения которой, а не от ее абсолютной величины зависит ток индукции, встречается у Фарадея еще в начале его «Экспериментальных исследований».

Фарадей предполагал, что вторичная цепь при протекании тока в первичной находится в особом состоянии, изменение которого, говоря современным языком, и проявляется в наведении электродвижущей силы (в то время говорили об индукции токов). Этому особому состоянию Фарадей *«дал название электротонического состояния.* Впоследствии он нашел, что может расстаться с этой идеей, пользуясь только представлениями о магнитных силовых линиях. Но даже в его последних исследованиях он говорит: «Неоднократно в моем уме настойчиво возникала идея электротонического состояния».

Вся история развития этой идеи в уме Фарадея, как она показана в опубликованных им «Исследованиях», заслуживает изучения».

К этому Максвелл обратился еще в своей первой работе по электричеству и магнетизму «О Фарадеевых силовых линиях» (1864 г.), где электротоническому состоянию посвящена вторая часть. Там приводятся и основные законы, из которых очевидна тождественность количественного выражения интенсивности электротонического состояния с векторным потенциалом.

«**Закон I.** *Полная электротоническая интенсивность вдоль границы элемента поверхности служит мерой количества магнитной индукции, проходящей через этот элемент, или, другими словами, мерой числа магнитных силовых линий, пронизывающих данный элемент».*

Далее Максвелл разъясняет, что справедливое для элемента поверхности должно оставаться справедливым и для поверхности конечных размеров. Это значит, что приведенной словесной формулировке соответствует математическое выражение:

$$\Phi = \oint \mathbf{A} d\mathbf{l}. \tag{26}$$

«**Закон VI.** *Электродвижущая сила, действующая на элемент проводника*[3], *измеряется производной по времени от электротонической интенсивности, независимо от того, обусловлена ли эта производная изменением величины или направления электротонического состояния».*

«Электродвижущая сила в замкнутом проводнике пропорциональна производной по времени от полной электротонической интенсивности вдоль всей проводящей цепи».

Формулированному закону и последующему разъяснению соответствуют математические выражения:

$$\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A}/\partial t; \tag{27}$$

$$\text{э. д. с.} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint \mathbf{A}\, d\mathbf{l}. \tag{28}$$

В цитированной работе Максвелл не говорит о том, что именно векторный потенциал служит мерой электротонического состояния и тождественно совпадает с интенсивностью этого состояния. Однако в статье «О физических силовых линиях» он писал, ссылаясь на только что цитированную работу, что он «уже привел соображения в пользу концепции величин F, g, H как составляющих состояния, существование которого предполагал Фарадей и которое назвал электротоническим».

Поясню, что F, g, H — принятые обозначения компонент векторного потенциала. Там же он приводит в координатной форме свое знаменитое второе уравнение:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu\, \partial \mathbf{H}/\partial t, \tag{29}$$

из которого выводит и представление о векторе индукции как о вихре **A** и представление индуцированной электрической напряженности как производной по времени от **A**.

Вернусь еще раз к § 540 Трактата. Максвелл говорит в нем, что другие исследователи значительно позже Фарадея пришли к идее того же электротонического состояния «чисто математическим путем, но, насколько мне известно, ни один из них не узнал смелую гипотезу Фарадея об электротоническом состоянии в сложной математической концепции потенциала двух контуров».

Понятие векторного потенциала и связь его производной (27) с напряженностью электрического поля исключительно важны. Без уравнения (27) остается непонятной не только работа бетатрона, но и работа обыкновенных трансформаторов: как наводится э. д. с. в проводах, когда они расположены в области, где магнитная индукция равна нулю (можно для большей убедительности представить трансформатор выполненным в форме симметричного тороида).

Подобные рассуждения привели французского физика Ваши (1890 г.) к мысли о появлении при переменном токе аномального магнитного потока в той области, в которой при постоянном токе магнитное поле отсутствует. Этот поток действительно появляется. Только не следует его считать аномальным, поскольку его появление прямо вытекает из уравнений Максвелла. Представим себе очень длинный соленоид. Векторный потенциал в его внешней области имеет значение:

$$A = A_\alpha = \Phi_0 / 2\pi r, \tag{30}$$

где $\Phi_0 = \mu\mu_0 i w S$; iw — ампер-витки на единицу длины соленоида; S — его сечение; μ — проницаемость внутренней области (сердечника соленоида).

При постоянном токе имеем для внешней области

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial r}(r A_\alpha) = 0. \tag{31}$$

Здесь принято во внимание, что могла существовать только z-я составляющая вихря, так как $A = A_\alpha = f(r)$.

Обратимся к переходному процесу, когда изменяется ток, а следовательно, и векторный потенциал; при этом новое значение распространяется со скоростью света и равно:

$$A = A_\alpha = \mu\mu_0 S \frac{i^*}{2\pi r}, \quad (32$$

[3] То, что мы сейчас назвали бы индуцированной напряженностью электрического поля.

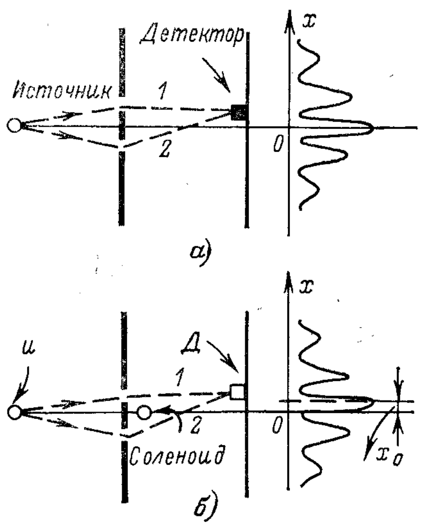

Рис. 2.

где i^* — значение тока, существовавшее в момент $\tau = t - r/c$; сигнал об изменении тока распространяется с конечной скоростью, поэтому величину (32) и называют запаздывающим потенциалом.

В последнем случае вихрь векторного потенциала, а значит, и магнитная индукция «аномального потока» действительно отличны от нуля:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\mu\mu_0 S}{2\pi} i\,(t - r/c) \right] =$$
$$= -\frac{\mu\mu_0 S}{2\pi r c} \frac{\partial i}{\partial \tau} \mathbf{e}_z, \qquad (33)$$

т. е. $B \neq 0$, когда не равна нулю производная тока.

Как уже говорилось, Фарадей неоднократно возвращался к вопросу об электротоническом состоянии. В. Ф. Миткевич в своей книге «Магнитный поток и его преобразования» посвящает § 54 и 55 электротоническому состоянию. Он пишет, что Фарадей снова возвращается к своей идее, хотя и весьма нерешительно, «вполне отдавая себе отчет в том, что пока еще не хватает достаточно определенных данных, чтобы мотивировать представление о подобном особенном состоянии, он все же не может воздержаться от констатирования общего впечатления, говорящего в пользу существования этого состояния. Как бы в свое оправдание, он прямо указывает: «Я не могу сопротивляться впечатлению, что существует какой-то связанный и соответствующий эффект».

Вернусь к более ранним словам Фарадея (Миткевич их приводит на той же странице): «Таким образом, причины, побудившие меня сделать предположение об особенном состояния проволоки, отпадают; и хотя мне продолжает казаться неправдоподобным, чтобы проволока, находящаяся в покое, по соседству с другой проволокой, по которой течет сильный электрический ток, была совершенно безразлична в отношении этого обстоятельства, все же я не осведомлен о каких-либо определенных *фактах*, дающих основание для заключения, что эта первая проволока находится в некотором особенном состоянии».

В этой драматической истории удивительней всего то, что интуиция не обманула гениального Фарадея! Действительно, обратимся к лекциям по физике Фейнмана [Л. 21]. В опыте с интерференцией электронных волн (1956 г.), схематически изображенном на рис. 2, обнаружено, что после расположения между двумя щелями соленоида интерференционная картина смещается на x_0, хотя на пути электронов магнитное поле **B** соленоида отсутствует; или, говоря языком квантовой физики, поле вектора **B** отлично от нуля только в области, где вероятность обнаружить электрон пренебрежимо мала. Что же касается вектора **A**, то он имеет прямо противоположные направления в щелях первого и второго путей, поскольку интеграл от A по замкнутому контуру, проходящему через щели *1* и *2*, равен потоку соленоида. Выключение тока приводит к устранению смещения (рис. 2,*а*).

Таким образом, поле векторного потенциала **A** (электротоническое состояние!) следует считать *реальным,* полем, понимая под этими словами [Л. 21] только такое поле, которое определяет собой движение частицы именно тогда, когда частица находится в том месте, где наличествует это поле.

Приписывая в рассматриваемом опыте влияние полю магнитной индукции **B**, следовало бы предполагать, что поле **B** действует на расстоянии. Влияние поля векторного потенциала на дифракцию электронов было установлено в 1956 г. Значит, прошло более 100 лет с тех пор, как подобного *факта* не хватало Фарадею.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

21. **Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.** Феймановские лекции по физике. М., «Мир», 1965—1967, вып. 1—9.

22. **Скобельцын Д. В.** О тензоре импульс-энергии электромагнитного поля.—«Успехи физических наук», 1973, т. 110, вып. 2, с. 253—292.

23. **Гинзбург В. Л.** О законах сохранения энергии и импульса при излучении электромагнитных волн (фотонов) в среде и о тензоре энергии-импульса в макроскопической электродинамике. — «Успехи физических наук», 1973, т. 110, вып. 2, с. 309—319.

24. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М., «Наука», 1973, т. 1.

25. **Бенда О. О.** Механическое действие электромагнитной волны на материальную среду. Доклады научно-технической конференции. Секция электроэнергетическая, подсекция теоретических основ электротехники, МЭИ, 1970.

26. **Penfield P., Hauss H. A.** Electrodynamics of Moving Media. M. I. T. press, Cambridge Mass., 1967.

27. **Шимони К.** Теоретическая электротехника. Пер. с немецкого под ред. К. М. Поливанова. М., «Мир», 1964.

(Окончание в № 3)

✧ ✧ ✧

КОММУНИЗМ — ЭТО ЕСТЬ СОВЕТСКАЯ ВЛАСТЬ
ПЛЮС ЭЛЕКТРИФИКАЦИЯ ВСЕЙ СТРАНЫ (Ленин)

ЖУРНАЛ ОСНОВАН в 1880 г.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

3
1974
МАРТ

ОРГАН АКАДЕМИИ НАУК СССР, ГОСУДАРСТВЕННОГО КОМИТЕТА
СОВЕТА МИНИСТРОВ СССР ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ, ЦП НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА ЭНЕРГЕТИКИ
И ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

К 100-летию «Трактата об электричестве и магнетизме» Дж. К. Максвелла[1]

Доктор техн. наук, проф. ПОЛИВАНОВ К. М.

Москва

Электродинамика движущихся тел. В § 599 Максвелл приводит три слагаемых напряженности электрического поля (электрической силы), имеющих электромагнитное происхождение. Первая

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{u} \times \mathbf{B} \tag{34}$$

появляется при движении рассматриваемой точки со скоростью $\mathbf{u}$ в магнитном поле $\mathbf{B}$; важно сразу подчеркнуть: скорость $\mathbf{u}$ определяется в той же системе координат, что и магнитная индукция $\mathbf{B}$, в этой же системе координат наблюдаются все слагаемые напряженности поля (электрической силы).

Второе слагаемое выражается как производная по времени в рассматриваемой точке от векторного потенциала:

$$\mathbf{E}_2 = -\partial \mathbf{A}/\partial t \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{A}}. \tag{35}$$

При этом несущественно, за счет чего изменяется $\mathbf{A}$: за счет ли изменения тока, обуславливающего рассматриваемый векторный потенциал, за счет ли перемещения этого контура с током или за счет перемещения намагниченных тел и т. п. Важно заметить, что в правой части стоит именно частная производная, а это значит, что речь идет об изменениях $\mathbf{A}$ в данной фиксированной точке, а не в фиксированной точке тела за счет его движения.

Третье слагаемое определяется пространственным изменением скалярного электрического потенциала

$$\mathbf{E}_3 = -\nabla\varphi. \tag{36}$$

В отличие от Максвелла [§ 599, формула (10)] сумму трех перечисленных слагаемых будем называть здесь действующей напряженностью и снабжать знаком звездочки:

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \dot{\mathbf{A}} - \nabla\varphi, \tag{37}$$

сохраняя наименование напряженности электрического поля только за суммой вторых двух слагаемых:

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} - \nabla\varphi. \tag{38}$$

Такая запись соответствует записи Зоммерфельда [Л. 5, § 34], Тамма [Л. 15, § 111], который называет $\mathbf{E}^*$ эффективной напряженностью поля, и др. Лоренц в книге «Теория электронов», сыгравшей большую роль в развитии теории Максвелла, называет сумму, представленную здесь равенством (37), электрической силой, действующей на единицу заряда [Л. 28], давая ей даже обозначение, отличное от обозначения напряженности, представленной здесь формулой (38); это очень и очень существенно, так как во второе уравнение Максвелла следует вводить именно $\mathbf{E}$, а не $\mathbf{E}^*$, что и делает Лоренц. Однако плотность тока, так же как и поляризованность, определяются действующей напряженностью поля, поэтому для движущихся проводников справедлива формула:

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}^* = \sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}). \tag{39}$$

Из нее вытекает очень важное выражение для определения напряженности поля внутри проводника, движущегося в магнитном поле

$$\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma - \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \tag{40}$$

При переходе к новой системе координат, движущейся относительно первой со скоростью $\mathbf{v}$, найдем, что скорость тела оказывается иной:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}.$$

Однако плотность тока и выделяемая в проводнике мощность должны сохранять свое значение, не зависящее от выбора координатной системы; Максвеллу это казалось очевидным (§ 601). Он

---

[1] Окончание (начало см. в № 1 и 2).

предполагал, что при этом не изменяется и значение вектора **B**. Такие предположения справедливы, если скорости **u** и **v** малы по сравнению со скоростью света. Но в таком случае в новой системе координат напряженность электрического поля должна иметь новое значение!

Этот поразительный результат, хотя и не был указан самим Максвеллом, с необходимостью вытекает из утверждений § 599 и 601; действительно, в новой системе координат по (40)

$$\mathbf{E}'=\mathbf{J}\sigma-\mathbf{u}'\times\mathbf{B}=\mathbf{J}/\sigma-\mathbf{u}\times\mathbf{B}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}. \qquad (41)$$

Сопоставление последнего равенства с (40) приводит к следующему соотношению между напряженностями электрического поля в системах координат, движущихся относительно друг друга со скоростью **v**:

$$\mathbf{E}'=\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}. \qquad (42)$$

Только при таком преобразовании оказывается возможным выражать плотность тока одним и тем же законом (39) в разных системах координат.

Замечательно, что фактом неинвариантности напряженностей поля указывался путь к теории относительности. Этот путь не был легким. Например, Герц допустил ряд существенных ошибок, пытаясь строить электродинамику движущихся тел. Очень многое для правильных представлений теории было сделано Лоренцем. Но только после отказа от представлений об абсолютном времени было завершено построение фундамента релятивистской электродинамики, методы которой оказались непротиворечивыми в применении к телам, имеющим любые скорости. Этот решающий шаг и был сделан Эйнштейном.

Следует отметить, что путь к созданию теории относительности Эйнштейн, как и Лоренц, начали с рассмотрения электродинамики движущихся тел — так и называлась работа Эйнштейна, опубликованная в 1905 г. [Л. 29]; из § 6 этой работы выписаны приведенные ранее уравнения (6). В сборнике статей [Л. 29] очень интересны также статьи Лоренца. При всех преобразованиях теории относительности уравнения Максвелла остаются справедливыми во всех системах координат, принадлежащих к инерциальной системе и движущихся относительно друг друга с постоянными скоростями (специальная теория относительности).

После всего изложенного понятно и такое определение величины **E*** в формуле (37): напряженность электрического поля в системе координат, связанных с рассматриваемым движущимся телом, т. е. *в системе координат, относительно которых рассматриваемое тело неподвижно.* Подобные рассуждения могут оказаться удобными только в случае, когда тело движется как одно целое с одинаковой скоростью во всех его точках; примерно такое же высказывание содержится и в книге [Л. 30, § 49]. Переход к координатам, относительно которых тело неподвижно, нежелателен, когда изучению подлежат именно специфические явления, обусловленные движением в магнитном поле.

В качестве примера интересно рассмотреть распределение токов и потенциалов в электропроводной жидкости, протекающей в круглой трубе, внесенной в поперечное магнитное поле $B=B_y=\text{const}$. Такое устройство применяется для измерения скорости и расхода жидкости по напряжению, т. е. по разности потенциалов между электродами, расположенными внутри жидкости. В простейшем случае ламинарного течения имеется только продольная скорость, и распределение ее по сечению трубы происходит в соответствии с равенством:

$$u=u_z=-\frac{u_0}{r_0^2}(r_0^2-y^2-x^2), \qquad (43)$$

здесь u_0 — скорость на оси трубы.

При расчетах можно предполагать, что магнитное поле индуцированных токов мало по сравнению с внешним полем; можно также пренебречь краевым эффектом и рассматривать поле как двухмерное. В этих условиях поле поддается полному расчету по формулам Максвелла (37) и (39), применение которых упрощается отсутствием изменений по времени ($\dot{\mathbf{A}}=0$).

На рис. 3 представлена картина поля для случая проводящих стенок [Л. 31]. На линии $x=0$ и на поверхности трубы $\varphi=0$; потенциал имеет экстремальные значения в точках $y=0$, $x=\pm r_0/\sqrt{3}$. Расчет показывает, где должны быть расположены проволочные электроды (проволочки, параллельные оси трубы) для максимальной чувствительности метода.

Яркий пример необходимости сохранять в явном виде слагаемое $\mathbf{u}\times\mathbf{B}$ в уравнениях поля представляют новые области электродинамики: магнитная гидро- и газодинамика (МГД) и электродинамика космическая. Одно из основных уравнений МГД [Л. 30]

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}-\operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{H})=\frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\triangle H \qquad (44)$$

вытекает из уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\sigma\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{u}\times\mathbf{B}\right), \qquad (45)$$

где в принятых здесь обозначениях $\mathbf{E}=\mathbf{E}^*-\mathbf{u}\times\mathbf{B}$.

Эти уравнения обычно пишутся (с точностью до постоянных коэффициентов) именно в такой форме. Помимо цитированной [Л. 30] и специальных книг по МГД, можно сослаться на ранее упомянутый учебник [Л. 24] или учебное пособие [Л. 32]. В случае очень большой проводимости правую часть (44) полагают равной нулю.

Если предположить, что плотность ρ может изменяться, то после ряда математических преобразований получаем уравнение [Л. 30 и 32]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{B}}{\rho}\right)=\left(\frac{\mathbf{B}}{\rho}\nabla\right)\mathbf{u}. \qquad (46)$$

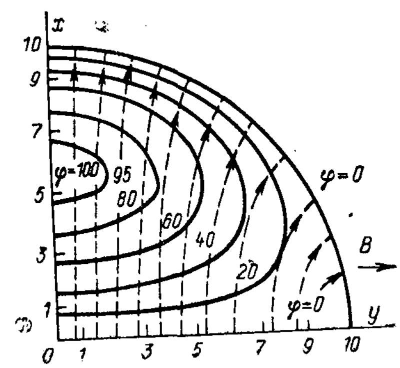

Рис. 3. Линии тока (пунктир) и равного потенциала (сплошные) в случае протекания проводящей жидкости по трубе, расположенной в постоянном поперечном магнитном поле. Проводимость стенок трубы существенно превосходит проводимость жидкости. Изображена одна четверть поперечного сечения; поле в остальных квадрантах легко представить по соображениям симметрии.

Здесь прямыми буквами d обозначена *полная* производная, называемая также *субстанциальной* или материальной:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt}=\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}+(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{F}, \qquad (47)$$

где $\mathbf{F}$ — любой вектор; $\mathbf{u}$ — скорость тела.

Понятием полной производной часто пользуются без достаточных оснований при рассмотрении уравнений Максвелла или электромагнитных процессов в движущихся телах. Так, например, вместо (44) пишут

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt}=\frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\,\Delta\mathbf{H}, \qquad (48)$$

хотя

$$-\mathrm{rot}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{H})=(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{H}-(\mathbf{H}\nabla)\,\mathbf{u}+ +\mathbf{H}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{H}, \qquad (49)$$

и в общем случае он не равен $(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{H}$. Действительно, последние два слагаемых исчезают для несжимаемой жидкости ($\nabla\mathbf{u}=0$) и для магнитно однородной среды ($\mu=\mathrm{const}$), так как

$$\mathrm{div}\,\mathbf{H}=\mathrm{div}\,(\mathbf{B}/\mu\mu_0)=\frac{1}{\mu\mu_0}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B}+\mathbf{B}\nabla\frac{1}{\mu\mu_0}= =-\mathbf{H}\frac{\nabla\mu}{\mu}.$$

Однако второе слагаемое в (49) может оставаться отличным от нуля даже в условиях течения несжимаемой и немагнитной ($\mu=1$) жидкости; при этом условии

$$-\mathrm{rot}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{H})=(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{H}-(\mathbf{H}\nabla)\,\mathbf{u}, \qquad (50)$$

и в общем случае не существует равенства $-\mathrm{rot}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{H})=(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{H}$, которое предполагается при переходе от (44) к (48)*.

Остановлюсь подробнее на анализе уравнения

$$\mathbf{E}^*=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}. \qquad (51)$$

Оно отличается от (37) только тем, что не включает слагаемого ($-\nabla\varphi$), значение которого не вызывает сомнений, и потому здесь пока исключено из рассмотрения.

Сумму слагаемых правой части (51) по какому-то недоразумению многие авторы заменяют субстанциальной производной без всяких оговорок, тогда как в общем случае

$$-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}\neq-\frac{d\mathbf{A}}{dt}=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{A}. \qquad (52)$$

При этом пишут, что

$$\mathbf{E}=-\frac{d\mathbf{A}}{dt}=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}. \qquad (53)$$

(Знак «*» у $\mathbf{E}$ обычно опускают.) В таком случае, естественно, и второе уравнение Максвелла принимает вид:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=-\frac{d\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}}{dt}=-\frac{d\mathbf{B}}{dt}. \qquad (54)$$

Выражения (53) и (54) встречаются, например, в [Л. 33]**, а также в некоторых других чрезвычайно авторитетных книгах. Прямая ошибочность таких формулировок могла оставаться незаметной, так как в огромном числе простейших случаев они оказываются справедливыми. Сравним внимательно левую и правую части неравенства (52). По известным правилам векторного анализа

$$\mathbf{u}\times\mathbf{B}=\mathbf{u}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{A}=-(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{A}+\nabla(\mathbf{u}\mathbf{A})- -\mathbf{A}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{u}-(\mathbf{A}\nabla)\,\mathbf{u}, \qquad (55)$$

а это значит, что равенство (53) справедливо, когда сумма трех последних слагаемых в (55) обращается в нуль. В противном случае имеет место неравенство (52), а применение формул (53) и (54) приводит к заведомо ошибочным результатам. Проще всего и убедительней привести соответствующие примеры.

Пусть в однородном магнитном поле, направленном по оси x, вращается плоская рамка вокруг оси z (рис. 4). Угол, образуемый плоскостью рамки с осью x, равен $\alpha=\omega_1 t+\alpha_0$; магнитная индукция однородного поля $B=B_x=B_0\cos\omega_2 t$. Требуется найти значение индуцированной напряженности поля:

$$\mathbf{E}^*=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\mathbf{u}\times\mathbf{B} \qquad (56)$$

сопоставить результат с величиной

$$\mathbf{E}=-\frac{d\mathbf{A}}{dt}=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{A}. \qquad (57)$$

В этом примере можно полагать векторный потенциал:

и $$A=A_z=By. \qquad (58)$$

Скорость движения верхнего провода рамки

$$\mathbf{u}=-\omega_1 y\mathbf{e}_x+\omega_1 x\mathbf{e}_y. \qquad (59)$$

В этом случае

$$-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=\omega_2 B_0 y\sin\omega_2 t \qquad (60)$$

и

$$-(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{A}=-\omega_1\left(-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}\right)By\mathbf{e}_z=-\omega_1 xB_0\cos\omega_2 t\mathbf{e}_z. \qquad (61)$$

К такому же результату приводит, конечно, и замена слагаемого $-(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{A}$ векторным произведением

$$\mathbf{u}\times\mathbf{B}=-\omega_1 xB\mathbf{e}_z. \qquad (62)$$

Значит, в этом случае

$$-\frac{d\mathbf{A}}{dt}=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}. \qquad (63)$$

Это легко объясняется тем, что теперь в правой части (55) равны нулю все три последних слагаемых: первое — потому, что $\mathbf{u}\perp\mathbf{A}$, второе — потому, что $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}=2\omega_1\mathbf{e}_z$ и, следовательно, $\mathbf{A}\parallel\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$, третье — потому, что $(\mathbf{A}\nabla)=A_z\frac{\partial}{\partial z}$, а $\mathbf{u}$ от z не зависит.

Теперь рассмотрим пример, когда, напротив, вместо равенства (63) осуществляется неравенство (52). Естественно, этот пример сложнее. Обратимся к случаю ранее рассмотренной трубы (рис. 3), в которой течет проводящая жидкость со скоростью

$$u=u_z=-u_0(r_0^2-x^2-y^2).$$

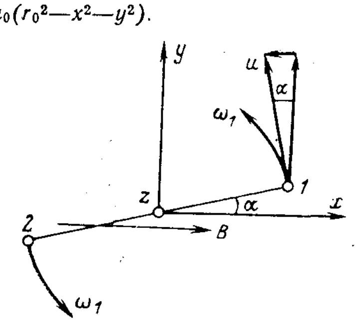

Рис. 4. Рамка с проводами *1* и *2*, параллельными оси z, вращается со скоростью ω_1 в однородном переменном магнитном поле $B=B_x=B_0\cos\omega_2 t$.

---

* Если $H=H_x$ в канале с плоскими стенками $x=\pm a$, то скорость $u=u_z$ при ламинарном течении зависит от координаты x; в этом простейшем случае $(\mathbf{H}\nabla)\,\mathbf{u}\neq0$.

** Формула 10.8 или 10.3 в русском переводе.

Пусть по оси трубы протянута коаксиальная проволока, по которой течет постоянный ток i. (Для выполнения гидродинамических условий о равенстве скоростей жидкости и граничащего с ней твердого тела можно принять другой закон скорости или предположить, что проволока движется в направлении оси z, обеспечивая выполнение требования непрерывности скорости при прежнем законе течения; такое движение никак не скажется на рассматриваемых электромагнитных процессах.) Векторный потенциал магнитного поля тока можно представить равенством

$$A = A_z = -\frac{i\mu_0}{4\pi}\ln\frac{x^2+y^2}{\rho}, \qquad (64)$$

где ρ — произвольная постоянная.

Вектор магнитной индукции в этом случае

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} = -\frac{i\mu_0}{2\pi}\frac{1}{x^2+y^2}(y\mathbf{e}_x - x\mathbf{e}_y)\,u_0. \qquad (65)$$

Условие i=const обращает в нуль частную производную $(\partial\mathbf{A}/\partial t)$, и поэтому сравнению подлежат величины $(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{A}$ и $\mathbf{u}\times\mathbf{B}$. Первая из них

$$(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{A} = \mathbf{u}\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{A} = 0, \qquad (66)$$

так как $u = u_z$, а $\mathbf{A}$ не зависит от z; тогда как вторая при $r < r_0$

$$\mathbf{u}\times\mathbf{B} = \frac{i\mu_0}{2\pi}\frac{r_0^2 - x^2 - y^2}{x^2+y^2}(x\mathbf{e}_x + u_0\mathbf{e}_y)\,u_0 \neq 0. \qquad (67)$$

Тем самым подтверждается неравенство (52). Нетрудно, проведя все операции, указанные в правой части (55), найти, что, хотя первое слагаемое равно нулю, три остальных в точности равны (67).

Последний пример отчетливо показывает ошибочность формулировки $\mathbf{E} = -d\mathbf{A}/dt$. На ошибочность формул (53) и (54) обращает внимание и автор [Л. 8] Чен-То Тай. Он отмечает также неправомочность перехода от частной производной к полной в интегральных формулировках, в частности, у Стрэттона [Л. 34, формула (28)], когда тот выражает закон Ампера — Максвелла (8) и (5) равенством

$$\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = I + \frac{d}{dt}\int \mathbf{D}d\mathbf{S}, \qquad (68)$$

и у Смайта [Л. 41, стр. 21 и 31], когда тот выражает закон Фарадея — Максвелла (9) равенством

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}d\mathbf{S}. \qquad (69)$$

Впрочем, замечания Тая относятся, по-видимому, лишь к отсутствию знака звездочки, необходимого, по его мнению, при $\mathbf{E}$ в (69) и при $\mathbf{H}$, а также при определении вектора $\mathbf{J}$ и соответствующего определения I в (68), когда речь идет о движущихся телах. Он сам предлагает в последнем случае эти уравнения писать в таком виде:

$$\oint \mathbf{E}^*d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}d\mathbf{S}; \qquad (70)$$

$$\oint \mathbf{H}^*d\mathbf{l} = \int \mathbf{J}^*d\mathbf{S} + \frac{d}{dt}\int \mathbf{D}d\mathbf{S}, \qquad (71)$$

поскольку

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B};\ \ \mathbf{H}^* = \mathbf{H} - \mathbf{u}\times\mathbf{D};\ \ \mathbf{J}^* = \mathbf{J} - \rho\mathbf{u}. \qquad (72)$$

После более или менее убедительно обоснованной критики Тай [Л. 8] рекомендует пользоваться уравнением, которым, как он говорит, многие и пользуются и которое, по его мнению, не приводит

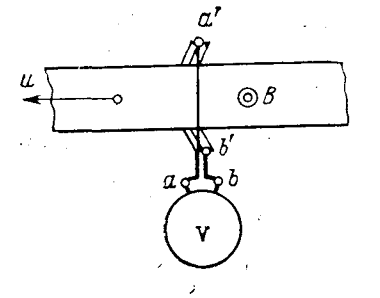

Рис. 5. Медная пластина шириной l движется со скоростью $\mathbf{u}$ в однородном магнитном поле, нормальном к ней. Неподвижные щетки, скользящие по краю пластины, соединены с вольтметром.

к недоразумениям; это уравнение (при несколько измененных обозначениях) имеет вид:

$$\oint \mathbf{E}^*d\mathbf{l} = -\int\left[\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \mathrm{rot}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{B})\right]d\mathbf{S}. \qquad (73)$$

Последнее выражение обладает существенным дефектом с точки зрения теории поля: интегрирование $\mathbf{E}^*$ по контуру определяется величинами, локально не совпадающими с линией контура l; к тому же оно не во всех случаях применимо (см. пример на рис. 5). Остаются непонятными причины, по которым не приводится оригинальная формулировка Максвелла (§ 598):

$$\oint \mathbf{E}^*d\mathbf{l} = \oint\left[-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi + \mathbf{u}\times\mathbf{B}\right]d\mathbf{l}, \qquad (74)$$

непосредственно вытекающая из ранее приведенного максвелловского равенства (37); в последней формуле обозначения Максвелла заменены современными[2].

В современной физике и технике можно найти много других и, может быть, даже более интересных примеров приложения электродинамики движущихся тел; ограничусь только одним.

В Канберре (Австралия) был построен очень интересный накопитель механической энергии [Л. 35 и 36]. Он представлял собой своего рода «униполярную» машину — массивный ротор (r=0,8 *м*), вращающийся с угловой скоростью ω= =378 *рад/сек* в продольном магнитном поле (рис. 6). При подводе тока к щеткам, располагавшимся в середине цилиндра, и съеме тока с выступающих концов вала было обнаружено значительное увеличение сопротивления цепи, что первоначально приписывалось возрастанию контактного сопротивления щеток при большой плотности тока. Однако после расчетов [Л. 37] выяснилось, что причина в особом распределении тока, который в тело цилиндра поступает от пояса, образованного следом несимметрично расположенной щетки. Харак-

---

[2] Формула (74) практически совпадает с выражением (49.3) из [Л. 30]:

$$\mathscr{E} = \oint\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right)dl,$$

где $\mathscr{E}$ обозначает э. д. с. К сожалению, авторы вскоре переходят от этого выражения без достаточных оснований к формуле (49.4):

$$\mathscr{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Нельзя не пожалеть и о том, что комментируя второе (посмертное) издание Трактата, Дж. Дж. Томсон упростил формулу (74), заменив ее выражением

$$э.\ д.\ с. = -\int\frac{dB}{dt}d\mathbf{S}$$

и записав второе уравнение Максвелла в форме

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -dB/dt.$$

Впрочем, и в оригинальном тексте Максвелла часто не делается различия в записи частных и полных производных. Может быть, это и привело к неточностям в формулах у более поздних авторов.

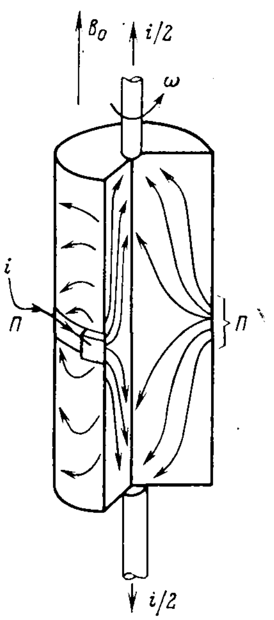

Рис. 6. Схематическая картина распределения токов внутри цилиндра и на его поверхности при быстром вращении цилиндра в продольном постоянном магнитном поле и при несимметричном подводе тока: ток подводится к щетке, расположенной в середине цилиндра и занимающей лишь небольшую часть окружности. Буквой *П* обозначен поясок, представляющий собой геометрический след места соприкосновения щетки с вращающимся цилиндром.

терно, что по любому внутреннему продольному сечению цилиндра картина распределения тока одинакова, причем ток входит внутрь массивного цилиндра из названного пояса, к которому он притекает от щетки по поверхностному слою цилиндра.

Наведение э. д. с. Величайшее открытие Фарадея (1831 г.), которое называют наведением э. д. с. или электромагнитной индукцией, можно считать основой всей электроэнергетики. Оно превосходно известно всем электротехникам, излагается в любом учебнике физики, до сих пор его анализу посвящают статьи в специальных технических и физических журналах [Л. 38]. И тем не менее не существует единой точки зрения на формулировку этого закона в присутствии движущихся тел.

Электродвижущие силы определяют как интеграл от «действующей» напряженности поля $\mathbf{E}^*$. При этом в (37) слагаемое — $\partial \mathbf{A}/\partial t$ называют индуцированной напряженностью, а слагаемое $\mathbf{u}\times\mathbf{B}$ — напряженностью, индуцированной движением; такое различение иногда не ясно, а иногда излишне. Слагаемое $\mathbf{u}\times\mathbf{B}$ иногда относят к разряду «сторонних», его часто называют силой Лоренца. Правомочность такого названия вызывает сомнение: оно было введено Максвеллом задолго до Лоренца (1853—1928 гг.). Но Максвелл, как уже говорилось, левую часть (37) рассматривал просто как напряженность электрического поля, а необходимость различать $\mathbf{E}^*$ и $\mathbf{E}$ была отмечена именно Лоренцем; это обстоятельство и может служить основанием для наименования $\mathbf{u}\times\mathbf{B}$ силой Лоренца.

Кроме сил (напряженностей), приведенных в (37) — (39), электромагнитное происхождение имеет сила, обусловленная эффектом Холла, которая здесь не учитывается; она очень мала по сравнению с другими слагающими во всех электротехнических устройствах, кроме, разумеется, приборов, устроенных именно на применении этого эффекта.

Большое значение имеют и силы (напряженности поля) сторонние $\mathbf{E}^{\text{ст}}$, не сводимые к макроскопической электродинамике. Это прежде всего электрохимические силы, действующие в аккумуляторах и гальванических элементах, к ним можно относить и силы, возникающие в топливных элементах, имеющих, вероятно, большое будущее. Добавляя $\mathbf{E}^{\text{ст}}$ к (37), получаем выражение:

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{u}\times\mathbf{B} - \partial\mathbf{A}/\partial t - \nabla\varphi + \mathbf{E}^{\text{ст}},$$

в котором каждому из четырех слагаемых можно дать свое название: 1) — генераторная напряженность, она индуцируется при вращении обмотки в магнитном поле; 2) — трансформаторная; 3) — конденсаторная; 4) — аккумуляторная. Несмотря на примитивность таких названий, они не лишены смысла, легко запоминаются и правильно указывают типичные случаи, соответствующие каждому из них.

Э. д. с. часто определяют по формуле (70). Ее дефект, также как и формулы (73), заключается не только в том, что она может оказаться неверной, а в том, что значение вектора $\mathbf{E}$ по контуру интегрирования определяется значениями поля, локализованными не в точках расположения контура, по которому интегрируется левая часть. Рассмотрим самый обыкновенный случай наведения э. д. с. в проводах, заложенных в полузакрытых пазах синхронной машины.

На рис. 7 схематически изображены части статора и ротора, на роторе ромбом около буквы N обозначена плоскость, проходящая через середину его северного полюса (ротор предполагается двухполюсным и симметричным). Пусть среднее значение магнитной индукции при $r=r_0$ в пределах нескольких ближайших зубцов и пазов составляет 0,6 *тл* и пусть магнитное поле внутри паза составляет одну десятитысячную долю указанной величины и практически остается неизменным при небольшом повороте ротора (при переходе из одного положения в другие, указанные на рис. 7). Если ротор вращается с угловой скоростью $\omega=314$ *рад/сек*, имеет одну пару полюсов, радиус $r=0{,}5$ *м* и длину витка (прямого и обратного проводов) $2l=4$ *м*, то не составит никакого труда найти э. д. с. а также индуцированную напряженность поля:

$$e=\omega r B_{\text{ср}} 2l = 378 \text{ в}; \quad E = e/2l = 94{,}5 \text{ в/м}. \qquad (75)$$

Для того, чтобы найти этот ответ по (69), надо рассчитать скорость изменения магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную проводом рис. 7 и ему диаметральным; при этом магнитная индукция в точках расположения самих проводов не играет никакой роли.

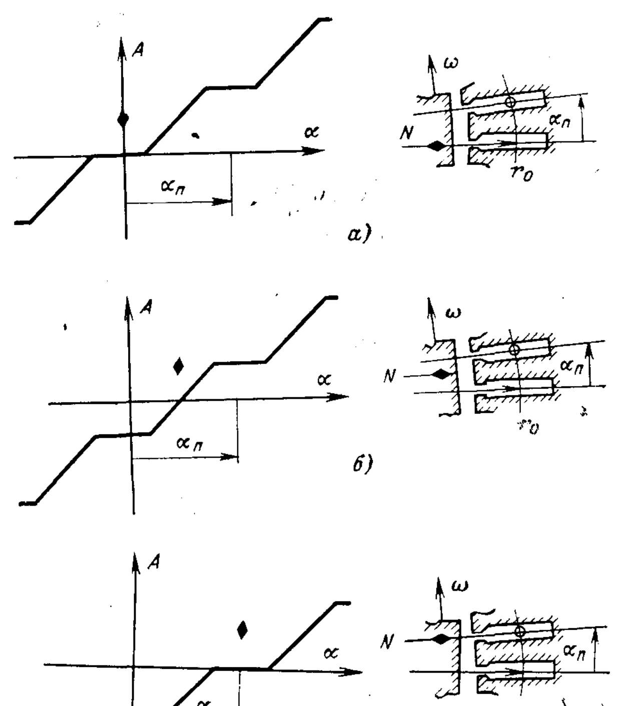

Рис. 7. Провод в полузакрытом пазу синхронной машины; на рисунках *а*, *б* и *в* показаны последующие положения ротора, вращающегося с угловой скоростью ω.

Такой расчет представляет собой принципиально не полевую трактовку электромагнитных явлений. В самом деле, э. д. с., индуктируемая в проводах, определяется значением производной от магнитной индукции, локализованной не в точках расположения самих проводов. В формуле (75) величину ωr принято толковать как скорость. Спрашивается: скорость чего? Иногда приходится слышать ответ: скорость магнитного поля. Но такой ответ нельзя признать удовлетворительным; можно говорить о скорости фронта, о скорости волны и т. п., но говорить просто о скорости магнитного поля было бы легко только в том случае, если бы удалось поставить метки на силовые линии и смотреть, с какой скоростью они перемещаются. В противном случае я могу говорить только об увеличении или уменьшении интенсивности поля, и определять как скорости только понятия, вытекающие из подобных наблюдений.

Максвелловская формулировка (74) может быть получена из (73), если принять во внимание, что $\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$ и применить к ней теорему Стокса[3]; правда, в (74) содержится еще потенциальная слагающая $-\nabla\varphi$, но она исчезает при интегрировании по замкнутому контуру. Формула (74) отличается от предыдущей тем, что по ней действующая напряженность электрического поля $\mathbf{E}^*$ в точках расположения проводов определяется слагающими векторов, стоящими под знаком второго интеграла, именно в точках расположения рассматриваемого провода.

К сожалению, нельзя не признать, что применение формулы (74) сопряжено с некоторыми трудностями в операциях с непривычной и непопулярной величиной $\mathbf{A}$ (в курсах электрических машин и трансформаторов часто вообще не упоминается понятие векторного потенциала!), тогда как именно быстрое изменение $\mathbf{A}$ внутри паза при вращении ротора и определяет большое значение наведенной э. д. с.

На рис. 7 показано, как изменяется векторный потенциал (имеющий единственную составляющую, параллельную оси ротора $A=A_z$) в функции угла α при фиксированном значении $r=r_0$. На представленных графиках он имеет крутой наклон, когда координата α соответствует ферромагнитному зубцу, и остается почти постоянным, когда координата α соответствует пазу. Представленный график соответствует простейшему уравнению, которое легко написать, зная хотя бы элементы векторного анализа:

$$\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\mathbf{e}_r. \tag{76}$$

Последнее равенство можно записать и проще:

$$B=B_r=\frac{1}{r_0}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \alpha}. \tag{77}$$

Начало отсчета значений векторного потенциала $A=0$ принято лежащим на оси ротора $(r=0)$, чему и соответствуют графики рис. 7. При любом повороте ротора векторный потенциал сохраняет нулевое значение по всей его средней плоскости, а значит, и на отметке, сделанной ромбом, так как магнитный поток через среднюю плоскость ротора равен нулю (а поток может быть представлен как разность векторных потенциалов на оси и на образующей). При этом почти горизонтальная часть $A(\alpha)$, соответствующая пазу, в котором заложен провод, по мере поворота ротора быстро опускается, как это видно из сопоставления рис. 7,*а*, *б* и *в*, на которых против острия ромба векторный потенциал сохраняет нулевое значение. Из проведенного анализа видно, как неосторожно говорить, что э. д. с. наводится изменяющимся магнитным полем, если магнитным полем называть не интенсивность «электротонического состояния», т. е. векторный потенциал, а поле вектора $\mathbf{B}$; напомню, что внутри паза как величина $\mathbf{B}$, так и ее изменение ничтожно малы.

Как видно из рис. 7, что также можно найти аналитически, $\partial A/\partial t=-\partial A_{\text{ср}}/dt$ равно величине $\omega r B_{\text{ср}}$ в (75), а это значит, что последняя формула без всяких ухищрений способна давать правильный результат.

В только что рассмотренном примере не участвовало слагаемое $\mathbf{u}\times\mathbf{B}$, поскольку в выбранной системе координат провод находился в покое $(u=0)$, поэтому интересно рассмотреть и другие примеры. Один из них — это всегда анализируемый «униполярный генератор». К нему применимо уравнение (74), но неприменимо (69), если не делать причудливой оговорки: можно, де, пользоваться и формулой (69), нужно только надлежащим образом выбирать контур, по которому ведется интегрирование в левой части равенства; а контур надо выбирать так, чтобы относительно него движущееся тело оставалось неподвижным (своеобразная электродинамика движущихся тел!), при этом контур непрерывно деформируется — его относит течение жидкости или движение провода. За последние годы такая точка зрения на применимость (69) к движущимся телам стала получать довольно широкое распространение.[4]

Рассмотрим еще один простой пример (рис. 5): длинная проводящая лента движется с постоянной скоростью в постоянном магнитном поле; к двум скользящим контактам по краям ленты присоединен вольтметр. Вероятно, не задумываясь, легко сказать, что показание вольтметра

$$U=uBl. \tag{78}$$

Но если обратиться к (73), то ответ окажется иным: первое слагаемое под интегралом правой части равно нулю, так как магнитное поле по условию постоянно; равно нулю и второе слагаемое, так как под знаком rot по условию стоит произведение по-

[3] Нельзя забывать, однако, что преобразование Стокса применимо только в случаях отсутствия разрывов.

[4] Так рассуждал и Герц [Л. 2, стр. 661]; фраза, непосредственно следующая за формулой:

$$E=\oint E_l\,dl=-\frac{d\Phi}{dt},$$

где E, конечно, обозначает э. д. с., а не напряженность поля. Вероятно, Герц связывал эти рассуждения с представлением «о полном увлечении эфира движущимися телами». Истории представлений об эфире (впрочем, как и многих других вопросов) в этом кратком очерке автор совсем не касается.

стоянных величин. Таким образом, и (73) здесь приводит к ошибочному результату. Сторонники формулы (69) могут ее с успехом применить, смещая линию, соединяющую точки *1* и *2* внутри ленты так, чтобы эта линия двигалась вместе с лентой. А если магнитная индукция **B** внешнего поля изменяется, то ведь должен появиться дополнительный переменный поток, сцепленный с растянувшимся контуром. Что же касается формулы (74), то и в этом случае она приводит к правильному результату.

Принципиально интересен еще случай рис. 8, когда пластинка из материала с очень высокой проницаемостью вращается между магнитными полюсами статора. До тех пор, пока она остается в пределах угла, охватывающего полюсы электромагнитов, на поверхности пластины остается неизменяющееся и большое поле. Пластину охватывает проволочная рамка, провода которой лежат на торцах, как показано на рис. 8. Как определить э. д. с., наводимую в рамке? По формулам (69) и (73) она равна нулю, так как нет магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограничиваемую рамкой,— линии магнитной индукции параллельны плоскости витка (во всяком случае, до тех пор, пока пластина при повороте не отступает далеко от середины полюсов).

Значительно сложнее показать равенство нулю результирующей э. д. с., применяя формулу (73). Прежде всего найдем значение $\mathrm{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{B})$. Поскольку $\mathbf{u}=\omega r\mathbf{e}_\alpha$ и $\mathbf{B}=B\mathbf{e}_r$, то указанную операцию следует провести над вектором, имеющим единственную составляющую $-\omega rB\mathbf{e}_z$, при этом

$$\mathrm{rot}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{B})=\omega B\mathbf{e}_\alpha. \quad (79)$$

Так как результат от координат не зависит, интегрирование заменяем умножением на площадь поверхности между нижней и верхней проволоками, выраженную в векторной форме $\mathbf{S}=S\mathbf{e}_\alpha=2r_\text{п}\mathbf{e}_\alpha$, в итоге находим:

$$\int\mathrm{rot}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{B})\,d\mathbf{S}=2r_\text{п}\omega B. \quad (80)$$

Операцию $-\partial B/\partial t$ следует проводить для фиксированного значения пространственных координат r и α и брать значение производной именно в тот момент, когда проволока проходит через выбранные и фиксированные координаты. Для ясности на рис. 9 выполнено вспомогательное построение, из которого легко заключить, что поток в направлении положительной нормали $\mathbf{n}^0$ через площадку, ограниченную радиусами $r_\text{п}$ при $\alpha=\alpha_1$, равен

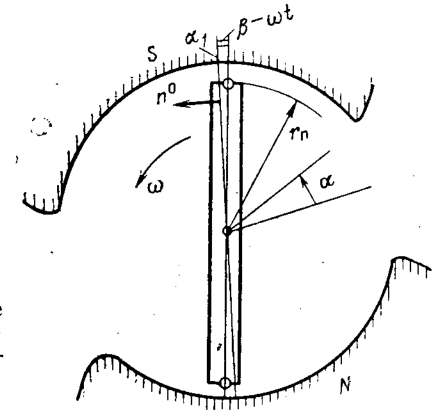

Рис. 9. Вспомогательное построение для определения частной производной $-\partial\Phi/\partial t$.

$$\Phi=-Br_\text{п}2\sin(\beta-\omega t), \quad (81)$$

и, следовательно,

$$-\partial\Phi/\partial t=-Br_\text{п}\,2\omega\cos(\beta-\omega t). \quad (82)$$

Но в момент расположения проволок в плоскости α_1 угол $\beta-\omega t=0$. Таким образом, первое слагаемое компенсирует второе и находится правильный итог: э. д. с. равна нулю. Вряд ли выполненный путь рассуждений можно признать простым; преимущества, конечно, остаются за формулой (69), добавлю, в тех случаях, когда ее можно применять.

Равенство (74), бесспорно, приводит к тому же правильному результату. Однако в нем, как и в (73), второе слагаемое очень велико, так как $\mathbf{u}\perp\mathbf{B}$, и каждый из множителей достаточно велик; но второе слагаемое полностью компенсируется первым ($-\partial\mathbf{A}/\partial t$). На рис. 8 и 9 выполнены построения, показывающие, как резко изменяется во времени векторный потенциал, когда через фиксированную плоскость $\alpha=\mathrm{const}$ проходит проволочная рамка. Если бы проволочную рамку «приклеить» к полюсам (при этом ее скорость равна нулю), а пластину по-прежнему вращать, то в выражении (74) слагаемое $\mathbf{u}\times\mathbf{B}$ исчезнет, и наводимая напряженность поля, уже отличная от нуля, будет определяться слагаемым $-\partial\mathbf{A}/\partial t$, которое в точности сохраняет прежнее значение.

В электротехнике при рассмотрении движущихся тел и переменных полей часто ставится вопрос: что покажет вольтметр, зажимы которого присоединены к каким-либо двум фиксированным точкам (например, a' и b' на рис. 5 или 10). При этом не всегда дается уверенный и достаточно обоснованный ответ. Так обстояло дело с удивительно простой задачей Кульвика, вызвавшей, однако, много откли-

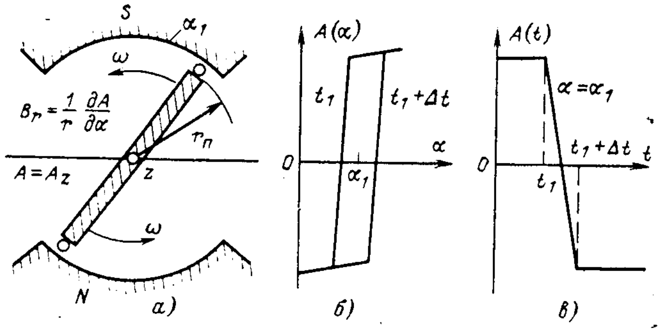

Рис. 8. Пластина большой магнитной проницаемости, вращающаяся между полюсами электромагнита (*а*). Графики векторного потенциала:
б — $A(\alpha)$ для двух моментов времени t_1 и $t_1+\Delta t$; *в* — $A(t)$ для точки с постоянной координатой α_1.

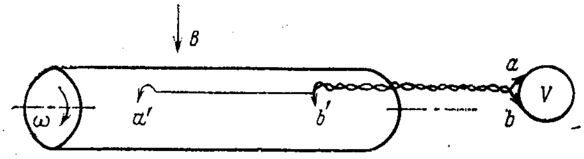

Рис. 10. Металлический цилиндр вращается в магнитном поле. Цилиндр — длинный, и влиянием краевого эффекта его концов можно пренебречь. К скользящим контактам a' и b' присоединен вольтметр.

ков; она подробно рассмотрена в книге [Л. 39]; приведенное там правильное решение нельзя считать простейшим (см. также книгу [Л. 40]).

Не подлежит сомнению, что наиболее простой метод соответствующего расчета можно получить, обращаясь к вышеприведенным формулам (37)—(39), полученным из Трактата; им целесообразно придать такой вид:

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{J}/\sigma = \mathbf{u}\times\mathbf{B} - \partial\mathbf{A}/\partial t - \nabla\varphi \tag{83}$$

или

$$\nabla\varphi = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\mathbf{J}}{\sigma} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}. \tag{84}$$

Пусть зажимы вольтметра через соединительные провода контактируют с каким-либо телом, движущимся в магнитном поле или расположенным в области переменного векторного потенциала. Вольтметр, если он правильно включен, показывает разность потенциалов, которую следует отождествлять, по убеждению автора, с понятием напряжения:

$$U = \int\limits_b^a \nabla\varphi d\mathbf{l} = \varphi_a - \varphi_b, \tag{85}$$

где интегрирование проведено по пути, лежащему внутри вольтметра от зажима b к зажиму a.

Как известно, разность потенциалов не зависит от пути, по которому интегрируется градиент потенциала, поэтому тот же результат получится и при интегрировании по пути, проходящему через движущиеся тела, по которым может протекать электрический ток, имеющий плотность $\mathbf{J}$, и которые могут находиться в переменном поле. В последнем случае под знак интеграла целесообразно подставить градиент $\nabla\varphi$, выраженный равенством (84). В результате найдем:

$$U = \int\limits_b^a \nabla\varphi d\mathbf{l} = \oint \left\{-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\mathbf{J}}{\sigma} + u\times\mathbf{B}\right\} d\mathbf{l}. \tag{86}$$

В правой части на интеграле поставлен особый знак: не полностью замкнутый круг. Этим отмечается, что контур, по которому проводится интегрирование, не полностью замкнут — он не заходит внутрь вольтметра. Однако в случае сколь-нибудь корректного включения вольтметра в нем $\mathbf{J}=0$, $\partial\mathbf{A}/\partial t=0$ и, конечно, $\mathbf{u}\times\mathbf{B}=0$. А это позволяет интеграл с неполным кружком заменить обычным знаком контурного интеграла и писать:

$$U = \varphi_a - \varphi_b = \int\limits_b^a \nabla\varphi d\mathbf{l} = \oint \left\{-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\mathbf{J}}{\sigma} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}\right\} d\mathbf{l}. \tag{87}$$

Эта формула, прямо восходящая к формулировкам Максвелла, приведенным в его Трактате, позволяет ответить с полной твердостью на многие вопросы о том, что покажет вольтметр. Замечу еще, что первое слагаемое в (87) в ряде случаев удобно заменять частной производной от магнитного потока, после чего можно писать:

$$U = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \oint \left(-\frac{\mathbf{J}}{\sigma} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}\right) d\mathbf{l}. \tag{88}$$

Заключение. В публикуемом очерке о Трактате Максвелла автору не удалось коснуться многих существенных вопросов, таких как силы, действующие в электромагнитном поле на поляризованные тела, вычислительные методы, предложенные Максвеллом, модели гиромагнитных эффектов и др. Актуальность теории Максвелла для широких кругов физиков, кроме указанных в тексте разнообразных публикаций, можно еще характеризовать тем, что, открывая Международную конференцию по магнетизму (Москва, 1973 г.), П. Л. Капица в своей речи большое внимание уделил столетию со времени опубликования Трактата.

В истории науки и даже в истории человеческого общества можно отметить основные события, связанные с творчеством Максвелла, с опубликованием его знаменитого Трактата: открытие и развитие радиотехники; установление взгляда на поле, как на физическую реальность; создание электродинамики движущихся тел, включая релятивистскую электродинамику (специальная теория относительности), а также магнитную гидро- и газодинамику и электродинамику космическую. Можно также с уверенностью утверждать, что научные и технические открытия в области электродинамики не исчерпываются достижениями истекшего столетия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

28. **Лоренц Г. А.** Теория электронов. Пер. с англ. под ред. Т. П. Кравеца. М., Изд. тех.-теорет. лит., 1953.

29. **Lorentz H. A., Einstein A., Minkowski H.** Das Relativitatsprinzip (eine Sammlung von Abhandlungen). Dritte, verbesserte Auflage. B. G. Teubner, Leipzig — Berlin, 1920.

30. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Электродинамика сплошных сред. М., Изд. тех.-теорет. лит., 1957.

31. Электрическое поле в электропроводной жидкости, текущей в присутствии поперечного магнитного поля.— В кн.: Сборник материалов к V Таллинскому совещанию по электромагнитным расходомерам. Таллин, 1971, вып. 1, с. 5—18. Авт.: В. П. Герасименко, Г. А. Камзелев, Л. С. Лифшиц, К. М. Поливанов.

32. **Кухаркин Е. С.** Основы технической электродинамики. М., «Высшая школа», 1969.

33. **Harnwell G. P.** Principles of Electricity and Electromagnetism. Second Edition. New York, Toronto, London, 1949. (Русский перевод: **Харнвелл Г. П.** Физические основы электротехники. Ред. перевода и дополнений К. М. Поливанов. М., Госэнергоиздат, 1950).

34. **Стрэттон Дж. А.** Теория электромагнетизма. Пер. под ред. С. М. Рытова, М., Огиз-Гостехиздат, 1948.

35. **Blamey J. W., Carden P. O., Hibbard L. U., Inall E. K., Marshall R. A., Oliphant Sir Mark.** The large homopolar generator at Canberra. Nature, London, vol. 195, pp. 113—114.

36. **Inall E. K.** Modifications to Canberra homopolar generator.— «Atomic Energy», Sydney, 1965, April.

37. **Carden P. O.** Two theorems related to the electrical properties of rotating bodies. Proc. Roy. Soc., S. A., vol. 294, 1966, 4 Oct., pp. 311—318.

38. **Scanlon P. J., Henriksen R. N., Allen J. R.** Approaches to Electromagnetic Induction.— «American Journ. of Physics», 1969, № 7, vol. 37, pp. 698—708.

39. **Меерович Э. А.** Методы релятивистской электродинамики в электротехнике. М., «Энергия», 1966.

40. **Cullwick E. G.** Electromagnetism and Relativity. Second edition. London, 1959.

41. **Смайт В.** Электростатика и электродинамика. Пер. А. В. Гапонова, М. А. Миллера. Изд-во иностр. лит., 1954.

◇ ◇ ◇